УДК 512.542

О факторизациях ограниченных формаций

В.М. Селькин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Все рассматриваемые группы конечны. Формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной, если формация $\mathfrak{F}$ является подформацией некоторой однопорожденной формации. В данной работе доказывается, что произведение $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ любых неединичных формаций $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ не является ограниченной формацией. Разрешимо ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной разрешимо ω-насыщенной формацией, если она является подформацией некоторой однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формации. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_4$, где $\mathfrak{F}_i$ – неединичная формация ($i = 1, 2, 3, 4$) и $|\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))| \neq 1$, то $\mathfrak{F}$ не является ограниченной разрешимо ω-насыщенной формацией.

Ключевые слова: *факторизация формаций, формации конечных групп, разрешимо ω-насыщенная формация, ограниченная формация.*

On factorizations of limited formations

V.M. Selkin

Educational establishment «Gomel State University named after Francisk Skorina»

All groups considered are finite. A formation $\mathfrak{F}$ is called a limited formation if $\mathfrak{F}$ is a subformation of a one-generation formation. In this paper we proved that the product $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ of any nonidentity formations $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ is not a limited formation. A solubly ω-saturated formation $\mathfrak{F}$ is called a limited solubly ω-saturated formation if $\mathfrak{F}$ is a subformation of a one-generation solubly ω-saturated formation. If $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_4$, where $\mathfrak{F}_i$ is a nonidentity formation ($i = 1, 2, 3, 4$) and $|\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))| \neq 1$, then $\mathfrak{F}$ is not a limited solubly ω-saturated formation.

Key words: *factorization of formation, formation of finite groups, solubly ω-saturated formation, limited formation.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, что каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, обозначаемой через $G^{\mathfrak{F}}$, факторгруппа по которой снова принадлежит $\mathfrak{F}$. Эта подгруппа называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Пусть p – простое число. Неединичная формация $\mathfrak{F}$ называется p-насыщенной, если из $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$ для всякого простого числа p. Неединичная формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо p-насыщенной, если из $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Если формация $\mathfrak{F}$ является p-насыщенной (разрешимо p-насыщенной) для всех $p \in \omega$, то $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной (разрешимо ω-насыщенной) формацией [1–2]. Пересечение всех разрешимо ω-насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G, называется однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формацией. Заметим, что ω-насыщенные формации оказались полезными при изучении различных классов разрешимых групп. В то же время при изучении групп необязательно разрешимых более полезными оказались разрешимо ω-насыщенные формации [3–4].

Формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной, если формация $\mathfrak{F}$ является подформацией некоторой однопорожденной формации. Аналогично разрешимо ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной разрешимо ω-насыщенной формацией, если она является подформацией некоторой однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формации. Изучение ограниченных и однопорожденных разрешимо

ω-насыщенных формаций особенно важно, поскольку, с одной стороны, такие формации являются компактными элементами решетки всех разрешимых ω-насыщенных формаций, что во многих случаях сводит изучение разрешимо ω-насыщенных формаций к изучению формаций такого типа. С другой стороны, однопорожденные и ограниченные ω-насыщенные формации оказались чрезвычайно полезными при построении примеров формаций.

В работе [5] нами получена следующая теорема.

Теорема 1. *Произведение*

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_t \qquad (I)$$

является несократимой факторизацией некоторой ограниченной разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) $t \le 3$ и каждый фактор из (I) неединичная формация;

(2) $\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ – однопорожденная ω-насыщенная подформация из ω и $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1)$;

(3) если $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$, тогда $t = 2$, $\mathfrak{F}_2$ – абелева однопорожденная формация и для любых групп $A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{F}_2$, $(|A/F_\omega(A)|, |B|) = 1$ и $(|A/O_\omega(A)|, |B|) = 1$;

(4) если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $t = 3$, тогда $|\pi(\mathfrak{F}_1)| > 1$, $\mathfrak{F}_3$ – однопорожденная абелева формация и для всех $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$, формация $\mathfrak{F}_2(p)$ является нильпотентной однопорожденной формацией, и для всех групп $A \in \mathfrak{F}_2$ и $B \in \mathfrak{F}_3$, $\pi(A/O_p(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$;

(5) если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, $t = 2$ и $|\pi(\mathfrak{F}_1)| > 1$, тогда формации $\mathfrak{F}_2(\omega')$ и $\mathfrak{F}_2$ ограничены;

(6) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ для некоторого простого числа p, то $\mathfrak{F}_2(\omega')$ и $\mathfrak{F}_2(p)$ (если $p \in \omega$) являются ограниченными формациями, $\mathfrak{F}_2 \not\subseteq \mathfrak{F}_1$, и существует такая группа $B \in \mathfrak{F}_2$, что для всех групп $A \in \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$-корадикал группы $T^{\mathfrak{F}_2}$ регулярного сплетения $T = A \wr B$ содержится подпрямо в базе группы T.

