

О свойствах радикалов и инъекторов для классов Хартли

М.Г. Семенов, Н.Т. Воробьев

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В работе исследуются классы Хартли конечных групп. Класс F называется классом Фиттинга, если F замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F -подгрупп. Если F – непустой класс Фиттинга, то подгруппа G_F группы G называется F -радикалом группы G , если она является наибольшей из нормальных подгрупп G , принадлежащих F . Пусть $\Sigma = \{\pi_i : i \in I\}$ – семейство попарно различных подмножеств множества всех простых чисел $\wp$ такое, что $\wp = \bigcup_{i \in I} \pi_i$. Функцию $h : \Sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называют функцией Хартли или H -функцией. Класс Фиттинга H – класс Хартли, если $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ для некоторой H -функции h . Доказано, что для любых класса Хартли $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ и группы G такой, что $G \in HS$, и непустого класса Фиттинга X такого, что $X \subseteq \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$, справедливо включение $C_G(G_H/G_X) \subseteq G_H$. Из данного включения вытекают новые свойства радикалов и инъекторов для классов Хартли. В частности, если для функции h справедливо включение $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j ($i \neq j$), а V – H -инъектор группы G , то справедливо равенство $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ для всех i из I .

Ключевые слова: класс Фиттинга, класс Хартли, конечные группы, радикал, инъектор, централизатор, свойство покрытия-изоляции.

On properties of radicals and injectors for Hartley classes

M.G. Semenov, N.T. Vorob'ev

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

In this paper, Hartley classes of finite groups are investigated. A class F is a Fitting class if and only if it is closed under normal subgroups and products of normal F -subgroups. Let F be a non-empty Fitting class, subgroup G_F of group G is called F -radical of G if it is the maximal normal F -subgroup of G . Let $\Sigma = \{\pi_i : i \in I\}$ be a set of distinct subsets of all primes $\wp$ and $\wp = \bigcup_{i \in I} \pi_i$. A map $h : \Sigma \rightarrow \{\text{Fitting classes}\}$ is called a Hartley function or a H -function. A Fitting class H is called a Hartley class if $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ for some H -function h . We proved that for any Hartley class $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$, a group G such that $G \in HS$ and a non-empty Fitting class X satisfying $X \subseteq \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$, the following inclusion holds $C_G(G_H/G_X) \subseteq G_H$. This result gives us the opportunity to receive new properties of radicals and injectors for Hartley classes. In particular, if a function h such that $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ for all $i \neq j$, and V is an H -injector of group G than $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ for all i from I .

Key words: Fitting class, Hartley class, finite groups, radical, injector, centralizer, cover-avoidance property.

Все рассматриваемые группы являются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [1–2]. Напомним, что класс F называется классом Фиттинга [1], если F замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных F -подгрупп. Если F – непустой класс Фиттинга, то подгруппа G_F группы G называется F -радикалом группы G [1], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G , принадлежащих F . В частности, если N – класс всех нильпотентных групп, то N является классом Фиттинга и N -радикалом

группы G является подгруппа Фиттинга $F(G)$. Пусть F и H – классы Фиттинга. Тогда класс групп $FH = (G : G/G_F \in H)$ называется произведением классов Фиттинга F и H [1]. Хорошо известно [3], что произведение FH двух классов Фиттинга F и H является классом Фиттинга и произведение классов Фиттинга обладает свойством ассоциативности.

Пусть $\Sigma = \{\pi_i : i \in I\}$ – семейство попарно различных подмножеств множества всех простых чисел $\wp$ такое, что $\wp = \bigcup_{i \in I} \pi_i$. Функцию

$h: \sum \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ будем называть функцией Хартли или H -функцией [4]. Класс Фиттинга H назовем классом Хартли [4], если $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ для некоторой H -функции h . В этом случае мы будем говорить, что H определяется локально H -функцией h . Функцию h будем называть приведенной, если $h(\pi_i) \subseteq H$ для всех i из I .

Хорошо известен результат (см. например [5, теорема 1.8.18]) о том, что в классе всех конечных разрешимых групп нильпотентный радикал (или N -радикал) $F(G)$ группы G обладает следующим свойством: $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Этот результат был расширен на случай универсума S^π всех π -разрешимых групп. Было доказано, что π -нильпотентный радикал (или N^π -радикал) $F_\pi(G)$ для π -разрешимых групп обладает свойством $C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G)$ [2, теорема 4.1.2].

