УДК 512.542

Конечные группы с перестановочными n-максимальными подгруппами и p-нильпотентными подгруппами Шмидта

В.Н. Князина

Государственное учреждение образования «Гомельский инженерный институт» МЧС Республики Беларусь

В работе рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгрупп в каждой конечной ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами конечных групп. Зафиксируем натуральное число n>1. Подгруппа H_n группы G называется n-максимальной подгруппой в G, если существует (n-1)-максимальная подгруппа H_{n-1} в группе G такая, что H_n содержится в H_{n-1} в качестве максимальной подгруппы. В работе изучаются конечные разрешимые группы, в которых n-максимальные подгруппы для фиксированного $n \in \{1,2,3\}$ перестановочны с p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта. Доказывается, что у таких групп факторгруппа по подгруппе Фиттинга p-замкнута. Приведены примеры, показывающие, что для n>3 утверждение теоремы может не выполняться и условие разрешимости группы отбросить нельзя ни при каком нечетном p.

***Ключевые слова**: конечная группа, n-максимальная подгруппа, подгруппа Шмидта.*

Finite groups whose n-maximal subgroups are permutable with p-nilpotent Schmidt subgroups

V.N. Kniahina

Educational establishment «Gomel Engineering Institute» of the Ministry of Emergencies of the Republic of Belarus

The article considers only finite groups. A Schmidt group is a finite non nilpotent group, all subgroups of which are nilpotent. Since Schmidt groups are present as subgroups in every finite non nilpotent group, they are universal subgroups of finite groups. Let's fix natural number n>1. Subgroup H_n of G group is called n-maximal subgroup in G if there is (n-1)-maximal subgroup H_{n-1} in G group in which Hn is in H_{n-1} as a maximal subgroup. The article studies finite soluble groups in which n-maximal subgroups for fixed $n \in \{1,2,3\}$ are interchangeable with p-nilpotent pd-Schmidt subgroups. It is proved that such groups have factor-group on Fitting subgroup which is p-locked. Examples are presented to illustrate that for n>3 the statement of the theorem can not be true and the condition of the solution of the group can't be rejected at any odd p.

***Key words:** finite group, n-maximal subgroup, Schmidt subgroup.*

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой, если существует максимальная подгруппа M в группе G такая, что H содержится в M в качестве максимальной подгруппы. Аналогично определяется 3-максимальная подгруппа и т.д. В общем случае для натурального числа $n>1$ подгруппа H_n группы G называется n-максимальной подгруппой в G, если существует $(n-1)$-максимальная подгруппа H_{n-1} в группе G такая, что H_n содержится в H_{n-1} в качестве максимальной подгруппы.

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучению таких групп положила работа О.Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т.е. ее порядок делится на два различных числа), одна из силовских подгрупп нормальная, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп имеется в [2].

Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгрупп в каждой конечной ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами конечных групп. Естественно поэтому, что свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Группы с ограничениями на некоторые подгруппы Шмидта исследовались в работах [3]–[8]. В частности, в [7] изучены группы, у которых некоторые подгруппы Шмидта перестановочны с отдельными фиксированными силовскими подгруппами, а в [8] – с максимальными подгруппами.

В настоящей статье исследуются группы, у которых n-максимальные подгруппы, $n\in\{1,2,3\}$, перестановочны с p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта. Напомним, что p-нильпотентной называется группа G, которая содержит нормальную подгруппу K такую, что $G = KP$ и $K\cap P = 1$, где P – силовская p-подгруппа группы G. Если порядок подгруппы X делится на простое число p, то говорят, что X – pd-подгруппа.

Зафиксируем простое число p и натуральное число $n\in\{1,2,3\}$. В работе доказано, что если в разрешимой группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с каждой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта, то G/F(G) p-замкнута.

Условие разрешимости группы отбросить нельзя ни при каком нечетном p, поскольку для каждого $p\geq 3$ существует простая неабелева группа, в которой нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта. Для $p = 3$ это группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n\geq 3$, а для $p\geq 5$ – группа $PSL(2, p)$.

В симметрической группе S_4 степени 4 каждая 4-максимальная подгруппа единична, поэтому перестановочна с каждой 3-нильпотентной $3d$-подгруппой Шмидта, но $S_4/F(S_4)\cong S_3$ не 3-замкнута.

Необходимые обозначения и вспомогательные леммы. Будем придерживаться обозначений и определений, принятых в [9–10]. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Через $\Phi(G)$ обозначается подгруппа Фраттини группы G, а $S(G)$ – наибольшая разрешимая нормальная подгруппы группы G. Через $l_p(G)$ обозначается p-длина p-разрешимой группы G.