Целью данной работы является нахождение приложений этой теоремы в теории произведений формаций.

Предварительные результаты. Следуя [6], мы будем использовать символ $C^p(G)$, чтобы обозначать пересечение всех централизаторов абелевых p-главных факторов конечной группы G (заметим, что $C^p(G) = G$, если G не имеет таких главных факторов). Пусть $\mathfrak{X}$ – множество конечных групп. Тогда используем символ $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$, чтобы обозначить класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. Также пишем, что $\mathrm{Com}(G)$ для множества $\mathrm{Com}(\{G\})$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Для любой функции f вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\} \qquad (II)$$

мы определим, следуя [3],

$$CF_\omega(f) =$$
$$= \{G \text{ – конечная группа } | G/(R(G) \cap O_\omega(G)) \in f(\omega')$$
и
$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для любого простого числа } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))\},$$

где подгруппа $R(G)$ обозначает корадикал группы G (т.е. $R(G)$ – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G) и $\varnothing \ne \omega \subseteq \mathbb{P}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (II). В этом случае f называется ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Если

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_t \qquad (III)$$

произведение формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t$ и

$$\mathfrak{F} \ne \mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \cdots \mathfrak{F}_t$$

для всех $i = 1, \ldots, t$, тогда (III) называется несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 1 ([7]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо ω-насыщенная формация. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F}$ – наследственная формация.*

Лемма 2 (лемма 3.1.9 [8]). *Пусть $G = A \wr B = [K]B$, где $K = \prod_{b \in B} A_1^b$ – база сплетения G и A_1 – первая копия A в K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, L_1 – проекция этой подгруппы в A_1 и $L_1 \not\subseteq Z(A_1)$, то $L = \prod_{b \in B} (L \cap A_1)^b$;

2) если R – минимальная нормальная подгруппа в A_1 и $R \notin Z(A_1)$, то $R_1 = \prod_{b \in B} R^b$ – минимальная нормальная подгруппа в G;

3) $\mathrm{Soc}G \subseteq \prod_{b\in B} M^b$ *, где* $M = \mathrm{Soc}A_1$*;*

4) если L *– нормальная подгруппа группы* G, $L \subseteq K$ *и* M *– проекция этой подгруппы в* A_1*, то сплетение* $(A_1/M)\wr B$ *является гомоморфным образом факторгруппы* G/L.

Лемма 3 (лемма 3.1.5 [8]). *Пусть* $A \in \mathrm{sform}G$. *Тогда:*

1) $\exp(A)$ *делит* $\exp(G)$*;*

2) порядок каждого главного фактора группы A *не превосходит максимум порядков главных факторов группы* G*;*

3) ступень любого нильпотентного фактора группы A *не превосходит наибольшую из ступеней нильпотентных факторов группы* G.

Лемма 4 (следствие 3.3.7 [8]). *Пусть* p *– простое число. Тогда формация* $\mathfrak{N}_p$ *не может быть представлена в виде* $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$*, где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *являются собственными подформациями формации* $\mathfrak{N}_p$.

Лемма 5 (лемма 3.1 [5]). *Пусть* $\mathfrak{F} = s^{\omega}\mathrm{form}G$ *– однопорожденная наследственная* ω*-насыщенная формация и* $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$*, где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– неединичные формации. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) все простые группы формации $\mathfrak{M}$ *являются абелевыми;*

2) если для некоторой группы $B \in \mathfrak{H}$ *и некоторого простого числа* p, $p^{|G|}$ *делит экспоненту группы* B*, то* $|A| = p$ *для всех простых групп* $A \in \mathfrak{M}$*;*

3) если существует простая группа $A \in \mathfrak{M}$ *такая, что* $|A| \notin \omega$*, то* $\mathfrak{H}$ *является абелевой формацией.*

Лемма 6 (лемма 4.5 [5]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$*, где* $\mathfrak{M}$ *– разрешимо* ω*-насыщенная формация с внутренним* ω*-композиционным спутником* m. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– такая непустая формация, что* $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})) \cap \omega \subseteq \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$*, где*

$$f(a) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если} \quad a = p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})) \cap \omega; \\ \varnothing, & \text{если} \quad a = p \in \omega \setminus \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M})); \\ m(\omega')\mathfrak{H}, & \text{если} \quad a = \omega'. \end{cases}$$

Лемма 7 (лемма 4.6 [5]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *– разрешимо* ω*-насыщенная формация, где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *формации, причем* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. *Пусть* f *– минимальный* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Предположим, что* $|\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega| > 1$. *Тогда*

$$\mathfrak{H} = \mathrm{form}(f(p) \cup f(q))$$

для любых двух различных простых чисел $\{p, q\} \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$.

