



## О пересечениях нормальных подгрупп конечных групп с максимальными

**В.С. Монахов, Д.А. Ходанович**

*Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»*

*Рассматриваются только конечные группы. Вполне факторизуемой группой называют группу, в которой все подгруппы дополняемы, а  $t$ -группой – группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Доказано, что нормальная подгруппа  $K$  группы  $G$  разрешима, если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо является разрешимой  $t$ -группой. В качестве следствий получены новые признаки разрешимости нормальной подгруппы конечной группы.*

**Ключевые слова:** конечная группа, нормальная подгруппа, максимальная подгруппа, разрешимая группа, вполне факторизуемая группа,  $t$ -группа.

## On the intersections of normal subgroups of finite groups with maximal subgroups

**V.S. Monakhov, D.A. Hodanovich**

*Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»*

*Only finite groups have been considered. If all the subgroups of a group are complemented, then the group is called a completely factorizable group. If each subnormal subgroup is normal, then the group is called  $t$ -group. We've proved that each normal subgroup  $K$  of group  $G$  is solvable, if for each maximal subgroup  $M$  of group  $G$ , that does not contain subgroup  $K$ , intersection  $K \cap M$  has either odd order or  $K \cap M$  is a completely factorizable group, or else  $K \cap M$  is a solvable  $t$ -group. We've obtained new solvability criteria of normal subgroups of finite groups.*

**Key words:** finite group, normal subgroup, maximal subgroup, solvable group, completely factorizable group,  $t$ -group.

**Р**ассматриваются только конечные группы. Терминология и обозначения соответствуют [1].

В работах Л.Я. Полякова [2], Л.А. Шеметкова [3], В.С. Монахова, М.В. Селькина и С.Ф. Каморникова [4–6] устанавливалось строение нормальной подгруппы  $K$  группы  $G$  при дополнительных ограничениях либо на индексы максимальных в  $G$  подгрупп, не содержащих  $K$ , либо на пересечения подгруппы  $K$  с максимальными подгруппами из  $G$ . В частности, в [4] установлена разрешимость нормальной в группе  $G$  подгруппы  $K$  при условии, что для каждой максимальной в  $G$  подгруппы  $M$ , не содержащей подгруппы  $K$ , пересечение  $K \cap M$  нильпотентно. Эти результаты отражены в [7].

**Пример.** В системе компьютерной алгебры GAP [8] под номером 208 в библиотеке SmallGroups перечислены все свойства группы  $PGL(2,7)$ . В частности, она содержит в точности

следующие с точностью до изоморфизма максимальные подгруппы: нормальную подгруппу  $PSL(2,7)$ ; диэдральную подгруппу  $[Z_3]E_4 = [Z_6]Z_2$  порядка 12; диэдральную подгруппу порядка 16; подгруппу  $[[Z_7]Z_3]Z_2$ . Ясно, что все максимальные подгруппы, за исключением нормальной подгруппы  $PSL(2,7)$ , сверхразрешимы. Пересечения нормальной подгруппы  $PSL(2,7)$  с другими максимальными подгруппами из группы  $PGL(2,7)$  имеют порядки 6, 8 или 21.

Этот пример указывает на то, что нормальная подгруппа  $K$  группы  $G$  может быть неразрешимой, если сверхразрешимы пересечения подгруппы  $K$  с каждой не содержащей ее максимальной подгруппой из  $G$ . Поэтому для получения разрешимости подгруппы  $K$  надо на пересечения накладывать ограничения более сильные, чем сверхразрешимость.

В настоящей работе развивается данное направление. Без использования классификации

конечных простых групп доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой, то подгруппа  $K$  разрешима.

Напомним, что вполне факторизуемой группой называют группу, в которой все подгруппы дополняемы, а  $t$ -группой – группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Структуру вполне факторизуемых групп описал Ф. Холл [9], а строение разрешимых  $t$ -групп – В. Гашуц [10]. В частности, эти группы сверхразрешимы.

