



О факторизациях ограниченных формаций

В.М. Селькин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Все рассматриваемые группы конечны. Формация F называется ограниченной, если формация F является подформацией некоторой однопорожденной формации. В данной работе доказывается, что произведение $F_1 F_2 F_3$ любых неединичных формаций F_1, F_2, F_3 не является ограниченной формацией. Разрешимо ω -насыщенная формация F называется ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией, если она является подформацией некоторой однопорожденной разрешимо ω -насыщенной формации. Если $F = F_1 F_2 F_3 F_4$, где F_i – неединичная формация ($i=1, 2, 3, 4$) и $|\omega \cap \pi(\text{Com}(F))| \neq 1$, то F не является ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией.

Ключевые слова: факторизация формаций, формации конечных групп, разрешимо ω -насыщенная формация, ограниченная формация.

On factorizations of limited formations

V.M. Selkin

Educational establishment «Gomel State University named after Francisk Skorina»

All groups considered are finite. A formation F is called a limited formation if F is a subformation of a one-generation formation. In this paper we proved that the product $F_1 F_2 F_3$ of any nonidentity formations F_1, F_2, F_3 is not a limited formation. A solubly ω -saturated formation F is called a limited solubly ω -saturated formation if F is a subformation of a one-generation solubly ω -saturated formation. If $F = F_1 F_2 F_3 F_4$, where F_i is a nonidentity formation ($i=1, 2, 3, 4$) and $|\omega \cap \pi(\text{Com}(F))| \neq 1$, then F is not a limited solubly ω -saturated formation.

Key words: factorization of formation, formation of finite groups, solubly ω -saturated formation, limited formation.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что формация F – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, что каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, обозначаемой через G^F , факторгруппа по которой снова принадлежит F . Эта подгруппа называется F -корадикалом группы G . Произведением МН формаций M и N называется класс групп $(G | G^H \in M)$. Пусть p – простое число. Неединичная формация F называется p -насыщенной, если из $G/O_p(\Phi(G)) \in F$ всегда следует, что $G \in F$ для всякого простого числа p . Неединичная формация F называется разрешимо p -насыщенной, если из $G/\Phi(O_p(G)) \in F$ всегда следует, что $G \in F$. Если формация F является p -насыщенной (разрешимо p -насыщенной)

для всех $p \in \omega$, то F называется ω -насыщенной (разрешимо ω -насыщенной) формацией [1–2]. Пересечение всех разрешимо ω -насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G , называется однопорожденной разрешимо ω -насыщенной формацией.

Заметим, что ω -насыщенные формации оказались полезными при изучении различных классов разрешимых групп. В то же время при изучении групп необязательно разрешимых более полезными оказались разрешимо ω -насыщенные формации [3–4].

Формация F называется ограниченной, если формация F является подформацией некоторой однопорожденной формации. Аналогично разрешимо ω -насыщенная формация F называется ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией, если она является подформацией некоторой однопорожденной разрешимо ω -насыщенной формации. Изучение ограни-

ченных и однопорожденных разрешимо ω -насыщенных формаций особенно важно, поскольку, с одной стороны, такие формации являются компактными элементами решетки всех разрешимых ω -насыщенных формаций, что во многих случаях сводит изучение разрешимо ω -насыщенных формаций к изучению формаций такого типа. С другой стороны, однопорожденные и ограниченные ω -насыщенные формации оказались чрезвычайно полезными при построении примеров формаций.

В работе [5] нами получена следующая теорема.

