МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

О СТОУНОВЫХ РЕШЕТКАХ ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

А.П. Мехович
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые в данной работе группы предполагаются конечными. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Пусть L – решетка с нулем. Тогда элемент a^* называется псевдодополнением элемента a ($\in L$), если $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ влечет за собой $x \le a^*$. Решеткой с псевдодополнениями называется решетка с нулем, в которой каждый элемент имеет псевдодополнение. Дистрибутивная решетка L с псевдодополнениями называется стоуновой, если она удовлетворяет стоунову тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1$$

для любого $a \in L$.

Цель работы – найти условия, при которых решетка частично композиционных формаций является стоуновой.

***Материал и методы.** Используются терминология и методы исследования классов конечных групп, а также теории решеток.*

***Результаты и их обсуждение.** Доказано, что решетка всех ω-композиционных подформаций ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$ стоунова тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Заключение.** В настоящей работе определены условия, при которых решетка всех ω-композиционных подформаций ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$ является стоуновой.*

***Ключевые слова:** конечная группа, формация групп, подформация, дополняемая подформация, ω-композиционная формация групп, псевдодополнение, решетка, решетка формаций, атом решетки.*

ON STONE LATTICES OF PARTIALLY COMPOSITION FORMATIONS

A.P. Mekhovich
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

All groups considered in the paper are supposed to be finite. The class of group $\mathfrak{F}$ is called a formation if it is closed concerning homomorphic images and finite subdirect products.

Let L be a lattice with a nil. Then an element a^* is called pseudocomplement to an element a ($\in L$), if from $a \wedge a^* = 0$ and $a \wedge x = 0$ it follows that $x \le a^*$. A lattice with pseudocomplements is a lattice with the nil in which each element has a pseudocomplement. The distribution lattice L with pseudocomplements is called Stone one if it satisfies Stone identity

$$a^* \vee (a^*)^* = 1$$

for any $a \in L$.

The purpose of the paper is to find conditions under which the lattice of partially composition formations is the Stone one.

Material and methods. *Terminology and methods of studying classes of finite groups are used as well as theories of lattices.*

Findings and their discussion. *It is proved that the lattice of all* ω*-composition subformations of* ω*-composition formation* $\mathfrak{F}$ *is the Stone one when and only when* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Conclusion. *Conditions are identified in the paper under which the lattice of all* ω*-compositional subformations of* ω*-composition formation* $\mathfrak{F}$ *is the Stone one.*

Key words: *finite group, formation of groups, subformation, complemented subformation,* ω*-composition formation of groups, pseudocomplemented, lattice, lattice of formations, atom of the lattice.*

Все рассматриваемые в данной работе группы предполагаются конечными. Используется стандартная терминология [1–4].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, т.е. класс групп, удовлетворяющий следующим условиям:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$.

Изучение решеток формаций конечных групп было начато в 1986 г. А.Н. Скибой в работе, где была установлена модулярность решетки всех формаций, а также модулярность решетки всех насыщенных формаций. Данные результаты получили развитие в различных направлениях. Одним из них является доказательство стоуновости решеток классов групп. В 2007 г. А.Н. Скибой и Н.Н. Воробьевым доказана стоуновость решетки n-кратно локальных и тотально локальных классов Фиттинга, в 2008 г. Н.Н. Воробьевым – стоуновость решетки n-кратно насыщенных и тотально насыщенных формаций, в 2012 г. Н.Н. Воробьевым, А.П. Меховичем – стоуновость решетки τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, в 2017 г. Н.Н. Воробьевым и А.И. Титовой – стоуновость решетки n-кратно ω-локальных и тотально ω-локальных классов Фиттинга, в 2020 г. О.В. Камозиной – стоуновость решетки n-кратно Ω-канонических классов Фиттинга.

В настоящей работе доказан аналог вышеуказанных результатов в теории частично композиционных формаций.

Материал и методы. Используются терминология и методы исследования классов конечных групп, а также теории решеток.

Цель работы – найти условия, при которых решетка частично композиционных формаций является стоуновой.

Результаты и их обсуждение. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbf{P} \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп $\mathfrak{X}$. Символами $R_\omega(G)$, $C^p(G)$ обозначаются соответственно наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G и пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p. Через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают соответственно класс всех нильпотентных групп, класс всех p-групп и класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f: \quad \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (*)$$

Следуя [4], сопоставим функции f вида $(*)$ класс групп

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

Для любой функции f вида $(*)$ класс $CF_\omega(f)$ является формацией. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида $(*)$, то $\mathfrak{F}$ называется ω-*композиционной формацией* с ω-*композиционным спутником* f [4]. Если $\omega = \mathbf{P}$, то ω-композиционная формация называется *композиционной формацией*. ω-Композиционный спутник f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если каждое его значение является подформацией формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают form $\mathfrak{X}$ и называют *формацией*, *порожденной* $\mathfrak{X}$. В частности, пишут form G в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной формацией* (см. [1]).