Лемма 1. *Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $S = [P]\langle y\rangle$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, $\langle y\rangle$ – ненормальная силовская q-подгруппа, p и q – различные простые числа;

(2) $y^q\in Z(S)$;

(3) $|P/P'| = p^m$, где m – показатель числа p по модулю q;

(4) если подгруппа P абелева, то P – элементарная абелева порядка p^m, где m – показатель числа p по модулю q;

(5) если подгруппа P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$ и $|P/Z(P)| = p^m$;

(6) группа имеет точно два класса сопряженных максимальных подгрупп:

$$\{P\times\langle y^q\rangle\},\ \{\Phi(P)\times\langle x^{-1}yx\rangle \mid x\in P\backslash\Phi(P)\};$$

(7) если N – собственная нормальная подгруппа из S, то факторгруппа S/N либо группа Шмидта, либо циклическая q-группа.

Условимся называть $S_{\langle p,q\rangle}$-группой $\{p,q\}$-группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой. Если X и Y – подгруппы группы G, то $X^Y = \langle X^y \mid y\in Y\rangle$. Если H и K – подгруппы группы G и $G=HK$, то H называют добавлением к K в G. Кроме того, если $G\neq H_1K$ для каждой собственной подгруппы H_1 из H, то H – минимальное добавление к K в G. Подгруппа A группы G называется недобавляемой в G, если $G\neq AX$ для каждой собственной подгруппы X из G.

Лемма 2 ([11, 1.8]). *Если K и D – подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D – $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

1) L – p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа;

2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;

3) L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L=([P]Q)^L=Q^L$.

Лемма 3 ([2, 2.1]; [12]). *Если группа не p-нильпотентна, то в ней существует p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта.*

Лемма 4. *Если разрешимая группа не p-замкнута, то в ней существует p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта.*

Доказательство. Поскольку группа G разрешима, то в ней существует $\{p,q\}$-холлова подгруппа для любого $q\in\pi(G)$. Пусть G не p-замкнута. Тогда существует $q\in\pi(G)$ такое, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа H из группы G не p-замкнута. Ясно, что H не q-нильпотентна. По лемме 3 в H существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта.

Лемма 5. *Зафиксируем простые числа p и q, $p\neq q$, и натуральное число n. Пусть G – группа, N – ее нормальная подгруппа. Если в G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой, то каждая n-максимальная подгруппа из G/N перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G/N.*

Доказательство. Пусть M/N – n-максимальная подгруппа в G/N, а A/N – $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из G/N. По лемме 2 подгруппа $A = S^LN$, где S – $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из минимального добавления L к N в A. Так как M n-максимальна в G, то по условию $MS^l = S^lM$ для любого $l\in G$. Тогда $MS^L = S^LM$ и $MA = AM$. Теперь M/N и A/N перестановочны.

Лемма 6. *Пусть A и B – подгруппы группы G, $A \subseteq B$, $B \neq G$. Если $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$, то A^B субнормальна в G. В частности, если $A = B$, то A субнормальна в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [13, 7.2.5] подгруппа $A^B \cap B^A$ субнормальна в G. Подгруппа A содержится в B, поэтому A^B также содержится в B. Значит $A^B = A^B \cap B^A$ субнормальна в G. При $A = B$, подгруппа $A^B = A$, поэтому A субнормальна в G.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [9–10, 14–15]. Пусть $\mathfrak{E}$ – формация всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ – некоторая формация и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{FH} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех разрешимых и нильпотентных групп обозначают через $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно. Если $\mathfrak{F}$ – некоторая формация и π – некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ – класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп, а $\mathfrak{E}_{p'}$ – класс всех групп, порядок которых не делится на p. Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \cap_{x \in G} M^x$, то группу G называют примитивной, а подгруппу M – ее примитиватором [15].

Лемма 7 ([9, 5.22]). *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – разрешимые насыщенные формации, то $\mathfrak{FH}$ – разрешимая насыщенная формация.*

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.*

Лемма 9 ([9, 4.40; 4.42]). *Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой подгруппой порядка p^n для некоторого простого p;

3) в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$.

Для формулировки следствия нам понадобится понятие X-перестановочности подгрупп, которое предложил в 2003 г. А.Н. Скиба [16]. Пусть X – непустое подмножество группы G. Подгруппы A и B называются X-перестановочными, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X = 1$ – единичная подгруппа, то 1-перестановочные подгруппы – это в точности перестановочные подгруппы. Ясно, что перестановочные подгруппы будут X-перестановочными для любого непустого множества X.

Лемма 10. *Пусть A, B и X – подгруппы группы G, а N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A.