Известно, что класс всех нильпотентных групп N и класс всех π -нильпотентных групп N^π являются локальными классами Фиттинга. В связи с этими результатами возникает задача описания локальных классов Фиттинга F и универсумов U таких, что F -радикал G_F любой группы G из U обладает свойством $C_G(G_F) \subseteq G_F$.

Целью настоящей работы является доказательство того, что для любого класса Хартли $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$, непустого класса Фиттинга X такого, что $X \subseteq \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$, и любой группы G из HS справедливо, что H -радикал G_H обладает свойством $C_G(G_H/G_X) \subseteq G_H$. Из этого результата вытекают некоторые интересные свойства. В частности, если H -функция h такая, что $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$), то для H -инъектора V группы G справедливо равенство $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ для любого i из I .

Если X – некоторое множество групп, то через $Fit X$ будем обозначать класс Фиттинга, порожденный X .

Сформулируем в качестве леммы свойство радикалов классов Фиттинга, которое мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1[1]. Если F – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G , то $G_F \cap N = N_F$.

Как уже было замечено ранее, особый интерес для нас будут представлять H -функции h , обладающие следующим свойством: $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$). Возникает следующий вопрос: для каких классов Хартли существуют H -функции, обладающие свойством, описанным выше? Ответ на данный вопрос дает

Лемма 2. Каждый класс Хартли определяется локально такой приведенной H -функцией h , что $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$).

Доказательство. Пусть H – класс Хартли. Тогда $H = \bigcap_{i \in I} \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$ для некоторой приведенной H -функции $\bar{h}$. Рассмотрим функцию f такую, что $f(\pi_i) = \{G : G \cong H^{E_{\pi_i}}(H \in \bar{h}(\pi_i))\}$ для всех $i \in I$.

Пусть $G \in f(\pi_i)$, тогда $G \cong H^{E_{\pi_i}}$ для некоторой группы $H \in \bar{h}(\pi_i)$. Значит, $H^{E_{\pi_i}} \in \bar{h}(\pi_i)$ и $G \in \bar{h}(\pi_i)$. Следовательно, $f(\pi_i) \subseteq \bar{h}(\pi_i)$. Тогда $f(\pi_i)E_{\pi_i} \subseteq \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$.

Докажем обратное включение. Пусть $G \in \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$. Тогда $G/G_{\bar{h}(\pi_i)} \in E_{\pi_i}$. Из $G^{E_{\pi_i}} \in \bar{h}(\pi_i)$, ввиду равенства $(G^{E_{\pi_i}})^{E_{\pi_i}} = G^{E_{\pi_i}}$, следует $G^{E_{\pi_i}} \in f(\pi_i)$. Значит, $G \in f(\pi_i)E_{\pi_i}$. И справедливо равенство $f(\pi_i)E_{\pi_i} = \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$.

Пусть теперь $h(\pi_i) = Fit(f(\pi_i))$ для всех $i \in I$. Тогда $f(\pi_i) \subseteq h(\pi_i) \subseteq \bar{h}(\pi_i)$ и $h(\pi_i)E_{\pi_i} \subseteq \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$ для всех $i \in I$. Но из того, что $f(\pi_i)E_{\pi_i} = \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$, следует, $Fit(f(\pi_i)E_{\pi_i}) = Fit(\bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}) = \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}$. Значит, $\bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i} = Fit(f(\pi_i)E_{\pi_i}) \subseteq Fit(f(\pi_i))E_{\pi_i}$ и $Fit(f(\pi_i))E_{\pi_i} = h(\pi_i)E_{\pi_i}$.

Итак, $\bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i} = h(\pi_i)E_{\pi_i}$ для всех $i \in I$. Значит, $\bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i} = h(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i}$ и $H = \bigcap_{i \in I} \bar{h}(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i} = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i}$. Следовательно, h является H -функцией, определяющей локально класс H . Заметим также, что из включения $h(\pi_i) \subseteq \bar{h}(\pi_i)$ для всех $i \in I$ следует, что h является приведенной H -функцией класса H .

Предположим теперь, что $L \in f(\pi_i)$, тогда $L \cong K^{E_{\pi_i}}$, для некоторой группы K из $\bar{h}(\pi_i)$.

Пусть $j \in I$ и $i \neq j$. Тогда $E_{\pi_j} \subseteq E_{\pi_i}$ и $K^{E_{\pi_i}} \subseteq K^{E_{\pi_j}}$. Ввиду того, что $K \in \bar{h}(\pi_i) \subseteq H$, имеем $K/K_{\bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j}} \in E_{\pi_j}$. Значит, $K^{E_{\pi_j}} \in \bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j}$.

