УДК 512.542

О холловски замкнутых произведениях классов Фиттинга

В.В. Шпаков

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений, называют классом Фиттинга. Наибольшую нормальную подгруппу группы G, принадлежащую классу Фиттинга $\mathfrak{F}$, называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G. Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – класс всех тех групп G, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется замкнутым относительно холловых π-подгрупп, если для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ ее холлова π-подгруппа также принадлежит $\mathfrak{F}$. Доказано, что произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ замкнуто относительно холловых π-подгрупп тогда и только тогда, когда класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ содержит все π-группы.

Ключевые слова: *класс Фиттинга, холлова π-подгруппа, произведение классов Фиттинга.*

On Hall closed products of Fitting classes

V.V. Shpakov

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

A group class which is closed relating to normal subgroups and their products is called Fitting class. Biggest normal subgroup of G group, which belongs to Fitting $\mathfrak{F}$ class is called F-radical of G group. The product of F and $\mathfrak{H}$ Fitting classes is the class of all those G groups, factor-groups on $\mathfrak{F}$-radical of which are $\mathfrak{H}$-subgroups. Fitting $\mathfrak{F}$ class is called closed relating to Hall π-subgroups, if for any $G\in\mathfrak{F}$ group its Hall π-subgroup also belongs to $\mathfrak{F}$. The product of Fitting $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ classes is called the class of all those G groups, factor-groups on $\mathfrak{F}$-radical of which are $\mathfrak{H}$-subgroups. It is proved that the product of $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ Fitting classes is closed relating to Hall π-subgroups only when $\mathfrak{H}$ Fitting class contains all π-groups.

Key words: *Fitting class, Hall π-subgroup, product of Fitting classes.*

Ряд исследований канонических подгрупп конечных разрешимых групп связан с изучением классов конечных групп, определяемых заданными свойствами подгрупп Холла.

В этом направлении особый интерес представляют классы Фиттинга, замкнутые относительно холловых подгрупп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют замкнутым относительно холловых π-подгрупп, если для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ ее холлова π-подгруппа также принадлежит $\mathfrak{F}$. Основополагающий результат, связанный с классами, замкнутыми относительно холловых π-подгрупп, был получен Брайсом и Косси [1] в теории нормальных классов Фиттинга. Установлено, что минимальный нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$ является замкнутым относительно холловых π-подгрупп для любого множества простых чисел $\pi\subseteq\mathbb{P}$.

В последующем Локетт [2] определяет и описывает строение инъекторов групп для класса $L_\pi(\mathfrak{X})$ всех групп, $\mathfrak{X}$-инъекторы которых содержат некоторую холлову π-подгруппу этих групп. Заметим также, что в теории формаций хорошо известна своими приложениями для изучения свойств подгрупп Холла конструкция класса $K^\pi(\mathfrak{X})$ всех тех групп, холлова π-подгруппа которых принадлежит локальной формации $\mathfrak{X}$. Дуальная конструкция в этом направлении исследований – класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ (определенный впервые Хауком [3]), состоящий из всех групп, холловы π-подгруппы которых содержатся в классе Фиттинга $\mathfrak{F}$. В дальнейшем класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ нашел широкое применение в решении ряда задач теории конечных разрешимых групп. В частности, Бризон [4] посредством класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ описал $\mathfrak{F}$-радикалы холловых подгрупп, а Кусак [5], используя решеточные объединения и класс $K_\pi(\mathfrak{F})$, определил для нормальных классов Фиттинга критерий замкнутости относительно холловых π-подгрупп.

Отметим, что в вопросах классификации и изучения структурных свойств классов Фиттинга во многих принципиальных случаях основным инструментом являются произведения классов групп, которые определяются с помощью корадикалов и радикалов. Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех групп, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами. Изучению свойств произведений формаций посвящена работа Гашюца [6].

Среди произведений классов Фиттинга известны своими приложениями холловски замкнутые, то есть такие произведения, которые являются замкнутыми относительно подгрупп Холла. В 1981 году Бризоном [7] было получено описание холловски замкнутых произведений в разрешимом случае. Вместе с тем, известная теорема С.А. Чунихина [8] о существовании и сопряженности холловых π-подгрупп в любой π-разрешимой группе с необходимостью приводит к задаче описания π-разрешимых классов Фиттинга, замкнутых относительно подгрупп Холла.