2. Если A X-перестановочна с B, то AN/N XN/N-перестановочна с BN/N.

3. Если A X-перестановочна с B и X – нормальная подгруппа группы G, то AX/X перестановочна с BX/X.

4. Если A X-перестановочна с B и $X \subseteq Y \subseteq G$, то A Y-перестановочна с B.

5. Если A X-перестановочна с B и $X \subseteq A$, либо $X \subseteq B$, то A перестановочна с B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения непосредственно вытекают из определения X-перестановочных подгрупп. Проверим, например, утверждение 5. По условию существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X \subseteq B$, то $B^x = B$ и $AB = BA$. Если $X \subseteq A$, то из равенства $Ax^{-1}Bx = x^{-1}BxA$ следует, что $ABx = x^{-1}BA$, $xAB = BAx^{-1}$ и $AB = BA$.

Основной результат.

Теорема. *Зафиксируем простое число p и натуральное число $n \in \{1,2,3\}$. Если в разрешимой группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с каждой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта, то $G/F(G)$ p-замкнута.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в группе G каждая n-максимальная подгруппа перестановочна с любой p-нильпотентной pd-подгруппой Шмидта. Требуется доказать, что факторгруппа $G/F(G)$ *p-замкнута.* Это равносильно тому, что группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Ввиду леммы 5 условия теоремы наследуют все факторгруппы группы G, поэтому факторгруппа G/N принадлежит формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N.

Предположим, что группа G не принадлежит формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. Формация $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ насыщена по лемме 7. Теперь из леммы 8 следует, что группа G примитивна, а из леммы 9 получаем, что $G = [F]M$, где $F = F(G) = O_r(G)$, $r \in \pi(G)$, а M – максимальная в G подгруппа и $O_r(M)=1$.

Поскольку группа G не принадлежит формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$, то подгруппа M не p-замкнута. Поэтому в M по лемме 4 существует p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта $S=[Q]\langle a\rangle$, где Q – нормальная силовская q-подгруппа, $\langle a\rangle$ – циклическая силовская p-подгруппа. Поскольку $M_G = 1$, то существует элемент $x\in G$ такой, что S не содержится в M^x. Отдельно рассмотрим каждое значение $n\in\{1,2,3\}$.

Случай $n = 1$. По условию S и M^x перестановочны, поэтому $G = SM^x\subseteq MM^x$, противоречие с [10, VI.4.5].

Случай $n = 2$. Так как M нециклическая, то M^x содержит две различные максимальные подгруппы H и K. Они будут 2-максимальными подгруппами группы G. По условию S перестановочна и подгруппой H и подгруппой K. Ясно, что $M^x = \langle H,K\rangle$, значит S перестановочна с подгруппой M^x. Но теперь $G=SM^x\subseteq MM^x$, противоречие с [10, VI.4.5].

Случай $n = 3$. Предположим, что $S = M$ – максимальная в G подгруппа. В силу леммы 1 $Q\times\langle a^p\rangle$ – максимальная подгруппа группы S, а $Q_1\times\langle a^p\rangle$ – 2-максимальная в S и 3-максимальная в G подгруппа, где Q_1 – максимальная подгруппа из Q. По условию S^g перестановочна с $Q_1\times\langle a^p\rangle$ для любого $g\in G$. Значит, $S^g(Q_1\times\langle a^p\rangle)$ – подгруппа группы G и для любого $g\in G$

$$S^g\,(Q_1\times\langle a^p\rangle)\subseteq M^g M \neq G.$$

Следовательно, $Q_1\times\langle a^p\rangle\subseteq S^g$. Это означает, что $Q_1\times\langle a^p\rangle\subseteq S_G = 1$, т.е. подгруппа $Q_1\times\langle a^p\rangle = 1$. Последнее равенство возможно только тогда, когда $|Q| = q$ и $|\langle a\rangle| = p$. Но в этом случае $|G:F|=|S|=qp$ и F становится 2-максимальной в G подгруппой. Для максимальной подгруппы F_1 из F произведение F_1S будет подгруппой по условию. Теперь F_1 – нормальная в G подгруппа, поэтому $F_1 = 1$ и $|F| = r$. Поскольку $F=C_G(F)$, то $M=S$ должна быть циклической группой порядка, делящего $r – 1$, противоречие.