Из теоремы выводится ряд следствий. Отметим, что в условие теоремы нельзя добавить еще случай, когда пересечения нильпотентны. Примером служит неразрешимая группа  $PGL(2, 7)$  с нормальной подгруппой  $PSL(2, 7)$ .

**1. Вспомогательные результаты.** Для группы  $G$  множество всех простых делителей ее порядка обозначается через  $\pi(G)$ . Запись  $H \leq G$  означает, что  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Через  $Z_n$  и  $E_n(G)$  обозначают циклическую и элементарную абелеву группы порядка  $n$ . Запись  $[A]B$  означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой  $A$ . Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы  $G$  обозначается через  $S(G)$ . Группа с нормальной силовой  $p$ -подгруппой называется  $p$ -замкнутой, а группа с нормальной  $p'$ -холловой подгруппой –  $p$ -нильпотентной. Группа, которая одновременно  $p$ -замкнута и  $p$ -нильпотентна, называется  $p$ -разложимой. Бипримарная группа – это группа, порядок которой делится в точности на два различных простых числа. Дедекиндова группа – это группа, в которой каждая подгруппа нормальна. Понятно, что абелевы группы дедекиндовы.

**Лемма 1** [11, теорема IV.5.4]. Если все собственные подгруппы группы  $G$   $p$ -нильпотентны, то группа  $G$  либо  $p$ -нильпотентна, либо является бипримарной группой.

**Лемма 2** [11, теорема IV.2.6]. Пусть  $P$  – силовая  $p$ -подгруппа группы  $G$ . Если  $N_G(P) = C_G(P)$ , то группа  $G$   $p$ -нильпотентна.

**Лемма 3** [12, следствие 7]. Если в группе  $G$  силовая 2-подгруппа дедекиндова и неабелева, то в  $G$  имеется неединичная разрешимая нормальная подгруппа.

**Лемма 4.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$  и  $p$  – простое число. Если для каждой

максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  является  $p'$ -подгруппой, то подгруппа  $K$   $p$ -замкнута.

**Доказательство.** Если простое число  $p$  не делит порядок подгруппы  $K$ , то подгруппа  $K$   $p$ -замкнута. Поэтому лемму надо доказывать в случае, когда простое число  $p$  делит порядок подгруппы  $K$ . Если  $G = K$ , то каждая максимальная подгруппа группы  $G$  не содержит  $K$  и по условию каждая максимальная подгруппа должна быть  $p'$ -подгруппой. Это возможно только тогда, когда вся группа  $G$  является  $p'$ -группой, противоречие. Поэтому  $K \neq G$ . Предположим, что подгруппа  $K$  не  $p$ -замкнута. Тогда  $N_G(P)$  – собственная в  $G$  подгруппа, где  $P$  – силовая  $p$ -подгруппа из  $K$ , и  $G = KN_G(P)$  по лемме Фраттини. Пусть  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$ , содержащая подгруппу  $N_G(P)$ . Тогда  $G = KM$ , поэтому  $M$  не содержит подгруппу  $K$ . Теперь пересечение  $K \cap M$  содержит  $N_G(P) \supseteq P$ , поэтому  $K \cap M$  не является  $p'$ -подгруппой, противоречие. Лемма доказана.

**2. Доказательство теоремы.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$  и пусть для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой. Предположим, что  $K$  – неразрешимая подгруппа и воспользуемся индукцией по числу  $|G| + |K|$ . Вначале докажем, что

(1) группа  $G \neq K$ .

Предположим, что  $G = K$ . Тогда каждая максимальная подгруппа из группы  $G$  не содержит  $K$  и по условию каждая максимальная подгруппа из группы  $G$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой. Так как вполне факторизуемые группы и разрешимые  $t$ -группы сверхразрешимы [9], [10], а сверхразрешимые группы 2-нильпотентны [1, теорема 4.51], то каждая подгруппа в группе  $G$  будет 2-нильпотентной. По лемме 1 группа  $G$  либо 2-нильпотентна, либо является бипримарной группой. Так как 2-нильпотентные и бипримарные группы разрешимы, то группа  $G$  разрешима, поэтому разрешима и  $K$ , противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с подгруппой  $K$ , и  $S(G) = 1$ .