Приложения теоремы 1. Теорема 2 (следствие 3.3.3 [8]). *Пусть произведение* $\mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t$ *формаций* $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$ *является несократимой факторизацией формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{F}$ *– ограниченная формация;*

(2) $t = 2$ *и обе формации* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ *являются однопорожденными,* $\mathfrak{F}_1$ *– нильпотентная формация,* $\mathfrak{F}_2$ *– абелева формация,* $(|A|, |B|) = 1$ *для любых групп* $A \in \mathfrak{F}_1$ *и* $B \in \mathfrak{F}_2$*;*

(3) $\mathfrak{F}$ *– однопорожденная формация.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если p – простое число, и $\mathfrak{F}$ такая формация, что $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$, то $\mathfrak{F} = CF_p(f)$, где $f(p) = \varnothing$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$.

Пусть (1) имеет место, т.е.

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t \subseteq \mathrm{form}(G).$$

Так как, очевидно,

$$\mathrm{Com}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{Com}(G),$$

то можем выбрать такое простое число p, что $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$. В этом случае, $\mathfrak{F} \subseteq c_p\mathrm{form}(G)$ – ограниченная разрешимо p-насыщенная формация. Следовательно, все утверждения (1)–(6) теоремы 1 выполняются для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1$ – такая однопорожденная p-насыщенная формация, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$ и

$$\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}_1).$$

Ввиду леммы 1 имеем $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}_1$ – разрешимая формация, то

$$p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}_1)) = \pi(\mathfrak{F}_1).$$

Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Значит, $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_p$. По теореме 1 (3), произведение $\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t$ является абелевой формацией и $t = 2$. Так как $p \notin \pi(\mathfrak{F}_1)$, то для любых групп $A \in \mathfrak{F}_1$ и $B \in \mathfrak{F}_2$ имеем

$$(|A/O_p(A)|, |B|) = (|A|, |B|) = 1.$$

Покажем, что из (2) следует (3). Предположим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, где условия (1)–(2) теоремы выполняются для формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Пусть A и B такие группы, что $\mathfrak{F}_1 = \mathrm{form}(A)$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathrm{form}(B)$. И пусть $\pi_1 = \pi(A)$, $\pi_2 = \pi(B)$. Тогда, очевидно, для любой группы $T \in \mathfrak{F}$, имеем $\pi(T) \subseteq \pi_1 \cup \pi_2$. Это показывает, что существует такое простое число p, что $p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$. Тогда условия (1)–(3) теоремы 1 выполняются для $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq c_p\mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G. Но так как p можно выбрать такое, что $p \notin \pi(\mathrm{Com}(G))$, то

$$c_p\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(G).$$

Значит, $\mathfrak{F}$ является ограниченной формацией.

Из условия (3) следует условие (1). Теорема доказана.

Теорема 3 (следствие 3.3.5 [8]). *Произведение* $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ *любых неединичных формаций* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ *не является ограниченной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$. Предположим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Рассмотрим $\mathfrak{M}\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}^2\mathfrak{H}$. Проводя данные рассуждения n раз получаем, что $\mathfrak{M}^n\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ для каждого $n \in$ □. Пусть $m = |G|$, A_1 □ … □ A_m – простая группа формации $\mathfrak{M}$ и A – простая группа формации $\mathfrak{H}$. Пусть

$$B = A_1 \wr (A_2 \wr \ldots \wr (A_m \wr A)).$$

Тогда $B \in \mathfrak{F}$. Предположим, что A_i – абелева группа. Ввиду [6; A (18.2)] мы знаем, что группа B имеет подгруппу T, которая изоморфна группе

$$A_1 \wr (A_2 \wr \ldots \wr (A_{m-1} \wr A_m)).$$

Но ввиду леммы 2 группа T имеет такой класс нильпотентности, что $c(T) \geq m+1$, это противоречит лемме 3. Следовательно, A_i – простая неабелева группа. По лемме 2, G является монолитической группой, и ее монолит имеет порядок больший, чем $|G|$. Получили противоречие с леммой 3. Следовательно, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H}$. Аналогично можно показать, что $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{M}$. Таким образом, ввиду теоремы 2 $\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ – абелева формация.