Итак, S не максимальна в G, т.е. $S\neq M$. Предположим, что S 2-максимальна в G. Тогда подгруппа Шмидта $S=[Q]\langle a\rangle$ перестановочна с 3-максимальными подгруппами

$$(Q\times\langle a^p\rangle)^g \text{ и } (\Phi(Q)\times\langle a\rangle)^g$$

для каждого $g\in G$ (см. лемму 1). Поэтому S перестановочна с подгруппой, порожденной ими, т.е. с подгруппой

$$\langle (Q\times\langle a^p\rangle)^g, (\Phi(Q)\times\langle a\rangle)^g\rangle = S^g$$

для каждого $g\in G$. В этом случае подгруппа S субнормальна в G по лемме 6, а значит, Q субнормальна в G и Q^G – q-подгруппа по [9, 5.31]. Теперь

$$Q\subseteq Q^G\subseteq O_q(G)\subseteq F,$$

противоречие с тем, что $Q\cap F = 1$.

Итак, S не является максимальной подгруппой в G и не будет 2-максимальной подгруппой в G. Значит, S содержится в подгруппе H, содержащейся в подгруппе M, и H является 3-максимальной подгруппой в G. По условию $SH^g = H^gS$, для любого $g\in G$, а по лемме 6 подгруппа S^H субнормальна в G. По [9, 2.42] каждая минимальная нормальная подгруппа содержится в нормализаторе субнормальной подгруппы, т.е. $F\subseteq N_G(S^H)$. Поскольку

$$F\cap S^H\subseteq F\cap M = 1, \text{ то } FS^H = F\times S^H,$$

что противоречит равенству $F = C_G(F)$.

Значит, предположение о том, что группа G не принадлежит формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$, приводит во всех случаях к противоречию. Поэтому группа G принадлежит формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$, а это равносильно тому, что G/F является p-замкнутой группой. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть G – разрешимая группа и $X=\Phi(G)$. Если в группе G каждая p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта X-перестановочна с каждой n-максимальной подгруппой для некоторого простого $p\in\pi(G)$ и некоторого натурального числа $n\in\{1,2,3\}$, то $G/F(G)$ p-замкнута.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $X = \Phi(G) = 1$, то каждая p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта перестановочна с каждой n-максимальной подгруппой для фиксированного $n\in\{1,2,3\}$. Тогда по теореме $G/F(G)$ p-замкнута. Пусть теперь $X=\Phi(G)\neq 1$. Докажем, что в факторгруппе G/X каждая p-нильпотентная pd-подгруппа Шмидта перестановочна с каждой n-максимальной подгруппой для $n\in\{1,2,3\}$ и простого p. Обозначим через S/X – $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу из G/X, а через M/X – n-максимальную подгруппу факторгруппы G/X. Пусть L – минимальное добавление к подгруппе X в группе S, т.е. $S=LX$ и L – минимальная подгруппа с этим свойством. По лемме 2 подгруппа L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу T, для которой справедливо равенство $T^L = L$. Так как M – n-максимальная подгруппа группы G, то по условию T^l X-перестановочна с M для каждого

$l \in L$. По лемме 10 подгруппы M/X и $T^l X/X$ перестановочны для каждого $l \in L$. Теперь подгруппы

$$M/X \text{ и } T^L X/X = LX/X = S/X$$

также перестановочны. Следовательно, условия следствия наследуются факторгруппой G/X. По индукции $(G/X)/(F(G/X))$ p-замкнута. Теперь факторгруппа

$$(G/\Phi(G))/(F(G/\Phi(G))) =$$
$$= (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) \cong G/F(G)$$

p-замкнута. Следствие доказано.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
2. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Украинск. матем. конгресса. – Киев: Институт математики, 2002. – С. 81–90.
3. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
4. Княгина, В.Н. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирск. матем. журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.
5. Княгина, В.Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
6. Ведерников, В.А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В.А. Ведерников // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 6. – С. 669–687.
7. Княгина, В.Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 130–139.
8. Княгина, В.Н. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 4. – С. 126–133.
9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer, 1967.
11. Монахов, В.С. О подгруппах Шмидта конечных групп / В.С. Монахов // Вопросы алгебры. – 1998. – Т. 13. – С. 153–171.
12. Чунихин, С.А. Комплекты неспециальных подгрупп и *p*-нильпотентность конечных групп / С.А. Чунихин // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 118, № 4. – С. 654–656.
13. Lennox, J.C. Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, S.E. Stonehewer. – Oxford: Clarendon Press, 1987.
14. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Минск: Наука, 1978.
15. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics. – № 11. – Canberra: Australian National University, 1979.
16. Скиба, А.Н. *H*-permutable subgroups / А.Н. Скиба // Изв. Гомельск. гос. ун-та. – 2003. – № 4. – С. 37–39.

Поступила в редакцию 26.12.2012. Принята в печать 16.04.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: knyagina@inbox.ru – Княгина В.Н.