УДК 512.542

О пересечениях нормальных подгрупп конечных групп с максимальными

В.С. Монахов, Д.А. Ходанович

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Рассматриваются только конечные группы. Вполне факторизуемой группой называют группу, в которой все подгруппы дополняемы, а t-группой – группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Доказано, что нормальная подгруппа K группы G разрешима, если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо является разрешимой t-группой. В качестве следствий получены новые признаки разрешимости нормальной подгруппы конечной группы.

Ключевые слова: *конечная группа, нормальная подгруппа, максимальная подгруппа, разрешимая группа, вполне факторизуемая группа, t-группа.*

On the intersections of normal subgroups of finite groups with maximal subgroups

V.S. Monakhov, D.A. Hodanovich

Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

Only finite groups have been considered. If all the subgroups of a group are complemented, then the group is called a completely factorizable group. If each subnormal subgroup is normal, then the group is called t-group. We've proved that each normal subgroup K of group G is solvable, if for each maximal subgroup M of group G, that does not contain subgroup K, intersection $K \cap M$ has either odd order or $K \cap M$ is a completely factorizable group, or else $K \cap M$ is a solvable t-group. We've obtained new solvability criteria of normal subgroups of finite groups.

Key words: *finite group, normal subgroup, maximal subgroup, solvable group, completely factorizable group, t-group.*

Рассматриваются только конечные группы. Терминология и обозначения соответствуют [1].

В работах Л.Я. Полякова [2], Л.А. Шеметкова [3], В.С. Монахова, М.В. Селькина и С.Ф. Каморникова [4–6] устанавливалось строение нормальной подгруппы K группы G при дополнительных ограничениях либо на индексы максимальных в G подгрупп, не содержащих K, либо на пересечения подгруппы K с максимальными подгруппами из G. В частности, в [4] установлена разрешимость нормальной в группе G подгруппы K при условии, что для каждой максимальной в G подгруппы M, не содержащей подгруппы K, пересечение $K \cap M$ нильпотентно. Эти результаты отражены в [7].

Пример. В системе компьютерной алгебры GAP [8] под номером 208 в библиотеке SmallGroups перечислены все свойства группы $PGL(2,7)$. В частности, она содержит в точности следующие с точностью до изоморфизма максимальные подгруппы: нормальную подгруппу $PSL(2,7)$; диэдральную подгруппу $[Z_3]E_4 = [Z_6]Z_2$ порядка 12; диэдральную подгруппу порядка 16; подгруппу $[[Z_7]Z_3]Z_2$. Ясно, что все максимальные подгруппы, за исключением нормальной подгруппы $PSL(2,7)$, сверхразрешимы. Пересечения нормальной подгруппы $PSL(2,7)$ с другими максимальными подгруппами из группы $PGL(2,7)$ имеют порядки 6, 8 или 21.

Этот пример указывает на то, что нормальная подгруппа K группы G может быть неразрешимой, если сверхразрешимы пересечения подгруппы K с каждой не содержащей ее максимальной подгруппой из G. Поэтому для получения разрешимости подгруппы K надо на пересечения накладывать ограничения более сильные, чем сверхразрешимость.

В настоящей работе развивается данное направление. Без использования классификации конечных простых групп доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой, то подгруппа K разрешима.*

Напомним, что вполне факторизуемой группой называют группу, в которой все подгруппы дополняемы, а t-группой – группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Структуру вполне факторизуемых групп описал Ф. Холл [9], а строение разрешимых t-групп – В. Гашюц [10]. В частности, эти группы сверхразрешимы.

Из теоремы выводится ряд следствий. Отметим, что в условие теоремы нельзя добавить еще случай, когда пересечения нильпотентны. Примером служит неразрешимая группа $PGL(2,7)$ с нормальной подгруппой $PSL(2,7)$.

1. Вспомогательные результаты. Для группы G множество всех простых делителей ее порядка обозначается через $\pi(G)$. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G. Через Z_n и $E_n(G)$ обозначают циклическую и элементарную абелеву группы порядка n. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G обозначается через $S(G)$. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой – p-нильпотентной. Группа, которая одновременно p-замкнута и p-нильпотентна, называется p-разложимой. Бипримарная группа – это группа, порядок которой делится в точности на два различных простых числа. Дедекиндова группа – это группа, в которой каждая подгруппа нормальна. Понятно, что абелевы группы дедекиндовы.

