УДК 512.542

О свойствах радикалов и инъекторов для классов Хартли

М.Г. Семенов, Н.Т. Воробьев
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В работе исследуются классы Хартли конечных групп. Класс $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G, если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Пусть $\sum=\{\pi_i : i\in I\}$ – семейство попарно различных подмножеств множества всех простых чисел $\wp$ такое, что $\wp=\bigcup_{i\in I}\pi_i$. Функцию $h:\sum\to$ {классы Фиттинга} называют функцией Хартли или H-функцией. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ – класс Хартли, если $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ для некоторой H-функции h. Доказано, что для любых класса Хартли $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ и группы G такой, что $G\in\mathfrak{H}\mathfrak{S}$, и непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ такого, что $\mathfrak{X}\subseteq\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ справедливо включение $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}})\subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Из данного включения вытекают новые свойства радикалов и инъекторов для классов Хартли. В частности, если для функции h справедливо включение $h(\pi_i)\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j ($i\neq j$), а V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G, то справедливо равенство $V_{h(\pi_i)}=G_{h(\pi_i)}$ для всех i из I.

***Ключевые слова:** класс Фиттинга, класс Хартли, конечные группы, радикал, инъектор, централизатор, свойство покрытия-изолирования.*

On properties of radicals and injectors for Hartley classes

M.G. Semenov, N.T. Vorob'ev
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

In this paper, Hartley classes of finite groups are investigated. A class $\mathfrak{F}$ is a Fitting class if and only if it is closed under normal subgroups and products of normal $\mathfrak{F}$-subgroups. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty Fitting class, subgroup $G_{\mathfrak{F}}$ of group G is called $\mathfrak{F}$-radical of G if it is the maximal normal $\mathfrak{F}$-subgroup of G. Let $\sum=\{\pi_i : i\in I\}$ be a set of distinct subsets of all primes $\wp$ and $\wp=\bigcup_{i\in I}\pi_i$. A map $h:\sum\to$ {Fitting classes} is called a Hartley function or a H-function. A Fitting class $\mathfrak{H}$ is called a Hartley class if $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ for some H-function h. We proved that for any Hartley class $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$, a group G such that $G\in\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ and a non-empty Fitting class $\mathfrak{X}$ satisfying $\mathfrak{X}\subseteq\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ the following inclusion holds $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}})\subseteq G_{\mathfrak{H}}$. This result gives us the opportunity to receive new properties of radicals and injectors for Hartley classes. In particular, if a function h such that $h(\pi_i)\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ for all $i\neq j$, and V is an $\mathfrak{H}$-injector of group G than $V_{h(\pi_i)}=G_{h(\pi_i)}$ for all i from I.

***Key words:** Fitting class, Hartley class, finite groups, radical, injector, centralizer, cover-avoidance property.*

Все рассматриваемые группы являются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [1–2]. Напомним, что класс $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга [1], если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G [1], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, то $\mathfrak{N}$ является классом Фиттинга и $\mathfrak{N}$-радикалом группы G является подгруппа Фиттинга $F(G)$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=(G : G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{H})$ называется произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [1]. Хорошо известно [3], что произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга и произведение классов Фиттинга обладает свойством ассоциативности.

Пусть $\sum=\{\pi_i : i\in I\}$ – семейство попарно различных подмножеств множества всех простых чисел $\wp$ такое, что $\wp=\bigcup_{i\in I}\pi_i$. Функцию $h:\sum\to$ {классы Фиттинга} будем называть функцией Хартли или *H*-функцией [4]. Класс

Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем классом Хартли [4], если $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ для некоторой *H*-функции h. В этом случае мы будем говорить, что $\mathfrak{H}$ определяется локально *H*-функцией h. Функцию h будем называть приведенной, если $h(\pi_i)\subseteq\mathfrak{H}$ для всех *i* из *I*.

Хорошо известен результат (см. например [5, теорема 1.8.18]) о том, что в классе всех конечных разрешимых групп нильпотентный радикал (или $\mathfrak{N}$-радикал) $F(G)$ группы G обладает следующим свойством: $C_G(F(G))\subseteq F(G)$. Этот результат был расширен на случай универсума $\mathfrak{S}^{\pi}$ всех π-разрешимых групп. Было доказано, что π-нильпотентный радикал (или $\mathfrak{N}^{\pi}$-радикал) $F_{\pi}(G)$ для π-разрешимых групп обладает свойством $C_G(F_{\pi}(G))\subseteq F_{\pi}(G)$ [2, теорема 4.1.2].

Известно, что класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ и класс всех π-нильпотентных групп $\mathfrak{N}^{\pi}$ являются локальными классами Фиттинга. В связи с этими результатами возникает задача описания локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и универсумов $\mathfrak{U}$ таких, что $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ любой группы G из $\mathfrak{U}$ обладает свойством $C_G(G_{\mathfrak{F}})\subseteq G_{\mathfrak{F}}$.