В связи с этим целью настоящей работы является определение критерия холловской замкнутости произведения классов Фиттинга π-разрешимых групп. Рассматриваются только конечные π-разрешимые группы.

В определениях и обозначениях мы следуем [9].

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Тогда [9]

$$S_n\mathfrak{X}=(G:G\triangleleft\triangleleft H \text{ для некоторой } H\in\mathfrak{X}),$$

$$R_0\mathfrak{X}=(G:N_i\trianglelefteq\trianglelefteq G\ (i=1,\dots,r), G/N_i\in\mathfrak{X} \text{ и } \cap_i^r N_i=1).$$

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга [9], если $\mathfrak{F}=S_n\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}=N_0\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G [9], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Произведением классов Фиттинга [9] $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех тех групп G, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами. Хорошо известно, что произведение двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. например IX.1.12 [9]).

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется холловой π-подгруппой, если порядок H является π-числом, а индекс H в G – π'-числом. Обозначим через $Hall_\pi(G)$ множество всех холловых π-подгрупп группы G. Мы будем использовать следующие известные свойства холловых π-подгрупп.

Лемма 1 [9]. *Пусть $G_\pi\in Hall_\pi(G)$, M и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_\pi\cap N\in Hall_\pi(N)$;

2) $G_\pi\cap MN=(G_\pi\cap M)(G_\pi\cap N)\in Hall_\pi(MN)$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют замкнутым относительно холловых π-подгрупп, если для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ ее холлова π-подгруппа также принадлежит $\mathfrak{F}$.

Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [10] определил класс $\mathfrak{F}^*$ как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$.

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то класс $\mathfrak{Z}_\pi$ [11] определяется следующим образом:

$$\mathfrak{Z}_\pi=(G\in\mathfrak{S}^\pi: \pi\text{-}Soc(G)\subseteq Z(G)).$$

Ввиду результата 2.1 [11] класс $\mathfrak{Z}_\pi$ является классом Фиттинга.

Лемма 2 [9]. *Если* A *– группа операторов группы* $G\in\mathfrak{F}^*$, *то* $[G,A]\subseteq G_\mathfrak{F}$. *В частности,* $G/G_\mathfrak{F}$ *– абелева.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Обозначим через $K_\pi(\mathfrak{F})$ класс всех групп из класса $\mathfrak{S}^\pi$ всех конечных π-разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}=\varnothing$, то положим $K_\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$. В случае, когда $\pi=\varnothing$ и $\pi=P$, положим $K_\varnothing(\mathfrak{F})=\mathfrak{S}^\pi$ и $K_P(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$ соответственно.

В данном разделе описывается критерий холловской замкнутости произведения двух классов Фиттинга.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда $K_\pi(\mathfrak{F})$ – класс Фиттинга, для любого $\pi\subseteq P$.*

Доказательство. Пусть $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$ и $N\triangleleft G$. Тогда по определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ имеем $G_\pi\in\mathfrak{F}$. По утверждению 1) леммы 1 холлова π-подгруппа N_π группы N определяется как $N_\pi=G_\pi\cap N$. Причем $N_\pi\triangleleft G_\pi$. Но $G_\pi\in\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Значит, $N_\pi\in\mathfrak{F}$ и $N\in K_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $N_1,N_2\triangleleft G$ и $N_1,N_2\in K_\pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $N_1N_2\in K_\pi(\mathfrak{F})$. Так как $N_1,N_2\in K_\pi(\mathfrak{F})$, то по определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ получаем $(N_1)_\pi,(N_2)_\pi\in\mathfrak{F}$. По утверждению 2) леммы 1

$$(N_1N_2)_\pi=G_\pi\cap N_1N_2=(G_\pi\cap N_1)(G_\pi\cap N_2)=(N_1)_\pi(N_2)_\pi.$$