Теорема 1. *Произведение*

$$F_1 F_2 \dots F_t \quad (I)$$

является несократимой факторизацией некоторой ограниченной разрешимо ω -насыщенной формации F тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) $t \leq 3$ и каждый фактор из (I) неединичная формация;

(2) $F_2 F_3$ – однопорожденная ω -насыщенная подформация из ω и $\pi(\text{Com}(F)) \cap \omega \subseteq \pi(F_1)$;

(3) если $F_1 \nsubseteq N_\omega$, тогда $t = 2$, F_2 – абелева однопорожденная формация и для любых групп $A^H \in M$ и $B \in F_2$, $(|A/F_\omega(A)|, |B|) = 1$ и $(|A/O_\omega(A)|, |B|) = 1$;

(4) если $F_1 \subseteq N_\omega$ и $t = 3$, тогда $|\pi(F_1)| > 1$, F_3 – однопорожденная абелева формация и для всех $p \in \pi(F_1)$, формация $F_2(p)$ является нильпотентной однопорожденной формацией, и для всех групп $A \in F_2$ и $B \in F_3$, $\pi(A/O_p(A)) \cap \pi(B) = \emptyset$;

(5) если $F_1 \subseteq N_\omega$, $t = 2$ и $|\pi(F_1)| > 1$, тогда формации $F_2(\omega')$ и F_2 ограничены;

(6) если $F_1 = N_p$ для некоторого простого числа p , то $F_2(\omega')$ и $F_2(p)$ (если $p \in \omega$) являются ограниченными формациями, $F_2 \nsubseteq F_1$, и существует такая группа $B \in F_2$, что для всех групп $A \in F_1$, F_2 -корадикал группы T^{F_2} регулярного сплетения $T = A \in B$ содержится напрямую в базе группы T .

Целью данной работы является нахождение приложений этой теоремы в теории произведений формаций.

Предварительные результаты. Следуя [6], мы будем использовать символ $C^p(G)$, чтобы обозначать пересечение всех централизаторов

абелевых p -главных факторов конечной группы G (заметим, что $C^p(G) = G$, если G не имеет таких главных факторов). Пусть X – множество конечных групп. Тогда используем символ $\text{Com}(X)$, чтобы обозначить класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \trianglelefteq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in X$. Также пишем, что $\text{Com}(G)$ для множества $\text{Com}(\{G\})$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Для любой функции f вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\} \quad (II)$$

мы определим, следуя [3],

$$CF_\omega(f) =$$

$$= \{G \text{ – конечная группа} \mid G/(R(G) \cap O_\omega(G)) \in f(\omega') \text{ и}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для любого простого}$$

$$\text{числа } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G))\},$$

где подгруппа $R(G)$ обозначает корадикал группы G (т.е. $R(G)$ – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G) и $\emptyset \neq \omega \subseteq P$. Формация F называется разрешимо ω -насыщенной, если $F = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (II). В этом случае f называется ω -композиционный спутник формации F .

Если

$$F = F_1 \dots F_t \quad (III)$$

произведение формаций $F_1, \dots, F_t$ и

$$F \neq F_1 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_t$$

для всех $i = 1, \dots, t$, тогда (III) называется несократимой факторизацией формации F .

Лемма 1 ([7]). Пусть F – разрешимо ω -насыщенная формация. Если $F \subseteq N_\omega N$, то F – наследственная формация.

Лемма 2 (лемма 3.1.9 [8]). Пусть $G = A \in B = [K]B$, где $K = \prod_{b \in B} A_1^b$ – база сплетения G и A_1 – первая копия A в K . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если L – минимальная нормальная подгруппа группы G , L_1 – проекция этой подгруппы в A_1 и $L_1 \not\subseteq Z(A_1)$, то $L = \prod_{b \in B} (L \cap A_1^b)$;

2) если R – минимальная нормальная подгруппа в A_1 и $R \not\subseteq Z(A_1)$, то $R_1 = \prod_{b \in B} R^b$ – минимальная нормальная подгруппа в G ;

3) $\text{Soc} G \subseteq \prod_{b \in B} M^b$, где $M = \text{Soc} A_1$;

4) если L – нормальная подгруппа группы G , $L \subseteq K$ и M – проекция этой подгруппы в A_1 , то сплетение $(A_1 / M) \in B$ является гомоморфным образом факторгруппы G / L .