Но тогда, ввиду включения $K^{E_{\pi_i}} \subseteq K^{E_{\pi_j}}$, имеем $K^{E_{\pi_i}} \in \bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j}$. Следовательно, $L \in \bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j}$. Таким образом, мы доказали включение $f(\pi_i) \subseteq \bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j}$. Но тогда $h(\pi_i) = \text{Fit}(f(\pi_i)) \subseteq \text{Fit}(\bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j})$ и $\text{Fit}(\bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j}) = \bar{h}(\pi_j)E_{\pi_j} = h(\pi_j)E_{\pi_j}$.

Отсюда следует $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$).

Лемма доказана.

Основной результат работы представляет

Теорема 3. Пусть $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ для некоторой H -функции h . Если X – непустой класс Фиттинга такой, что $X \subseteq \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$. Тогда для любой группы $G \in \text{HS}$ справедливы следующие утверждения:

(1) $C_G(G_H/G_X) \subseteq G_H$;

(2) если V – H -инъектор группы G , тогда $V_X = G_X$;

(3) если $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$) и V – H -инъектор группы G , то $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ для всех i из I .

Доказательство. (1) Заметим, что $X \subseteq H$, так как $X \subseteq \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i}$ для всех i из I . Таким образом, $G_X \subseteq G_H$.

Пусть $C = C_G(G_H/G_X)$. Предположим, что C не содержится в G_H . Тогда факторгруппа $C/C \cap G_H$ не является тривиальной. Отсюда следует, что существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \subseteq C$ и $K/C \cap G_H$ – нетривиальный главный фактор группы G . Очевидно, $K/C \cap G_H = K/K \cap G_H$. Тогда, с учетом изоморфизма $K/C \cap G_H = K/K \cap G_H \cong KG_H/G_H$, получаем, что группа KG_H/G_H не является единичной.

Из того, что $G \subseteq \text{HS}$, следует $G/G_H \subseteq S$ и главный фактор $K/K \cap G_H$ – элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p .

Тогда $(K/K \cap G_H)'$ – единичная группа. Так как $(1) = (K/K \cap G_H)' = K'(K \cap G_H)/K \cap G_H$, то $K'(K \cap G_H) = K \cap G_H$ и $K' \subseteq K \cap G_H$. Далее, с учетом $K \subseteq C_G(G_H/G_X)$, имеем $K \subseteq C_G(K \cap G_H/G_X)$. Отсюда следует, что $[K', K] \subseteq [K \cap G_H, K] \subseteq G_X$ и $[K'G_X/G_X, KG_X/G_X] = [(K/G_X)', K/G_X] = 1$. Значит, K/G_X – нильпотентная группа ступени нильпотентности не более 2 и K/G_X имеет неединичную нормальную силовскую p -подгруппу P/G_X . Очевидно, $P \triangleleft G$. Но тогда $P(K \cap G_H)/K \cap G_H$ – силовская p -подгруппа группы $K/K \cap G_H$. Ввиду того, что $K/K \cap G_H \in N_p$, имеем $P(K \cap G_H)/K \cap G_H = K/K \cap G_H$ и $P(K \cap G_H) = K$. Значит, $PG_H = KG_H$.

Покажем теперь, что $P \in H$. Пусть $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Так как $G_X = P \cap G_X = P_X$ и $P/P_X \in N_p \subseteq E_{\pi_i}$, то $P \in XE_{\pi_i} \subseteq h(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i}$. Пусть $\pi_i \neq \pi_j$ ($j \in I$). Тогда $P \in XE_{\pi_i} \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}E_{\pi_i} \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ и $h(\pi_j)E_{\pi_j} \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}E_{\pi_j}$.

Таким образом, $P \in \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}E_{\pi_i} = H$.

Из того, что $P \in H$ и $PG_H = KG_H$, следует $KG_H \subseteq G_H$. А это в свою очередь противоречит тому, что KG_H/G_H не является единичной группой. Это доказывает утверждение (1).

(2) Так как $G_H \triangleleft V$ и $X \subseteq H$, то, по лемме 1, $G_H \cap V_X = (G_H)_X = G_X$. Значит, $[V_X, G_H] = V_X \cap G_H = G_X$. Следовательно, с учетом утверждения (1), $V_X \subseteq C_G(G_H/G_X) \subseteq G_H$. Тогда $V_X \subseteq (G_H)_X = G_X$. Таким образом, имеем $V_X = G_X$.