Так как $(N_1)_\pi,(N_2)_\pi$ – нормальные подгруппы группы $(N_1N_2)_\pi$ и $(N_1)_\pi,(N_2)_\pi\in\mathfrak{F}$, то по определению класса Фиттинга $(N_1N_2)_\pi\in\mathfrak{F}$. Следовательно, $N_1N_2\in K_\pi(\mathfrak{F})$. Это означает, что $K_\pi(\mathfrak{F})$ – класс Фиттинга. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* π *– множество простых чисел. Тогда* $K_\pi(\mathfrak{F})=K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $K_\pi(\mathfrak{F})\subseteq K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$ вытекает непосредственно из свойств произведения классов Фиттинга. Пусть теперь $G\in K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $G_\pi\in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. По определению произведения классов Фиттинга это означает, что $G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{E}_{\pi'}$. Ввиду того, что класс групп $\mathfrak{E}_{\pi'}$ замкнут относительно подгрупп, имеем, что подгруппа

$$G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{E}_{\pi'}.$$

С другой стороны, $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ – холлова π-подгруппа группы $G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ и

$$G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{S}_\pi.$$

Значит,

$$G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\cong G_\pi/G_\pi\cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\in\mathfrak{S}_\pi\cap\mathfrak{E}_{\pi'}=(1).$$

Следовательно, $G_\pi=G_\pi\cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ и $G_\pi\subseteq G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. По определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ имеем $(G_{K_\pi(\mathfrak{F})})_\pi\in\mathfrak{F}$. С учетом того, что $(G_{K_\pi(\mathfrak{F})})_\pi=G_\pi$, получаем $G_\pi\in\mathfrak{F}$ и $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$. Итак, справедливо равенство $K_\pi(\mathfrak{F})=K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\pi'}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\pi\subseteq\mathbb{P}$ *и* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга, и класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *замкнут относительно холловых* π*-подгрупп. Тогда если* $\mathfrak{S}_\pi\subseteq\mathfrak{F}^*$, *то произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *замкнуто относительно холловых* π*-подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и $H\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп, то $H\cap G_\mathfrak{F}\subseteq(G_\pi)_\mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{S}_\pi\subseteq\mathfrak{F}^*$. Следовательно, $H\in\mathfrak{F}^*$. Тогда по лемме 2 $H'\subseteq H_\mathfrak{F}$. Заметим, что $H/H\cap H_\mathfrak{F}\cong HH_\mathfrak{F}/H_\mathfrak{F}$ и $H/H_\mathfrak{F}\in\pi(\mathfrak{H})$. Ввиду того, что $H/H_\mathfrak{F}$ – абелева группа и IX.1.9 [9, с. 566], получим, что $H/H_\mathfrak{F}\in\mathfrak{H}$. Следовательно, $H\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Непосредственной проверкой легко установить, что справедлива

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга,* $\pi,\sigma\in\mathbb{P}$. *Тогда* $K_\pi(K_\sigma(\mathfrak{F}))=K_{\pi\cap\sigma}(\mathfrak{F})$.

Действия оператора $K_\pi(\mathfrak{F})$ на произведение классов Фиттинга описывает

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга и* π *– некоторое множество простых чисел. Тогда*

$$K_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})=K_\pi(\mathfrak{F})K_\pi(\mathfrak{H}).$$

Лемма 8. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *замкнут относительно холловых* π*-подгрупп тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}\subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$ *для всех* $\pi\subseteq\mathbb{P}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп и $G\in\mathfrak{F}$. Тогда $G_\pi\in\mathfrak{F}$, где $G_\pi\in\mathrm{Hall}_\pi(G)$. По определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ это означает, что $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$. То есть $\mathfrak{F}\subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть теперь имеет место включение $\mathfrak{F}\subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$ и $G\in\mathfrak{F}$. Тогда $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$. По определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ это означает, что $G_\pi\in\mathfrak{F}$. Следовательно, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп. Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга, причем* $\mathfrak{H}$ *замкнут относительно холловых* π*-подгрупп, и* $\pi,\sigma\in\mathbb{P}$. *Тогда произведение классов Фиттинга* $K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{H}$ *замкнуто относительно холловых* π*-подгрупп в каждом из следующих случаев:*

1) $\sigma\subseteq\pi$;