Лемма 3 (лемма 3.1.5 [8]). Пусть $A \in \text{sform} G$. Тогда:

1) $\exp(A)$ делит $\exp(G)$;

2) порядок каждого главного фактора группы A не превосходит максимум порядков главных факторов группы G ;

3) степень любого нильпотентного фактора группы A не превосходит наибольшую из степеней нильпотентных факторов группы G .

Лемма 4 (следствие 3.3.7 [8]). Пусть p – простое число. Тогда формация N_p не может быть представлена в виде $N_p = MN$, где M и N являются собственными подформациями формации N_p .

Лемма 5 (лемма 3.1 [5]). Пусть $F = s^\omega \text{form} G$ – однопорожденная наследственная ω -насыщенная формация и $MN \subseteq F$, где M и N – неединичные формации. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) все простые группы формации M являются абелевыми;

2) если для некоторой группы $B \in N$ и некоторого простого числа p , $p^{|G|}$ делит экспоненту группы B , то $|A| = p$ для всех простых групп $A \in M$;

3) если существует простая группа $A \in M$ такая, что $|A| \notin \omega$, то N является абелевой формацией.

Лемма 6 (лемма 4.5 [5]). Пусть $F = MN$, где M – разрешимо ω -насыщенная формация с внутренним ω -композиционным спутником m . Пусть N – такая непустая формация, что $\pi(\text{Com}(N)) \cap \omega \subseteq \pi(\text{Com}(M))$. Тогда $F = CF_\omega(f)$, где

$$f(a) = \begin{cases} m(p)N, & \text{если } a = p \in \pi(\text{Com}(M)) \cap \omega; \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(M)); \\ m(\omega')N, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Лемма 7 (лемма 4.6 [5]). Пусть $F = MN$ – разрешимо ω -насыщенная формация, где M и N формации, причем $M \subseteq N$. Пусть f – минимальный ω -композиционный спутник

формации F . Предположим, что $|\pi(M) \cap \omega| > 1$. Тогда

$$H = \text{form}(f(p) \cup f(q))$$

для любых двух различных простых чисел $\{p, q\} \in \pi(M) \cap \omega$.

Приложения теоремы 1. Теорема 2 (следствие 3.3.3 [8]). Пусть произведение $F_1 \dots F_t$ формаций $F_1, \dots, F_t$ является несократимой факторизацией формации F . Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) F – ограниченная формация;

(2) $t = 2$ и обе формации F_1, F_2 являются однопорожденными, F_1 – нильпотентная формация, F_2 – абелева формация, $(|A|, |B|) = 1$ для любых групп $A \in F_1$ и $B \in F_2$;

(3) F – однопорожденная формация.

Доказательство. Заметим, что если p – простое число, и F такая формация, что $p \notin \pi(\text{Com}(F))$, то $F = CF_p(f)$, где $f(p) = \emptyset$ и $f(\omega') = F$.

Пусть (1) имеет место, т.е.

$$F = F_1 \dots F_t \subseteq \text{form}(G).$$

Так как, очевидно,

$$\text{Com}(F) \subseteq \text{Com}(G),$$

то можем выбрать такое простое число p , что $p \notin \pi(\text{Com}(F))$. В этом случае, $F \subseteq c_p \text{form}(G)$ – ограниченная разрешимо p -насыщенная формация. Следовательно, все утверждения (1)–(6) теоремы 1 выполняются для формации $F = F_1 \dots F_t$. Таким образом, F_1 – такая однопорожденная p -насыщенная формация, что $F_1 \subseteq N_p N$ и

$$\pi(\text{Com}(F)) \cap \omega = \pi(F_1).$$

Ввиду леммы 1 имеем $F_1 \subseteq F$. Так как F_1 – разрешимая формация, то

$$p \notin \pi(\text{Com}(F_1)) = \pi(F_1).$$

Следовательно, $F_1 \subseteq N$. Значит, $F_1 \in N_p$. По теореме 1 (3), произведение $F_2 \dots F_t$ является абелевой формацией и $t = 2$. Так как $p \notin \pi(F_1)$, то для любых групп $A \in F_1$ и $B \in F_2$ имеем

$$(|A / O_p(A)|, |B|) = (|A|, |B|) = 1.$$

Покажем, что из (2) следует (3). Предположим, что $F = F_1 F_2$, где условия (1)–(2) теоремы