Пусть A – простая группа формации $\mathfrak{F}_2$, и B – простая группа формации $\mathfrak{F}_3$. Рассмотрим

$$G = A \wr B = [K]B,$$

где K – база регулярного сплетения G. Нетрудно видеть, что $G \in \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$. Так как формация $\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ абелева, то $B \subseteq C_G(K)$. Но $C_G(K) \subseteq K$. Вновь полученное противоречие показывает, что предположение $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G неверно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– ограниченная формация. Тогда* $\mathfrak{F}$ *либо неразложимая, либо наследственная формация.*

Теорема 4. *Если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_4$, *где* $\mathfrak{F}_i$ *– неединичная формация* ($i = 1,2,3,4$) *и* $|\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))| \neq 1$, *то* $\mathfrak{F}$ *не является ограниченной разрешимо* ω*-насыщенной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторой группы G имеем

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_4 \subseteq c_\omega\mathrm{form}(G).$$

Пусть f – минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. И пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_4$, $|G| = n$, $\pi = \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega$. Если $\pi = \varnothing$, то видим, что $\mathfrak{F} \subseteq c_\omega\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(G)$, т.е. $\mathfrak{F}$ – ограниченная формация, что противоречит теореме 3. Следовательно, $\pi \neq \varnothing$.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$ для некоторого простого числа $p \in \pi$. Так как $|\pi| > 1$, то существует такое простое число $q \in \pi$, $\{p\}$, что $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 4 формация $\mathfrak{N}_q$ не может быть представлена в виде произведения своих собственных подформаций. Значит, либо $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}$, либо $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда существует группа A простого порядка q, принадлежащая формации $\mathfrak{M}$. Ввиду леммы 5 все простые группы формации $\mathfrak{M}$ имеют порядок p. Противоречие. Значит, $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$. Но ввиду нашего предположения $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, ввиду леммы 4 все простые группы формации $\mathfrak{M}$ имеют простой порядок $p = q$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{N}_p$ Ъ $\mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$.

Пусть $A \in \mathfrak{N}_p$. Так как $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p$. Значит, $A^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H}}$. Таким образом,

$$A^{\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M},$$

то

$$A \in (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M})(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H}).$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}_p \subseteq (\mathcal{N}_p \cap \mathcal{M})(\mathcal{N}_p \cap \mathfrak{H}).$$

Пусть A теперь

$$A \in (\mathcal{N}_p \cap \mathcal{M})(\mathcal{N}_p \cap \mathfrak{H}).$$

Тогда

$$A^{\mathcal{N}_p \cap \mathfrak{H}} \in \mathcal{N}_p \cap \mathcal{M}.$$

Так как $A^{\mathfrak{H}} = A^{\mathcal{N}_p \cap \mathfrak{H}}$, то $A^{\mathfrak{H}} \in \mathcal{M}$. Таким образом,

$$A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}_p = \mathcal{N}_p.$$

Следовательно,

$$(\mathcal{N}_p \cap \mathcal{M})(\mathcal{N}_p \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{N}_p.$$

Значит,

$$\mathcal{N}_p = (\mathcal{N}_p \cap \mathcal{M})(\mathcal{N}_p \cap \mathfrak{H}).$$

Ввиду леммы 5 имеем $\mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{M}$, и поэтому $\mathcal{N}_\pi \subseteq \mathcal{M}$. Тогда

$$\mathfrak{F}_0 = \mathcal{N}_\pi \mathfrak{H} \subseteq \mathcal{F}.$$

Ввиду леммы 6 $\mathfrak{F}_0$ – разрешимо ω-насыщенная формация. Пусть h – минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_0$, то $h \le f$. Используя лемму 7, видим, что

$$\mathfrak{H} = \mathrm{form}\Big(\bigcup_{p\in\pi} h(p)\Big) \subseteq \mathrm{form}(G / C^p(G) \mid p \in \pi) =$$

$$= \mathrm{form}((G / C^{p_1}(G)) \times \ldots \times (G / C^{p_t}(G))),$$

где $\{p_1, \ldots, p_t\} = \pi$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_4$ – ограниченная формация, что противоречит теореме 3. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite group / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – № 186. – P. 57–65.
2. Shemetkov, L.A. On partially saturated formations and residuals of finete groups / L.A. Shemetkov // Comminication in algebra. – 2001. – № 29(9). – P. 4125–4137.
3. Шеметков, Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Skiba, A.N. Multiply $\mathfrak{L}$-Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Zh. – 2000. – № 52(6). – P. 783–797.
5. Go, W. Factorization theory of onegenerated Bear ω-local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35, Issue. – P. 2901–2931.
6. Doerk, K. Finite soluble group, Walter de gruyter / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y., 1992. – 889 p.
7. Джехад, Д. Частично локальные формации с системами наследственных подформаций / Д. Джехад, А.Н. Скиба // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 3. – С. 13–16.
8. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

Поступила в редакцию 27.03.2012. Принята в печать 16.04.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: vselkin@gsu.by – Селькин В.М.