2) $\mathfrak{S}^\pi{}_{\sigma\setminus\{p\}}\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}^\pi{}_\sigma$ *для любого* $p\in\sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду лемм 5 и 6 получим

$$K_\pi(K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{H})=K_{\pi\cap\sigma}(\mathfrak{F})K_\pi(\mathfrak{H}).$$

Предположим, что $\sigma\subseteq\pi$. Тогда $\sigma=\pi\cap\sigma$. С учетом леммы 7 получим

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{H}\subseteq K_{\sigma\cap\pi}(\mathfrak{F})K_\pi(\mathfrak{H})=K_\pi(K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{H}).$$

Следовательно, по лемме 4 класс Фиттинга замкнут относительно холловых π-подгрупп.

Пусть теперь $\sigma\not\subseteq\pi$ и $\mathfrak{S}^\pi{}_{\sigma\setminus\{p\}}\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}^\pi{}_\sigma$ для каждого $p\in\sigma$. Тогда $\pi\cap\sigma\subseteq\sigma\setminus\{p\}$ для каждого $p\in\sigma$. Следовательно, $\mathfrak{S}^\pi{}_{\pi\cap\sigma}\subseteq\mathfrak{F}$. Значит,

$$\mathfrak{S}^\pi=K_{\pi\cap\sigma}(\mathfrak{S}^\pi{}_{\pi\cap\sigma})\subseteq K_{\pi\cap\sigma}(\mathfrak{F}).$$

Следовательно,

$$K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{S}=K_\pi(K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{H}).$$

По лемме 4 это означает, что класс Фиттинга $K_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{H}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть* π *– некоторое множество простых чисел, причем* $|\pi|>2$ *и* $\pi\neq\mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$,$\mathfrak{H}$ *–* π*-разрешимые классы Фиттинга. Произведение классов Фиттинга* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *замкнуто относительно холловых* π*-подгрупп тогда и только тогда, когда класс Фиттинга* $\mathfrak{H}$ замкнут относительно *π-групп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале покажем, что если класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ замкнут относительно π-групп, тогда произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ замкнуто относительно холловых π-подгрупп, для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть $G\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и G_π – холлова π-подгруппа группы G. Тогда фактор-группа группы G_π по $\mathfrak{F}$-радикалу группы G_π является π-группой. Следовательно, $G_\pi/(G_\pi)_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{H}$-группой. Значит, по определению произведения классов Фиттинга $G_\pi\in\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Таким образом, произведение классов Фиттинга замкнуто относительно холловых π-подгрупп.

Предположим теперь, что если класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ не является замкнутым относительно π-групп. Покажем, что существует класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ такой, что произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ не является замкнутым относительно холловых π-подгрупп. Пусть S – группа минимального порядка из всех π-подгрупп, не принадлежащих классу Фиттинга $\mathfrak{H}$. Обозначим через H группу, порожденную произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы S. Тогда H представляет собой произведение элементарных максимальных p-подгрупп. Следовательно, порядок H равен $p_1^{n1}...p_k^{nk}$, где $p_i\in\pi$. Для каждого $i\in1...k$ выберем $q_i\in\pi$, причем $p_i\neq q_i$. Это возможно, так как $|\pi|>2$. При этом для каждого i будет существовать группа R_i, обладающая главным рядом длины 4. При этом каждый фактор этого ряда будет p_i-группой, а порядок факторгруппы F_0/F_1 – p_i-числом, порядок факторгруппы F_1/F_2 – q_i^k-числом и порядок факторгруппы F_0/F_1 – r_i^m-числом, где r_i – некоторое число из множества π'. Существование такой группы следует из теоремы 2 [11, с. 310] и следствия 2.8 [12].

Тогда цоколь группы R_i будет являться r_i-группой. Следовательно, из того, что r_i является π'-числом, следует, что группа R_i есть $\mathfrak{Z}_\pi$-группа. Пусть H_i – холлова π-подгруппа группы R_i. Тогда цоколь группы H_i не принадлежит $Z(H_i)$ и является q_i-группой. Следовательно, $H_i\notin\mathfrak{Z}_\pi$. Значит, $M_i/M_i'\cong C_{p_i}$. Пусть группа G есть прямое произведение групп R_i. Тогда $G/G'\cong H$. Пусть G_π – холлова π-подгруппа группы G. Значит $G_\pi\cap G'\in\mathfrak{Z}_\pi$.