Целью настоящей работы является доказательство того, что для любого класса Хартли $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$, непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ такого, что $\mathfrak{X}\subseteq\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ и любой группы *G* из $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ справедливо, что $\mathfrak{H}$-радикал $G_{\mathfrak{H}}$ обладает свойством $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}})\subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Из этого результата вытекают некоторые интересные свойства. В частности, если *H*-функция h такая, что $h(\pi_i)\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j из I ($i\neq j$), то для $\mathfrak{H}$-инъектора V группы G справедливо равенство $V_{h(\pi_i)}=G_{h(\pi_i)}$ для любого *i* из *I*.

Если $\mathfrak{X}$ – некоторое множество групп, то через $Fit\,\mathfrak{X}$ будем обозначать класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{X}$.

Сформулируем в качестве леммы свойство радикалов классов Фиттинга, которое мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1[1]. *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G, то $G_{\mathfrak{F}}\cap N=N_{\mathfrak{F}}$.*

Как уже было замечено ранее, особый интерес для нас будут представлять *H*-функции h, обладающие следующим свойством: $h(\pi_i)\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j из I ($i\neq j$). Возникает следующий вопрос: для каких классов Хартли существуют *H*-функции, обладающие свойством, описанным выше? Ответ на данный вопрос дает

Лемма 2. *Каждый класс Хартли определяется локально такой приведенной H-функцией h, что $h(\pi_i)\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j из I ($i\neq j$).*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли. Тогда $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ для некоторой приведенной *H*-функции $\overline{h}$. Рассмотрим функцию f такую, что $f(\pi_i)=\{G: G\cong H^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}\ (H\in\overline{h}(\pi_i))\}$ для всех $i\in I$.

Пусть $G\in f(\pi_i)$, тогда $G\cong H^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}$ для некоторой группы $H\in\overline{h}(\pi_i)$. Значит, $H^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}\in\overline{h}(\pi_i)$ и $G\in\overline{h}(\pi_i)$. Следовательно, $f(\pi_i)\subseteq\overline{h}(\pi_i)$. Тогда $f(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\subseteq\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$.

Докажем обратное включение. Пусть $G\in\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. Тогда $G/G_{\overline{h}(\pi_i)}\in\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. Из $G^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}\in\overline{h}(\pi_i)$, ввиду равенства $(G^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}})^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}=G^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}$, следует $G^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}\in f(\pi_i)$. Значит, $G\in f(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. И справедливо равенство $f(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}=\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$.

Пусть теперь $h(\pi_i)=Fit(f(\pi_i))$ для всех $i\in I$. Тогда $f(\pi_i)\subseteq h(\pi_i)\subseteq\overline{h}(\pi_i)$ и $h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\subseteq\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ для всех $i\in I$. Но из того, что $f(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}=\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ следует, $Fit(f(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'})=$. $=Fit(\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'})=\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. Значит, $\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}=$ $=Fit(f(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'})\subseteq Fit(f(\pi_i))\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ и $Fit(f(\pi_i))\mathfrak{E}_{\pi_i'}=$ $=h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$.

Итак, $\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}=h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ для всех $i\in I$. Значит, $\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}=h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ и $\mathfrak{H}=\bigcap_{i\in I}\overline{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}=\bigcap_{i\in I}h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$. Следовательно, h является *H*-функцией, определяющей локально класс $\mathfrak{H}$. Заметим также, что из включения $h(\pi_i)\subseteq\overline{h}(\pi_i)$ для всех $i\in I$ следует, что h является приведенной *H*-функцией класса $\mathfrak{H}$.

Предположим теперь, что $L\in f(\pi_i)$, тогда $L\cong K^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}}$, для некоторой группы K из $\overline{h}(\pi_i)$. Пусть $j\in I$ и $i\neq j$. Тогда $\mathfrak{E}_{\pi_j}\subseteq\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ и

$K^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}} \subseteq K^{\mathfrak{E}_{\pi_j}}$. Ввиду того, что $K \in \bar{h}(\pi_i) \subseteq \mathfrak{H}$, имеем $K/K_{\bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}} \in \mathfrak{E}_{\pi_j}$. Значит, $K^{\mathfrak{E}_{\pi_j}} \in \bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$. Но тогда, ввиду включения $K^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}} \subseteq K^{\mathfrak{E}_{\pi_j}}$, имеем $K^{\mathfrak{E}_{\pi_i'}} \in \bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$. Следовательно, $L \in \bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$. Таким образом, мы доказали включение $f(\pi_i) \subseteq \bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$. Но тогда $h(\pi_i) = Fit(f(\pi_i)) \subseteq$ $\subseteq Fit(\bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'})$ и $Fit(\bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}) = \bar{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'} =$ $= h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$.