выполняются для формаций F_1 и F_2 . Пусть A и B такие группы, что $F_1 = \text{form}(A)$ и $F_2 = \text{form}(B)$. И пусть $\pi_1 = \pi(A)$, $\pi_2 = \pi(B)$. Тогда, очевидно, для любой группы $T \in F$, имеем $\pi(T) \subseteq \pi_1 \cup \pi_2$. Это показывает, что существует такое простое число p , что $p \notin \pi(\text{Com}(F))$. Тогда условия (1)–(3) теоремы 1 выполняются для F_1 и F_2 . Следовательно, $F \subseteq c_p \text{form}(G)$ для некоторой группы G . Но так как p можно выбрать такое, что $p \notin \pi(\text{Com}(G))$, то

$$c_p \text{form}(G) = \text{form}(G).$$

Значит, F является ограниченной формацией.

Из условия (3) следует условие (1). Теорема доказана.

Теорема 3 (следствие 3.3.5 [8]). *Произведение $F_1 F_2 F_3$ любых неединичных формаций F_1, F_2, F_3 не является ограниченной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $F \subseteq \text{form}(G)$ для некоторой группы G . Пусть $M = F_1$ и $H = F_2 F_3$. Предположим, что $F = H$. Рассмотрим $MF = MMH$. Следовательно, $MH = MMH$. Значит, $F = M^2 H$. Проводя данные рассуждения n раз получаем, что $M^n H = F$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $m = |G|$, $A_1 \square \dots \square A_m$ – простая группа формации M и A – простая группа формации H . Пусть

$$B = A_1 \triangleleft A_2 \triangleleft \dots \triangleleft A_m \triangleleft A.$$

Тогда $B \in F$. Предположим, что A_1 – абелева группа. Ввиду [6; А (18.2)] мы знаем, что группа B имеет подгруппу T , которая изоморфна группе

$$A_1 \triangleleft A_2 \triangleleft \dots \triangleleft A_{m-1} \triangleleft A_m.$$

Но ввиду леммы 2 группа T имеет такой класс nilпотентности, что $s(T) \geq m+1$, это противоречит лемме 3. Следовательно, A_1 – простая неабелева группа. По лемме 2, G является монолитической группой, и ее монолит имеет порядок больший, чем $|G|$. Получили противоречие с леммой 3. Следовательно, $F \neq H$. Аналогично можно показать, что $F \neq M$. Таким образом, ввиду теоремы 2 $F_2 F_3$ – абелева формация.

Пусть A – простая группа формации F_2 , и B – простая группа формации F_3 . Рассмотрим

$$G = A \triangleleft B = [K]B,$$

где K – база регулярного сплетения G . Нетрудно видеть, что $G \in F_2 F_3$. Так как формация $F_2 F_3$ абелева, то $B \subseteq C_G(K)$. Но $C_G(K) \subseteq K$. Вновь полученное противоречие показывает, что предположение $F \subseteq \text{form}(G)$ для некоторой группы G неверно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть F – ограниченная формация. Тогда F либо неразложимая, либо наследственная формация.*

Теорема 4. *Если $F = F_1 F_2 F_3 F_4$, где F_i – неединичная формация ($i=1, 2, 3, 4$) и $|\omega \cap \pi(\text{Com}(F))| \neq 1$, то F не является ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторой группы G имеем

$$F = F_1 F_2 F_3 F_4 \subseteq c_\omega \text{form}(G).$$

Пусть f – минимальный ω -композиционный спутник формации F . И пусть $M = F_1$, $H = F_2 F_3 F_4$, $|G| = n$, $\pi = \pi(\text{Com}(F)) \cap \omega$. Если $\pi = \emptyset$, то видим, что $F \subseteq c_\omega \text{form}(G) = \text{form}(G)$, т.е. F – ограниченная формация, что противоречит теореме 3. Следовательно, $\pi \neq \emptyset$.