Так как группа $G^{|S/H|}$ является базой сплетения $G\wr(S/H)$, следовательно

$$(G\wr(S/H))/(G^{|S/H|})'\cong(G/G')\wr(S/H)\cong S\wr(S/H).$$

Зададим отображение f следующим образом: $f{:}T\rightarrow(G\wr(S/H))/(G^{|S/H|})'$ и $(G\wr(S/H))/(G^{|S/H|})'= (G^{|S/H|})(S/H)/(G^{|S/H|})'$, такое отображение существует ввиду I.15.9 [11, с. 99]. Следовательно, образ группы H является подгруппой группы $(G^{|S/H|})/(G^{|S/H|})'$.

Пусть L прообраз $G\wr(S/H)$ в $(G\wr(S/H))f$. Тогда $(G^{|S/H|})'$ является нормальной подгруппой группы L и $L/(G^{|S/H|})'\cong S$. Если L_π – холлова π-подгруппа группы L, тогда L_π является прообразом холловой π-подгруппы $G^{|S/H|}$. Значит, $(G^{|S/H|})_\pi(S/H)$ является холловой π-подгруппой группы $G\wr(S/H)$. Так как $(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))/(G^{|S/H|})$ является π-группа. Тогда холлова π-подгруппа $L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))$ сопряжена с $(G^{|S/H|})_\pi$. Значит, $L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))$ является холловой π-подгруппой группы L. Следовательно, $(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))\cap(G^{|S/H|})= = (L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))\cap((G^{|S/H|})_\pi$. Значит, группа $((G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})')$ является подгруппой группы $L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))$. Получаем

$$(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'=(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))\cap(G^{|S/H|})\cap$$
$$\cap\,(G^{|S/H|})_\pi=(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))\cap(G^{|S/H|})'.$$

Тогда $L=(G^{|S/H|})')(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))$. Значит, $(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))/(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'\cong L/(G^{|S/H|})'\cong S\in\mathfrak{H}$. Кроме того, цоколь факторгруппы $L/(G^{|S/H|})'$ является подгруппой факторгруппы $L\cap((G^{|S/H|})/(G^{|S/H|})')$.

Следовательно, цоколь факторгруппы $(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))/((G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})')$ является подгруппой факторгруппы $(L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))\cap$ $\cap\,((G^{|S/H|})_\pi/((G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'))$.

Так как $\mathfrak{Z}_\pi*$ – класс Локетта, то группа $(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'$ является $\mathfrak{Z}_\pi$-радикалом группы $(G^{|S/H|})_\pi$. Следовательно, группа $(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'$ является подгруппой $\mathfrak{Z}_\pi*$-радикала группы $L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))$. Тогда

$$((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi}*}/((G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})')\cap$$
$$\cap\,\mathrm{Soc}((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H)))/((G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'))\neq1.$$

Так как $(G^{|S/H|})_\pi/((G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})')$ – абелева группа, то $(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'$ является подгруппой группы $((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi*}}\cap(G^{|S/H|})_\pi\trianglelefteq(G^{|S/H|})_\pi$. Следовательно,

$$((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi*}}\cap(G^{|S/H|})_\pi\trianglelefteq$$
$$\trianglelefteq((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi*}}.$$

Значит,

$$((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi*}}\cap(G^{|S/H|})_\pi\subseteq((G^{|S/H|})_\pi)_{\mathfrak{Z}_{\pi}*}.$$

Отсюда получаем противоречие с тем, что $(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})'=((G^{|S/H|})_\pi)_{\mathfrak{Z}_{\pi}*}$. Следовательно, будет иметь место равенство

$$((L\cap((G^{|S/H|})_\pi(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi*}}=(G^{|S/H|})_\pi\cap(G^{|S/H|})')\in\mathfrak{Z}_\pi.$$

Таким образом, группа $((L\cap((G^{|S/H|})_{\pi}(S/H))))_{\mathfrak{Z}_{\pi^*}}$ не принадлежит произведению классов Фиттинга $\mathfrak{Z}_{\pi}\mathfrak{H}$.