Отсюда следует $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j из I ($i \neq j$).

Лемма доказана.

Основной результат работы представляет

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{H} = \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$, *для некоторой H-функции* h. *Если* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс Фиттинга такой, что* $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. *Тогда для любой группы* $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{S}$ *справедливы следующие утверждения:*

(1) $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}}) \subseteq G_{\mathfrak{H}}$;

(2) если V *–* $\mathfrak{H}$*-инъектор группы* G, *тогда* $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$;

(3) если $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ *для всех* i *и* j *из* I *(*$i \neq j$*) и* V *–* $\mathfrak{H}$*-инъектор группы* G, *то* $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ *для всех i из I.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Заметим, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, так как $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'} \subseteq$ $\subseteq \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ для всех i из I. Таким образом, $G_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{H}}$.

Пусть $C = C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}})$. Предположим, что C не содержится в $G_{\mathfrak{H}}$. Тогда факторгруппа $C/C \bigcap G_{\mathfrak{H}}$ не является тривиальной. Отсюда следует, что существует нормальная подгруппа K группы G такая, что $K \subseteq C$ и $K/C \bigcap G_{\mathfrak{H}}$ – нетривиальный главный фактор группы G. Очевидно, $K/C \bigcap G_{\mathfrak{H}} = K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$. Тогда, с учетом изоморфизма $K/C \bigcap G_{\mathfrak{H}} = K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}} \cong KG_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}$, получаем, что группа $KG_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}$ не является единичной.

Из того, что $G \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}$, следует $G/G_{\mathfrak{H}} \subseteq \mathfrak{S}$ и главный фактор $K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$ – элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Тогда $(K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}})'$ – единичная группа. Так как $(1) = (K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}})' = K'(K \bigcap G_{\mathfrak{H}})/K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$, то $K'(K \bigcap G_{\mathfrak{H}}) = K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$ и $K' \subseteq K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$. Далее, с учетом $K \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}})$, имеем $K \subseteq C_G(K \bigcap G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}})$. Отсюда следует, что $[K', K] \subseteq [K \bigcap G_{\mathfrak{H}}, K] \subseteq G_{\mathfrak{X}}$ и $[K'G_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}, KG_{\mathfrak{X}}/G_{\mathfrak{X}}] = [(K/G_{\mathfrak{X}})', K/G_{\mathfrak{X}}] = 1$. Значит, $K/G_{\mathfrak{X}}$ – нильпотентная группа ступени нильпотентности не более 2 и $K/G_{\mathfrak{X}}$ имеет неединичную нормальную силовскую p-подгруппу $P/G_{\mathfrak{X}}$. Очевидно, $P \lhd G$. Но тогда $P(K \bigcap G_{\mathfrak{H}})/K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$ – силовская p-подгруппа группы $K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$. Ввиду того, что $K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$, имеем $P(K \bigcap G_{\mathfrak{H}})/K \bigcap G_{\mathfrak{H}} =$ $= K/K \bigcap G_{\mathfrak{H}}$ и $P(K \bigcap G_{\mathfrak{H}}) = K$. Значит, $PG_{\mathfrak{H}} = KG_{\mathfrak{H}}$.

Покажем теперь, что $P \in \mathfrak{H}$. Пусть $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Так как $G_{\mathfrak{X}} = P \bigcap G_{\mathfrak{X}} = P_{\mathfrak{X}}$ и $P/P_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{E}_{\pi_i}$, то $P \in \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\pi_i} \subseteq h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$. Пусть $\pi_i \neq \pi_j$ ($j \in I$). Тогда $P \in \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\pi_i} \subseteq$ $\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}\mathfrak{E}_{\pi_i} \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ и $h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'} \subseteq$ $\subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}\mathfrak{E}_{\pi_j}$.

Таким образом, $P \in \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i} = \mathfrak{H}$.

Из того, что $P \in \mathfrak{H}$ и $PG_{\mathfrak{H}} = KG_{\mathfrak{H}}$, следует $KG_{\mathfrak{H}} \subset G_{\mathfrak{H}}$. А это в свою очередь противоречит тому, что $KG_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}$ не является единичной группой. Это доказывает утверждение (1).

(2) Так как $G_{\mathfrak{H}} \lhd V$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, то, по лемме 1, $G_{\mathfrak{H}} \bigcap V_{\mathfrak{X}} = (G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Значит, $[V_{\mathfrak{X}}, G_{\mathfrak{H}}] = V_{\mathfrak{X}} \bigcap G_{\mathfrak{H}} =$ $= G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, с учетом утверждения (1), $V_{\mathfrak{X}} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}}) \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Тогда $V_{\mathfrak{X}} \subseteq (G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Таким образом, имеем $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$.