Лемма 1 [11, теорема IV.5.4]. *Если все собственные подгруппы группы G p-нильпотентны, то группа G либо p-нильпотентна, либо является бипримарной группой.*

Лемма 2 [11, теорема IV.2.6]. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Если $N_G(P) = C_G(P)$, то группа G p-нильпотентна.*

Лемма 3 [12, следствие 7]. *Если в группе G силовская 2-подгруппа дедекиндова и неабелева, то в G имеется неединичная разрешимая нормальная подгруппа.*

Лемма 4. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G и p – простое число. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ является p'-подгруппой, то подгруппа K p-замкнута.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если простое число p не делит порядок подгруппы K, то подгруппа K p-замкнута. Поэтому лемму надо доказывать в случае, когда простое число p делит порядок подгруппы K. Если $G = K$, то каждая максимальная подгруппа группы G не содержит K и по условию каждая максимальная подгруппа должна быть p'-подгруппой. Это возможно только тогда, когда вся группа G является p'-группой, противоречие. Поэтому $K \neq G$. Предположим, что подгруппа K не p-замкнута. Тогда $N_G(P)$ – собственная в G подгруппа, где P – силовская p-подгруппа из K, и $G = KN_G(P)$ по лемме Фраттини. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Тогда $G = KM$, поэтому M не содержит подгруппу K. Теперь пересечение $K \cap M$ содержит $N_G(P) \supseteq P$, поэтому $K \cap M$ не является p'-подгруппой, противоречие. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы. Пусть K – нормальная подгруппа группы G и пусть для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Предположим, что K – неразрешимая подгруппа и воспользуемся индукцией по числу $|G| + |K|$. Вначале докажем, что

(1) группа $G \neq K$.

Предположим, что $G = K$. Тогда каждая максимальная подгруппа из группы G не содержит K и по условию каждая максимальная подгруппа из группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Так как вполне факторизуемые группы и разрешимые t-группы сверхразрешимы [9], [10], а сверхразрешимые группы 2-нильпотентны [1, теорема 4.51], то каждая подгруппа в группе G будет 2-нильпотентной. По лемме 1 группа G либо 2-нильпотентна, либо является бипримарной группой. Так как 2-нильпотентные и бипримарные группы разрешимы, то группа G разрешима, поэтому разрешима и K, противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с подгруппой K, и $S(G) = 1$.

Пусть L – нетривиальная нормальная в G подгруппа и X/L – максимальная подгруппа фактор-группы G/L, не содержащая подгруппу KL/L. Тогда X – максимальная подгруппа группы G, подгруппа X не содержит K и по условию пересечение $K \cap X$ либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Фактор-группа G/L содержит нормальную подгруппу KL/L и

$$(KL/L) \cap (X/L) = (KL \cap X)/L =$$
$$= (K \cap X)L/L \cong (K \cap X)/(K \cap X \cap L),$$

поэтому фактор-группа G/L с нормальной подгруппой KL/L удовлетворяет условию теоремы. Здесь использовался тот факт, что фактор-группы вполне факторизуемых групп и разрешимых t-групп также являются вполне факторизуемыми и разрешимыми t-группами соответственно. Так как

$$|G/L| + |KL/L| = |G/L| + |K/K{\cap}L| < |G| + |K|,$$

то по индукции фактор-группа

$$KL/L \cong K/(K{\cap}L)$$

разрешима. Если подгруппа L разрешима, то разрешимой будет и подгруппа K, противоречие. Поэтому L неразрешима и $S(G) = 1$.

Предположим, что в группе G существуют две минимальные нормальные подгруппы $L_1 \neq L_2$. Тогда фактор-группа

$$(KL_i)/L_i \cong K/(K{\cap}L_i)$$

разрешима, поэтому подгруппа

$$K/(K{\cap}L_1) \times K/(K{\cap}L_2)$$

разрешима. По [1, лемма 2.33] подгруппа K изоморфна подгруппе из

$$K/(K{\cap}L_1) \times K/(K{\cap}L_2),$$

поэтому K разрешима, противоречие. Значит, допущение неверно и группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу.

Далее считаем, что L – минимальная нормальная подгруппа группы. Ясно, что $L \subseteq K$. Предположим, что $L \neq K$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая подгруппу L.

Тогда подгруппа M не содержит подгруппу K и по условию пересечение $K \cap M$ либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Но

$$L \subseteq K,\ \ L \cap M \subseteq K \cap M,$$

значит, группа G с нормальной подгруппой L удовлетворяют условию теоремы. Поскольку

$$|G| + |L| < |G| + |K|,$$

то по индукции подгруппа L разрешима, $1 \neq L \subseteq S(G) = 1$, противоречие. Значит, допущение неверно и $L = K$.

Утверждение (2) доказано.