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1 (лемма 1.2.22 [1]). *Для любой совокупности групп* $\mathfrak{X}$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{X}).$$

Лемма 2 (лемма 2.4 [3]). *Справедливо равенство* $\mathrm{QR}_0\mathrm{Q} = \mathrm{QR}_0$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *полуформацией*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}\mathfrak{F}$ [1].

Лемма 3 (лемма 1.2.21 [1]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– полуформация*, *порожденная совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}(\mathfrak{X})$.

Лемма 4 (лемма 4.7.1 [5]). *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым монолитом R*, $\mathfrak{M}$ *– некоторая полуформация и* $A \in c_\omega\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{F}$ – ω-композиционная формация, то символом $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех ω-композиционных подформаций ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$. Через c_ω обозначают решетку всех ω-композиционных формаций.

Элемент *a* решетки *L* с нулем называется *атомом*, если для любого $x \in L$ из $0 < x \le a$ следует, что $x = a$ (см., например, [6]).

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}\,G$ *– однопорожденная* ω*-композиционная формация. Тогда у решетки* $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ *имеется лишь конечное число атомов*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $Lc_\omega(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = c_\omega\mathrm{form}\,A$ для некоторой простой группы A. Пусть A – неабелева группа. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}\,G$. Тогда согласно лемме 1,

$$c_\omega\mathrm{form}\,(G) = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{form}\,(G)) = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{QR}_0(G)).$$

В силу леммы 2

$$\begin{gathered} c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{QR}_0(G)) = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{QR}_0\mathrm{Q}(G)) = \\ = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{Q}(\mathrm{R}_0\mathrm{Q}(G))) = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{Q}(\mathrm{R}_0(\mathrm{Q}(G)))) = \\ = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{Q}(\mathrm{R}_0\mathfrak{H})) = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{QR}_0\mathfrak{H}), \end{gathered}$$

где, согласно лемме 3, $\mathfrak{H} = \mathrm{Q}(G)$ – полуформация, порожденная группой G. Ввиду леммы 1 имеет место равенство

$$c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{QR}_0\mathfrak{H}) = c_\omega\mathrm{form}(\mathrm{form}\mathfrak{H}) = c_\omega\mathrm{form}\mathfrak{H}.$$

Итак, $A \in c_\omega\mathrm{form}\mathfrak{H}$. Поскольку A – простая группа, то A – монолитическая группа с неабелевым монолитом $\mathrm{Soc}(A) = A$. Следовательно, по лемме 4 $A \in \mathfrak{H} = \mathrm{Q}(G)$. Это означает, что в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть $|A| = p$ – простое число, где $p \in \pi = \pi(G)$. Заметим, что класс всех π-групп $\mathfrak{G}_\pi$ является ω-композиционной формацией (см., например, [7] теорема 5). Поэтому из $A \in \mathfrak{G}_\pi$ следует

$$\mathfrak{M} = c_\omega\mathrm{form}\,A \subseteq \mathfrak{G}_\pi.$$

Но π – конечное множество. Поэтому в $\mathfrak{G}_\pi$ имеется лишь конечное число ω-композиционных подформаций, порожденных простой группой A порядка $p \in \pi = \pi(G)$. Это означает, что в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

Лемма 6 (теорема 3.1 [8]). *Решетка всех* τ*-замкнутых n-кратно* ω*-композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

Непосредственно из леммы 6 вытекает

Лемма 7. *Любая* ω*-композиционная формация есть решеточное объединение своих однопорожденных* ω*-композиционных подформаций*.

Следующая лемма дает способ построения минимального c_ω^{n-1}-значного спутника формации $\mathfrak{F} = c_\omega^n\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.

Лемма 8 (следствие 1.6.11 [5]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *непустая совокупность групп*, $\mathfrak{F} = c_\omega^n\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$, *где* $n \geq 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, *и пусть* f – *минимальный* c_ω^{n-1}*-значный* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = c_\omega^{n-1}\mathrm{form}(G / R_\omega(G)) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c_\omega^{n-1}\mathrm{form}(G / C^p(G)) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_p(h)$ *и спутник* h c_ω^{n-1}*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеют место*

$$f(p) = c_\omega^{n-1}\mathrm{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_\omega^{n-1}\mathrm{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(A) = 1).$$

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ и простого числа p полагают (см. [5])

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G / C^p \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbf{P} \setminus (\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))). \end{cases}$$

Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$, то спутник F называется *каноническим* ω*-композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$ и f – произвольный внутренний ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, то $f \leq F$ (см. [5] замечание 1.2.39).