(3) Из леммы 2 следует, что любой класс H , удовлетворяющий условиям теоремы, определяется локально такой приведенной H -функцией h , что $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$). Пусть $i \in I$. Из условия (3) данной теоремы мы имеем $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$). Но $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_i)E_{\pi_i}$. Следовательно, $h(\pi_i) \subseteq \bigcap_{k \in I} h(\pi_k)E_{\pi_k}$. Но тогда, по утверждению (2) настоящей теоремы, следует, что $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$. Таким образом, в силу произ-

вольности выбора i , мы показали, что $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ для всех $i \in I$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 4. Если $G \in \bar{X}NS$, где $\bar{X}$ – непустой класс Фиттинга, то $C_G(G_{\bar{X}N}) \subseteq G_{\bar{X}N}$.

Доказательство. Класс $\bar{X}N$ можно определить следующим образом: $\bar{X}N = \bigcap_p h(p)E_p N_p$, где $h(p) = \bar{X}$ для всех простых p . Действительно, $\bigcap_p \bar{X}E_p N_p = \bar{X} \bigcap_p E_p N_p = \bar{X}N$. Тогда из утверждения (1) теоремы 3 с учетом того, что $H = \bar{X}N = \bigcap_p h(p)E_p N_p$, $h(p) = \bar{X}$ и $X = (1) \subseteq \bigcap_p h(p)E_p$, следует, что для группы $G \in \bar{X}NS$ справедливо включение $C_G(G_{\bar{X}N}) \subseteq G_{\bar{X}N}$.

Следствие 5. Если $G \in N^k S$, то $C_G(G_{N^k}) \subseteq G_{N^k}$.

Доказательство. Пусть $\bar{X} = N^{k-1}$. Тогда включение $C_G(G_{N^k}) \subseteq G_{N^k}$ вытекает из следствия 4.

Заметим, что в случае если $k=1$ мы имеем хорошо известное свойство разрешимых групп, которое представляет

Следствие 6. Если G – разрешимая группа, то $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Рассмотрим одно из применений теоремы 3.

Определение 7. Пусть $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ для некоторой H -функции h и V – H -инъектор некоторой разрешимой группы G . Мы будем называть главный p -фактор H/K группы G ($p \in \pi_i$) $h(\pi_i)$ -покрываемым, если $H = K(V_{h(\pi_i)} \cap H)$, и $h(\pi_i)$ -изолируемым, если $K = K(V_{h(\pi_i)} \cap H)$.

Теорема 8. Пусть $H = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)E_{\pi_i}$ и h – приведенная H -функция H такая, что

$h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$, для всех i и j из I ($i \neq j$). Тогда для любой разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:

(1) главный p -фактор группы G $h(\pi_i)$ -покрываем тогда и только тогда, когда он покрываем $h(\pi_i)$ -радикалом $G_{h(\pi_i)}$;

(2) H -инъектор группы G покрывает каждый $h(\pi_i)$ -покрываемый главный фактор группы G .

Доказательство. (1) Пусть $p \in \pi_i$ и главный p -фактор H/K группы G является $h(\pi_i)$ -покрываемым. Так как $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)E_{\pi_j}$ для всех i и j из I ($i \neq j$), то $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$. Тогда $H = K(V_{h(\pi_i)} \cap H) = K(G_{h(\pi_i)} \cap H)$ и $K(G_{h(\pi_i)} \cap H) = KG_{h(\pi_i)} \cap H$.

Значит $H = KG_{h(\pi_i)} \cap H$ и $H \subseteq KG_{h(\pi_i)}$. Отсюда следует, что главный p -фактор H/K группы G покрываем $h(\pi_i)$ -радикалом $G_{h(\pi_i)}$. Обратное очевидно.

(2) Пусть $p \in \pi_i$ и главный p -фактор H/K группы G является $h(\pi_i)$ -покрываемым. Тогда по утверждению (1) настоящей теоремы главный p -фактор H/K группы G покрываем $h(\pi_i)$ -радикалом $G_{h(\pi_i)}$. Но $G_{h(\pi_i)} \subseteq G_H \subseteq V$ для любого H -инъектора V группы G . Следовательно, V покрывает H/K . И утверждение (2) доказано.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter De Gruyter: Berlin–N. Y., 1992. – 891 p.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.
3. Воробьев, Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1991. – № 6. – С. 22–26.
4. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, №. 2. – P. 193–207.
5. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing–N. Y.–Dordrecht–Boston–London: Science Press–Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

Поступила в редакцию 05.03.2012. Принята в печать 16.04.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: mg-semenow@mail.ru – Семенов М.Г.