(3) О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а.

В силу леммы 4 в группе G существует максимальная подгруппа H, не содержащая подгруппу K, такая, что пересечение $K \cap H$ имеет четный порядок. Пусть P – силовская 2-подгруппа группы G. Согласно утверждению (2) и теореме Томпсона–Фейта о разрешимости групп нечетного порядка силовская 2-подгруппа $P \cap K$ из K неединична и ненормальна в G. По лемме Фраттини

$$G = KN_G(P \cap K).$$

Пусть U – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(P{\cap}K)$. Тогда $G = KU$, и пересечение $K \cap U$
либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой. Так как

$$1 \neq P{\cap}K \subseteq N_K(P{\cap}K) = N_G(P{\cap}K){\cap}K \subseteq U{\cap}K,$$

то пересечение $K \cap U$ имеет четный порядок, поэтому $K \cap U$ либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t-группой.

Вначале пусть подгруппа $K \cap U$ вполне факторизуема. По [9] подгруппа $K \cap U$ сверхразрешима, в частности, 2-нильпотентна, и ее силовская 2-подгруппа элементарная абелева. Так как $N_K(P{\cap}K) \subseteq U{\cap}K$, то подгруппа $N_K(P{\cap}K)$ является 2-разложимой и $P \cap K$ абелева. Поэтому

$$N_K(P{\cap}K) = C_K(P{\cap}K)$$

и подгруппа K будет 2-нильпотентной по лемме 2, а значит $K \subseteq S(G)$. Получили противоречие с (2).

Пусть теперь подгруппа $K \cap U$ является разрешимой t-группой. По [10] подгруппа $K \cap U$ сверхразрешима, поэтому она опять 2-нильпотентна, и каждая подгруппа из $K \cap U$ является t-группой. В частности, подгруппа $N_K(P{\cap}K)$ будет 2-разложимой t-группой. Силовская 2-подгруппа $P \cap K$ из K также будет t-группой, а поскольку в $P \cap K$ все подгруппы субнормальны, то $P \cap K$ дедекиндова. Из леммы 3 следует, что подгруппа $P \cap K$ абелева, поэтому

$$N_K(P \cap K) = C_K(P \cap K),$$

но теперь по лемме 2 подгруппа K 2-нильпотентна, что невозможно. Теорема доказана.

3. Некоторые следствия. Приведем некоторые следствия из теоремы, которые также являются новыми признаками разрешимости нормальной подгруппы.

Согласно [10] группа с циклическими силовскими подгруппами является разрешимой t-группой. Поэтому из теоремы получаем

Следствие 1. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо группой с циклическими силовскими подгруппами, то подгруппа K разрешима.*

Отметим, что подгруппа K может быть неразрешимой, если пересечения $K \cap M$ нильпотентны или являются группами с циклическими силовскими подгруппами. Примером служит все та же группа $PGL(2,7)$ с нормальной подгруппой $PSL(2,7)$.

В формулировке теоремы пересечения могут быть трех типов. Если убирать по одному из них, то получим три новых признака разрешимости нормальной подгруппы. Например, справедливо

Следствие 2. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ либо является вполне факторизуемой группой, либо группой с циклическими силовскими подгруппами, то подгруппа K разрешима.*

Если в формулировке теоремы убирать по два из возможных типов, то получим также новые признаки разрешимости группы.

Следствие 3. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ имеет нечетный порядок, то подгруппа K разрешима.*

Следствие 4. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ является вполне факторизуемой группой, то подгруппа K разрешима.*

Следствие 5. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ является разрешимой t-группой, то подгруппа K разрешима.*

Следствие 6. *Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей подгруппу K, пересечение $K \cap M$ является группой с циклическими силовскими подгруппами, то подгруппа K разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Поляков, Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 89–97.
3. Шеметков, Л.А. О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 533–559.
4. Монахов, В.С. О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51, № 3. – С. 85–90.
5. Каморников, С.Ф. О разрешимых подгруппах конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 2. – С. 53–57.
6. Каморников, С.Ф. О влиянии максимальных подгрупп примарного индекса на строение конечной группы / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1995. – № 6. – С. 24–28.
7. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 145 с.
8. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: http://www.gap–system.org.
9. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12. – P. 201–204.
10. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer–Verlag, 1967. – 793 p.
12. Glauberman, G. Central elements in core-free groups / G. Glauberman // J. Algebra. – 1966. – Vol. 4. – P. 403–420.

Поступила в редакцию 10.07.2012. Принята в печать 22.10.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: Victor.Monakhov@gmail.com – Монахов В.С.