Пусть $(G^{|S/H|})\cap L\trianglelefteq<(G^{|S/H|}),L>$. Ввиду того, что подгруппа $G^{|S/H|}$ нормальна в группе $G\wr(S/H)$, $(G^{|S/H|})'\subseteq(G^{|S/H|})\cap L$ и $(G^{|S/H|})/(G^{|S/H|})'$ – абелева, получим, что группа $<(G^{|S/H|}),L>$ совпадает с группой $G\wr(S/H)$. Отсюда следует, что группа $G^{|S/H|}$ является $\mathfrak{Z}_{\pi}$-группой. Значит, $(G^{|S/H|})\cap L$ совпадает с $\mathfrak{Z}_{\pi}$-радикалом группы L. С учетом того, что $(G^{|S/H|})\cap(L/(G^{|S/H|})')\neq1$, группа $(G^{|S/H|})'$ является подгруппой $\mathfrak{Z}_{\pi}$-радикала группы L. Значит, $L/((G^{|S/H|})')\cong S$. Так как S – группа минимального порядка из всех π-подгрупп, не принадлежащих классу Фиттинга $\mathfrak{H}$, то $L/L_{\mathfrak{Z}_{\pi}}\in\mathfrak{H}$ и $L\in\mathfrak{Z}_{\pi}\mathfrak{H}$. Получаем, что $L\in\mathfrak{Z}_{\pi}\mathfrak{H}$, а $L_{\pi}\notin\mathfrak{Z}_{\pi}\mathfrak{H}$. Таким образом, класс Фиттинга не является замкнутым относительно холловых π-подгрупп. Теорема доказана.

Пример 11. Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{Z}_{P}$ не замкнут относительно холловых π-подгрупп. Пусть $G=SL(2,3)$ и $S=Z(G)$. Тогда $S=Soc(G)$ и $|S|=2$. Рассмотрим регулярное сплетение группы G и циклической группы порядка 5. Пусть $W=G\wr Z_5$. Заметим, что $W=[G^*]T$, где G^* – база сплетения. Тогда $S^*=Z(G^*)$ и $|S^*|=2^5$. Получим, что $[S^*,Z_5]\trianglelefteq W$ и $|[S^*,Z_5]|=2^4$. Обозначим $W'=W/[S^*,Z_5]$ и $K^*=S/[S^*,Z_5]$. Тогда $Y^*=Z(W')$. В частности, $W'\in\mathfrak{Z}_{P}$. Однако W' содержит холлову$\{3,5\}$-подгруппу H порядка $3^5 5$, причем $H\cong Z_3\wr Z_5$. Заметим, что в группе $Z_3\wr Z_5$ содержатся две минимальные подгруппы: подгруппа порядка 3, принадлежащая центру группы, и подгруппа порядка 3^4, не принадлежащая центру. Отсюда следует, что $H\notin\mathfrak{Z}_{P}$ и $\mathfrak{Z}_{P}$ не замкнут относительно холловых π-подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bryce, R. A problem in theory of normal Fitting classes / R. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141, № 2. – S. 99–110.
2. Lockett, P. Fitting class F* / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
3. Hauck, P. Dissertation / P. Hauck. – Mainz: Johannes Gutenberg-Universitat, 1977.
4. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison // Bull. Austr. Math. Soc. – 1981. – Vol. 3. – № 3. – P. 361–365.
5. Cusack, E. Normal Fitting classes and Hall Subgroups / E. Cusack // Bull. Austral. Math. Soc. – 1980. – Vol. 21, № 2. – P. 229–236.
6. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.
7. Brison, O. Hall-closure and products of Fitting classes / O. Brison // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1982. – Vol. 32. – P. 145–164.
8. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.
9. Doerk, K. Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
10. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131. – № 3. – P. 103–115.
11. Воробьев, Н.Т. Вложение локальных экранов / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30, № 2. – С. 305–311.
12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – C. 150.

Поступила в редакцию 23.01.2012. Принята в печать 16.04. 2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: scon@yandex.ru – Шпаков В.В.