Лемма 9 (замечание 1 [4]). *Любая* ω*-композиционная формация обладает каноническим* ω*-композиционным спутником*.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Символом $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначают [1] класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, …, $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *дополняемой* в $\mathfrak{F}$ [9], если $\mathfrak{M}$ дополняема в решетке подформаций формации $\mathfrak{F}$, т.е. если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$ (*дополнение* к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Лемма 10 (теорема 4.3.2 [1]). *Пусть* $\mathfrak{M}$ – *непустая подформация формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда если* $\mathfrak{H}$ – *дополнение* $\mathfrak{M}$ *к* $\mathfrak{F}$, *то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$.

Лемма 11 (теорема [10]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{H}$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *таких, что* $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ ω*-композиционна в том и только в том случае, когда* ω*-композиционна каждая из формаций* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$.

Лемма 12 (лемма 4.3.4 [1]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$ *и* $\mathfrak{M}$ – *непустая подформация формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_2)$.

Для ω-композиционных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают

$$\mathfrak{M} \vee_\omega \mathfrak{H} = c_\omega\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Лемма 13. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – ω*-композиционная формация*. *Тогда если формация* $\mathfrak{N}_p$ *дополняема в решетке* $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ *для каждого* $p \in \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{F}))$, *то* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 7 любая ω-композиционная формация есть объединение (в решетке c_ω) своих однопорожденных ω-композиционных подформаций, т.е.

$$\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}(\cup_{G \in \mathfrak{F}}\, c_\omega\mathrm{form}G).$$

Значит, для доказательства леммы достаточно показать, что она справедлива для любой однопорожденной ω-композиционной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$.

По лемме 8 в случае $n = 1$ формация $\mathfrak{M}$ обладает минимальным ω-композиционным спутником m. Тогда если $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, то в силу леммы 9 любая ω-композиционная формация обладает каноническим ω-композиционным спутником. Это означает, что выполняется

$$\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p\, m(p) = M(p) \subseteq \mathfrak{M},$$

где M – канонический ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$. Покажем, что подформация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{M})$. Нулем этой решетки является формация единичных групп, единицей – формация $\mathfrak{M}$. По условию теоремы в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ найдется дополнение $\mathfrak{H}$ к $\mathfrak{N}_p$. Нулем решетки $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ является формация (1), единицей – формация $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_\omega \mathfrak{H} \text{ и } \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Согласно леммам 10 и 11

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$$

и формации $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{H}$ являются ω-композиционными. Поэтому по лемме 12

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) =$$
$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) =$$
$$= \mathfrak{N}_p \vee_\omega (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Поскольку $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1)$, то

$$\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1).$$

Следовательно, $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в $\mathfrak{M}$, т.е. формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{M})$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Согласно лемме 5 в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $Lc_\omega(\mathfrak{M})$. Пусть число атомов решетки $Lc_\omega(\mathfrak{M})$ равно k. Проведем индукцию по k. Согласно леммам 10 и 11

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$$

и формация $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ является ω-композиционной. Заметим, что поскольку один из атомов $\mathfrak{N}_p$ решетки $Lc_\omega(\mathfrak{M})$ не содержится в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, то в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ число атомов меньше, чем k.

Если $k = 1$, то в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{M})$ имеется лишь один атом. Но в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ атомов меньше $k = 1$, т.е. в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ нет атомов. Последнее возможно лишь в случае, когда $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Поэтому

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathrm{form}(\mathfrak{N}_p \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = \mathrm{form}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, любая группа из $\mathfrak{M}$ нильпотентна, т.е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Предположим теперь, что $k > 1$ и утверждение теоремы верно для всех ω-композиционных формаций, у которых решетка ω-композиционных подформаций имеет число атомов меньше, чем k. В этом случае утверждение для формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ верно по индукции. Но $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Поэтому каждая группа G из M имеет вид:

$$G = A \times B,$$

где $A \in \mathfrak{N}_p$, $B \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Значит, утверждение леммы выполняется для однопорожденной формации $\mathfrak{M}$. Итак, утверждение леммы выполняется и для формации $\mathfrak{F} = c_\omega\mathrm{form}(\cup_{G\in\mathfrak{F}}\, c_\omega\mathrm{form}G)$, т.е. $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-композиционная формация. Тогда и только тогда решетка $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ стоунова, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-композиционная формация. Допустим, что $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка. Заметим, что для каждой ω-композиционной подформации $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$, где $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$.