Пусть  $L$  – нетривиальная нормальная в  $G$  подгруппа и  $X/L$  – максимальная подгруппа

фактор-группы  $G/L$ , не содержащая подгруппу  $KL/L$ . Тогда  $X$  – максимальная подгруппа группы  $G$ , подгруппа  $X$  не содержит  $K$  и по условию пересечение  $K \cap X$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой. Фактор-группа  $G/L$  содержит нормальную подгруппу  $KL/L$  и

$$(KL/L) \cap (X/L) = (KL \cap X)/L = \\ = (K \cap X)L/L \cong (K \cap X)/(K \cap X \cap L),$$

поэтому фактор-группа  $G/L$  с нормальной подгруппой  $KL/L$  удовлетворяет условию теоремы. Здесь использовался тот факт, что фактор-группы вполне факторизуемых групп и разрешимых  $t$ -групп также являются вполне факторизуемыми и разрешимыми  $t$ -группами соответственно. Так как

$$|G/L| + |KL/L| = |G/L| + |K/K \cap L| < |G| + |K|,$$

то по индукции фактор-группа

$$KL/L \cong K/(K \cap L)$$

разрешима. Если подгруппа  $L$  разрешима, то разрешимой будет и подгруппа  $K$ , противоречие. Поэтому  $L$  неразрешима и  $S(G) = 1$ .

Предположим, что в группе  $G$  существуют две минимальные нормальные подгруппы  $L_1 \neq L_2$ . Тогда фактор-группа

$$(KL_i)/L_i \cong K/(K \cap L_i)$$

разрешима, поэтому подгруппа

$$K/(K \cap L_1) \times K/(K \cap L_2)$$

разрешима. По [1, лемма 2.33] подгруппа  $K$  изоморфна подгруппе из

$$K/(K \cap L_1) \times K/(K \cap L_2),$$

поэтому  $K$  разрешима, противоречие. Значит, допущение неверно и группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу.

Далее считаем, что  $L$  – минимальная нормальная подгруппа группы. Ясно, что  $L \subseteq K$ . Предположим, что  $L \neq K$ . Пусть  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$ , не содержащая подгруппу  $L$ .

Тогда подгруппа  $M$  не содержит подгруппу  $K$  и по условию пересечение  $K \cap M$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой. Но

$$L \subseteq K, L \cap M \subseteq K \cap M,$$

значит, группа  $G$  с нормальной подгруппой  $L$  удовлетворяют условию теоремы. Поскольку

$$|G| + |L| < |G| + |K|,$$

то по индукции подгруппа  $L$  разрешима,  $1 \neq L \subseteq S(G) = 1$ , противоречие. Значит, допущение неверно и  $L = K$ .

Утверждение (2) доказано.

(3) Окончание доказательства.

В силу леммы 4 в группе  $G$  существует максимальная подгруппа  $H$ , не содержащая подгруппу  $K$ , такая, что пересечение  $K \cap H$  имеет четный порядок. Пусть  $P$  – силовская 2-подгруппа группы  $G$ . Согласно утверждению (2) и теореме Томпсона–Фейта о разрешимости групп нечетного порядка силовская 2-подгруппа  $P \cap K$  из  $K$  неединична и ненормальна в  $G$ . По лемме Фраттини

$$G = KN_G(P \cap K).$$

Пусть  $U$  – максимальная в  $G$  подгруппа, содержащая  $N_G(P \cap K)$ . Тогда  $G = KU$ , и пересечение  $K \cap U$

либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой. Так как

$$1 \neq P \cap K \subseteq N_K(P \cap K) = N_G(P \cap K) \cap K \subseteq U \cap K,$$

то пересечение  $K \cap U$  имеет четный порядок, поэтому  $K \cap U$  либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой  $t$ -группой.