(3) Из леммы 2 следует, что любой класс $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условиям теоремы, определяется локально такой приведенной H-функцией h, что $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ для всех i и j из I ($i \neq j$). Пусть $i \in I$. Из условия (3) данной теоремы мы имеем $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$ для всех i и j из I ($i \neq j$). Но $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. Следовательно, $h(\pi_i) \subseteq \bigcap_{k\in I} h(\pi_k)\mathfrak{E}_{\pi_k'}$. Но тогда, по утверждению (2) настоящей теоремы, следует, что $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$. Таким образом, в силу произ-

вольности выбора i, мы показали, что $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$ для всех $i \in I$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 4. *Если $G \in \bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}\mathfrak{S}$, где $\bar{\mathfrak{X}}$ – непустой класс Фиттинга, то $C_G(G_{\bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}}) \subseteq G_{\bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}}$.*

Доказательство. Класс $\bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}$ можно определить следующим образом: $\bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N} = \bigcap_p h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где $h(p) = \bar{\mathfrak{X}}$ для всех простых p. Действительно, $\bigcap_p \bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \bar{\mathfrak{X}}\bigcap_p \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}$. Тогда из утверждения (1) теоремы 3 с учетом того, что $\mathfrak{H} = \bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N} = \bigcap_p h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, $h(p) = \bar{\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{X} = (1) \subseteq \bigcap_p h(p)\mathfrak{E}_{p'}$ следует, что для группы $G \in \bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ справедливо включение $C_G(G_{\bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}}) \subseteq G_{\bar{\mathfrak{X}}\mathfrak{N}}$.

Следствие 5. *Если $G \in \mathfrak{N}^k\mathfrak{S}$, то $C_G(G_{\mathfrak{N}^k}) \subseteq G_{\mathfrak{N}^k}$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\mathfrak{X}} = \mathfrak{N}^{k-1}$. Тогда включение $C_G(G_{\mathfrak{N}^k}) \subseteq G_{\mathfrak{N}^k}$ вытекает из следствия 4.

Заметим, что в случае если $k = 1$ мы имеем хорошо известное свойство разрешимых групп, которое представляет

Следствие 6. *Если G – разрешимая группа, то $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.*

Рассмотрим одно из применений теоремы 3.

Определение 7. *Пусть $\mathfrak{H} = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ для некоторой H-функции h и V – $\mathfrak{H}$-инъектор некоторой разрешимой группы G. Мы будем называть главный p-фактор H/K группы G ($p \in \pi_i$) $h(\pi_i)$-покрываемым, если $H = K(V_{h(\pi_i)} \cap H)$, и $h(\pi_i)$-изолируемым, если $K = K(V_{h(\pi_i)} \cap H)$.*

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{H} = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ и h – приведенная H-функция $\mathfrak{H}$ такая, что $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j из I ($i \neq j$). Тогда для любой разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) главный p-фактор группы G $h(\pi_i)$-покрываем тогда и только тогда, когда он покрываем $h(\pi_i)$-радикалом $G_{h(\pi_i)}$;

(2) $\mathfrak{H}$-инъектор группы G покрывает каждый $h(\pi_i)$-покрываемый главный фактор группы G.

Доказательство. (1) Пусть $p \in \pi_i$ и главный p-фактор H/K группы G является $h(\pi_i)$-покрываемым. Так как $h(\pi_i) \subseteq h(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех i и j из I ($i \neq j$), то $V_{h(\pi_i)} = G_{h(\pi_i)}$. Тогда $H = K(V_{h(\pi_i)} \cap H) = K(G_{h(\pi_i)} \cap H)$ и $K(G_{h(\pi_i)} \cap H) = KG_{h(\pi_i)} \cap H$.

Значит $H = KG_{h(\pi_i)} \cap H$ и $H \subseteq KG_{h(\pi_i)}$. Отсюда следует, что главный p-фактор H/K группы G покрываем $h(\pi_i)$-радикалом $G_{h(\pi_i)}$. Обратное очевидно.

(2) Пусть $p \in \pi_i$ и главный p-фактор H/K группы G является $h(\pi_i)$-покрываемым. Тогда по утверждению (1) настоящей теоремы главный p-фактор H/K группы G покрываем $h(\pi_i)$-радикалом $G_{h(\pi_i)}$. Но $G_{h(\pi_i)} \subseteq G_{\mathfrak{H}} \subseteq V$ для любого $\mathfrak{H}$-инъектора V группы G. Следовательно, V покрывает H/K. И утверждение (2) доказано.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter De Gruyter: Berlin–N. Y., 1992. – 891 p.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.
3. Воробьев, Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1991. – № 6. – С. 22–26.
4. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, №. 2. – P. 193–207.
5. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Beijing–N. Y.–Dordrecht–Boston–London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

Поступила в редакцию 05.03.2012. Принята в печать 16.04.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: mg-semenow@mail.ru – Семенов М.Г.