Действительно, если $\mathfrak{H}$ – ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H})) = \varnothing$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$. Поэтому класс $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$.

По лемме 8 формация $\mathfrak{F}$ обладает минимальным ω-композиционным спутником f. Тогда если $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$, то в силу леммы 9 $\mathfrak{F}$ обладает каноническим ω-композиционным спутником F

таким, что $F(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как ω-композиционный спутник F является внутренним, то $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку класс $\mathfrak{N}_p$ является формацией, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p)$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. По доказанному выше $\mathfrak{N}_p^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$, $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$. Заметим, что $(\mathfrak{N}_p^*)^* = \mathfrak{N}_p$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$, $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$. Вместе с тем, согласно нашему допущению, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p^* \vee_\omega (\mathfrak{N}_p^*)^* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}) \vee_\omega \mathfrak{N}_p$.

Следовательно, для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$ формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$. Применяя теперь лемму 13, видим, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ – ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$, $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$, $\pi_2 = \omega \cap (\pi \setminus \pi_1)$. Если $\pi = \pi_1$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Легко видеть, что в этом случае (1) – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$. Если же $\pi_1 \subset \pi$, то $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $Lc_\omega(\mathfrak{F})$.

Итак, $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ – решетка с дополнениями. Согласно следствию 1 из [11] она является булевой. Значит, решетка $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Покажем, что дополнение $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{N}_{\pi_2}$ является псевдодополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Так как $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi_2} = (1)$. Если $\mathfrak{H}_1$ – ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{M} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H}_1)) \cap \pi_1 = \varnothing$. Последнее означает, что $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{\pi_2}$. Отметим, что $(\mathfrak{M}^*)^* = \mathfrak{M}$ является псевдодополнением к $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ в $\mathfrak{F}$. Более того, $\mathfrak{M}^* \vee_\omega (\mathfrak{M}^*)^* = \mathfrak{N}_{\pi_2} \vee_\omega \mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $Lc_\omega(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка. Теорема доказана.

В случае $\omega = \mathbf{P}$ получаем

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация. Тогда и только тогда решетка $Lc(\mathfrak{F})$ стоунова, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Заключение. В настоящей работе определены условия, при которых решетка частично композиционных формаций является стоуновой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
4. Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – 322 с.
6. Владимиров, Д.А. Булевы алгебры / Д.А. Владимиров. – М.: Наука, 1969. – 320 с.
7. Близнец, И.В. О некоторых типах критических формаций / И.В. Близнец // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 20–24.
8. Воробьев Н.Н. О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω–композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский математический журнал. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463.
9. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомел. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
10. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.
11. Zhiznevsky, P. On τ-closed n-multiply ω-composition formations with Boolean sublattices / P. Zhiznevsky // Algebra and Discrete Mathematics. – 2010. – Vol. 10, № 2, pp. 118–127.

REFERENCES

1. Skiba A.N. *Algebra formatsiy* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
2. Doerk K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter & Co., 1992, 891 p.
3. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p.
4. Skiba A.N., Shemetkov L.A. Ukrainskiy matem. zhurn. [Ukrainian Mathematical Journal], 2000, 52(6), pp. 783–797.
5. Vorobyev N.N. *Algebra klassov konechnykh grupp: monografiya* [Algebra of Classes of Finite Groups: Monograph], Vitebsk: VGU, 2012, 322 p.
6. Vladimirov D.A. *Bulevy algebry* [Boolean Algebras], Moscow: Nauka, 1969, 320 p.
7. Bliznets I.V. *Izvestiya Gomel. gos. un-ta im. F. Skaryny* [Journal of Gomel State University], 2008, 2(47), pp. 20–24.
8. Vorobyev N.N., Tsarev A.A. *Ukrainskiy matem. zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 2010, 62(4), pp. 453–463.
9. Skiba, A.N. *Podgruppovoye stroyeniye konechnykh grupp: Trudy Gomelskogo seminara* [Subgroup Structure of Finite Groups: Proceedings of Gomel Seminar / Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the BSSR], Minsk, 1981, pp. 155–180.
10. Vorobyev N.N., Mekhovich A.P. *Doklady NAN Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2012, 56(1), pp. 26–29.
11. Zhiznevsky, P. On τ-closed *n*-multiply ω-composition formations with Boolean sublattices, Algebra and Discrete Mathematics, 2010, 10(2), pp. 118–127.

Поступила в редакцию 16.10.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: mekhovichap@vsu.by – Мехович А.П.