Вначале пусть подгруппа  $K \cap U$  вполне факторизуема. По [9] подгруппа  $K \cap U$  сверхразрешима, в частности, 2-нильпотентна, и ее силовская 2-подгруппа элементарная абелева. Так как  $N_K(P \cap K) \subseteq U \cap K$ , то подгруппа  $N_K(P \cap K)$  является 2-разложимой и  $P \cap K$  абелева. Поэтому

$$N_K(P \cap K) = C_K(P \cap K)$$

и подгруппа  $K$  будет 2-нильпотентной по лемме 2, а значит  $K \subseteq S(G)$ . Получили противоречие с (2).

Пусть теперь подгруппа  $K \cap U$  является разрешимой  $t$ -группой. По [10] подгруппа  $K \cap U$  сверхразрешима, поэтому она опять 2-нильпотентна, и каждая подгруппа из  $K \cap U$  является  $t$ -группой. В частности, подгруппа  $N_K(P \cap K)$  будет 2-разложимой  $t$ -группой. Силовская 2-подгруппа  $P \cap K$  из  $K$  также будет  $t$ -группой, а поскольку в  $P \cap K$  все подгруппы субнормальны, то  $P \cap K$  дедекиндова. Из леммы 3 следует, что подгруппа  $P \cap K$  абелева, поэтому

$$N_K(P \cap K) = C_K(P \cap K),$$

но теперь по лемме 2 подгруппа  $K$  2-нильпотентна, что невозможно. Теорема доказана.

**3. Некоторые следствия.** Приведем некоторые следствия из теоремы, которые также являются новыми признаками разрешимости нормальной подгруппы.

Согласно [10] группа с циклическими силовскими подгруппами является разрешимой  $t$ -группой. Поэтому из теоремы получаем

**Следствие 1.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо группой с циклическими силовскими подгруппами, то подгруппа  $K$  разрешима.

Отметим, что подгруппа  $K$  может быть неразрешимой, если пересечения  $K \cap M$  нильпотентны или являются группами с циклическими силовскими подгруппами. Примером служит все та же группа  $PGL(2,7)$  с нормальной подгруппой  $PSL(2,7)$ .

В формулировке теоремы пересечения могут быть трех типов. Если убирать по одному из них, то получим три новых признака разрешимости нормальной подгруппы. Например, справедливо

**Следствие 2.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  либо является вполне факторизуемой группой, либо группой с циклическими силовскими подгруппами, то подгруппа  $K$  разрешима.

Если в формулировке теоремы убирать по два из возможных типов, то получим также новые признаки разрешимости группы.

**Следствие 3.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  имеет нечетный порядок, то подгруппа  $K$  разрешима.

**Следствие 4.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  является вполне факторизуемой группой, то подгруппа  $K$  разрешима.

**Следствие 5.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  является разрешимой  $t$ -группой, то подгруппа  $K$  разрешима.

**Следствие 6.** Пусть  $K$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если для каждой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , не содержащей подгруппу  $K$ , пересечение  $K \cap M$  является группой с циклическими силовскими подгруппами, то подгруппа  $K$  разрешима.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Поляков, Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 89–97.
3. Шеметков, Л.А. О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 533–559.
4. Монахов, В.С. О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, № 3. – С. 85–90.
5. Каморников, С.Ф. О разрешимых подгруппах конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 2. – С. 53–57.
6. Каморников, С.Ф. О влиянии максимальных подгрупп примарного индекса на строение конечной группы / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1995. – № 6. – С. 24–28.
7. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 145 с.
8. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>.
9. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12. – P. 201–204.
10. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-N. Y.: Springer-Verlag, 1967. – 793 p.
12. Glauberman, G. Central elements in core-free groups / G. Glauberman // J. Algebra. – 1966. – Vol. 4. – P. 403–420.

Поступила в редакцию 10.07.2012. Принята в печать 22.10.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: Victor.Monakhov@gmail.com – Монахов В.С.