Рассмотрим случай, когда $N_p \subseteq H$ для некоторого простого числа $p \in \pi$. Так как $|\pi| > 1$, то существует такое простое число $q \in \pi$, $\{p\}$, что $N_q \subseteq F$. Ввиду леммы 4 формация N_q не может быть представлена в виде произведения своих собственных подформаций. Значит, либо $N_q \subseteq M$, либо $N_q \subseteq H$. Пусть $N_q \subseteq M$. Тогда существует группа A простого порядка q , принадлежащая формации M . Ввиду леммы 5 все простые группы формации M имеют порядок p . Противоречие. Значит, $N_q \subseteq H$. Но ввиду нашего предположения $N_p \subseteq H$. Следовательно, ввиду леммы 4 все простые группы формации M имеют простой порядок $p = q$. Вновь полученное противоречие показывает, что $N_p \nsubseteq H$ для всех $p \in \pi$.

Пусть $A \in N_p$. Так как $N_p \subseteq F$, то $N_p \cap F = N_p$. Следовательно, $A^H \in M \cap N_p$.

Значит, $A^H = A^{N_p \cap H}$. Таким образом,

$$A^{N_p \cap H} \in N_p \cap M,$$

то

$$A \in (N_p \cap M)(N_p \cap H).$$

Следовательно,

$$N_p \subseteq (N_p \cap M)(N_p \cap H).$$

Пусть A теперь

$$A \in (N_p \cap M)(N_p \cap H).$$

Тогда

$$A^{N_p \cap H} \in N_p \cap M.$$

Так как $A^H = A^{N_p \cap H}$, то $A^H \in M$. Таким образом,

$$A \in F \cap N_p = N_p.$$

Следовательно,

$$(N_p \cap M)(N_p \cap H) \subseteq N_p.$$

Значит,

$$N_p = (N_p \cap M)(N_p \cap H).$$

Ввиду леммы 5 имеем $N_p \subseteq M$, и поэтому $N_\pi \subseteq M$. Тогда

$$F_0 = N_\pi H \subseteq F.$$

Ввиду леммы 6 F_0 – разрешимо ω -насыщенная формация. Пусть h – минимальный ω -композиционный спутник формации F_0 , то $h \leq f$. Используя лемму 7, видим, что

$$H = \text{form}(\bigcup_{p \in \pi} h(p)) \subseteq \text{form}(G / C^p(G) \mid p \in \pi) =$$

$$= \text{form}((G / C^{p_1}(G)) \times \dots \times (G / C^{p_t}(G))),$$

где $\{p_1, \dots, p_t\} = \pi$. Таким образом, $H = F_2 F_3 F_4$ – ограниченная формация, что противоречит теореме 3. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p -local formations of finite group / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – № 186. – P. 57–65.
2. Shemetkov, L.A. On partially saturated formations and residuals of finite groups / L.A. Shemetkov // Communication in algebra. – 2001. – № 29(9). – P. 4125–4137.
3. Шеметков, Л.А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Skiba, A.N. Multiply L -Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Zh. – 2000. – № 52(6). – P. 783–797.
5. Go, W. Factorization theory of one-generated Bear ω -local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35, Issue. – P. 2901–2931.
6. Doerk, K. Finite soluble group, Walter de Gruyter / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y., 1992. – 889 p.
7. Джехад, Д. Частично локальные формации с системами наследственных подформаций / Д. Джехад, А.Н. Скиба // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 3. – С. 13–16.
8. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

Поступила в редакцию 27.03.2012. Принята в печать 16.04.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: vselkin@gsu.by – Селькин В.М.