Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

М.Н. Подоксёнов, Т.А. Александрович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации
к практическим занятиям
и для самостоятельной работы

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2023

УДК [514.12+512.64](076.5)
ББК 22.151.54я73+22.143я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 30.10.2023.

Авторы: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** старший преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, магистр физико-математических наук **Т.А. Александрович**

Р е ц е н з е н т :
старший преподаватель кафедры математики
и информационных технологий УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*

Подоксёнов, М.Н.
П44 Аналитическая геометрия и линейная алгебра : методические рекомендации к практическим занятиям и для самостоятельной работы / М.Н. Подоксёнов, Т.А. Александрович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – 44 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с типовыми учебными программами по дисциплинам «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Высшая алгебра» и «Аналитическая геометрия» для студентов факультета МиИТ, обучающихся по специальностям «Физико-математическое образование», «Прикладная математика», «Прикладная информатика», «Физика», а также «Прикладная инженерия» и «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)». Представлены теоретический материал, примеры решения задач, задания для практических занятий и самостоятельной работы.

УДК [514.12+512.64](076.5)
ББК 22.151.54я73+22.143я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов по дисциплинам «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Высшая алгебра» и «Аналитическая геометрия». По каждой теме кратко излагается теоретический материал, знание которого необходимо для решения индивидуальных вариантов задач. Данное изложение не является полным и не может заменить конспект лекций или учебник. После этого приводятся контрольные вопросы и задачи для практических занятий, примеры решения задач и варианты индивидуальных заданий.

Номер варианта выбирается в соответствии с порядковым номером студента по журналу преподавателя. Задания следует сдавать на отдельном листе в срок, указанный преподавателем. Должны быть выполнены все задания.

Прежде, чем приступить к выполнению заданий, изучите пример ее решения. Решение заданий по линейной алгебре обязательно должно включать в себя проверку. Если проверка не получается, нужно искать ошибки. В случае возникновения серьезных трудностей следует проконсультироваться у преподавателя.

Решение задач по аналитической геометрии должно сопровождаться схематичными чертежами, без использования системы координат. Чертежи обязательно выполнять с помощью циркуля и линейки. Исключение составляет задача по теме «Полярные координаты», в которой необходимо сделать **точный** чертеж в полярной системе координат с использованием транспортира.

1. Матрицы и определители

Определение. *<u>Матрицей</u>* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а её элементы – такой же маленькой буквой с двумя индексами, первый (или верхний) из которых обозначает номер строки, а второй (или нижний) – номер столбца, в которых находится данный элемент.

Например,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размер 2×4. В ней $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, а $a_{21}=5$.

Определение. Матрица размера $n\times n$ называется *<u>квадратной</u>* матрицей порядка n. Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *<u>главную диагональ</u>*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *<u>диагональной</u>*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, называется *<u>единичной</u>* и обозначается буквой $\boldsymbol{E}$. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали равны нулю, то матрица называется *<u>верхнетреугольной</u>* (*<u>нижнетреугольной</u>*).

<u>Транспонированием матрицы</u> $\boldsymbol{A}$ называется такая перестановка её элементов, при которой каждый элемент a_{ij} меняется местами с элементом a_{ji}. Матрицу, которая получается в результате транспонирования, обозначаем $\boldsymbol{A}^T$. Например, для матрицы (1)

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}.$$

Понятие *<u>определитель</u>* вводится только для квадратных матриц. Он обозначается $\det\boldsymbol{A}$. Если вместо круглых скобок вокруг элементов матрицы стоят прямые скобки, то это тоже означает определитель матрицы. Определитель матрицы порядка 2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Обозначим M_{ij} – это определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Он называется *<u>минором, дополнительным к элементу</u>* a_{ij}. Добавим к этому минору знак минус в том случае, когда $i+j$ нечётно. Получившееся число называется *алгебраическим дополнением к элементу* a_{ij}; мы будем обозначать его A_{ij}. Можно записать, что

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Выберем теперь произвольную строку в матрице $\boldsymbol{A}$ и каждый из элементов этой строки умножим на его алгебраическое дополнение, получившиеся числа сложим. Величина, которую мы таким образом вычислили, называется *определителем матрицы* $\boldsymbol{A}$ и обозначается $\det\boldsymbol{A}$ или $|\boldsymbol{A}|$. Результат вычисления не зависит от того, какую из строк матрицы мы выберем. Например, если выбрать первую строку, что получим формулу, которая называется разложением определителя по первой строке:

$$\det\boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Для матрицы порядка 3 эта формула выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Второе слагаемое мы взяли со знаком минус, потому, что $1+2$ нечётно.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Свойства определителя (выборочно: список не является полным).

1. Если одна строка или столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю. Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.

2. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак.

3. Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.

В предыдущем примере все элементы третьего столбца кратны трём. Поэтому мы можем вынести множитель 3 за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

4. Если к элементам одной строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

Вычтем в нашем примере из второй и третьей строки первую строку (сама первая строка при этом остается на своем месте без изменений):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

6. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 9 = -27.$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной.

2. Правило Крамера

Пусть дана система линейных уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Мы ограничимся случаем, когда это число равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а числа b_1, b_2, b_3 – *свободными членами*. Коэффициенты системы образуют матрицу A, а свободные члены – столбец B:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det\boldsymbol{A}$, а Δ_i – определитель матрицы, которая получается из $\boldsymbol{A}$ заменой i-го столбца на столбец $\boldsymbol{B}$. Например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***Теорема.* (*Правило Крамера*).** *Если* $\Delta \neq 0$, *то система линейных уравнений* (2) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Эта теорема верна и для систем, состоящих из произвольного числа n уравнений и неизвестных. Обратите внимание, что теорема состоит из двух утверждений. Первое предложение о существовании и единственности решения имеет важное самостоятельное значение.

Контрольные вопросы

1. Что такое матрица? Как нумеруются элементы в произвольной матрице?
2. Какая матрица называется квадратной? Что такое главная диагональ?
3. Какая матрица называется: а) квадратной; б) диагональной; в) треугольной; г) единичной?
4. Что называется минором, дополнительным к элементу a_{ij}? Что называется алгебраическим дополнением этого элемента?
5. Как вычисляется определитель квадратной матрицы порядка а) два; б) три.
6. Как можно вычислить определитель треугольной матрицы?

7. При каких преобразованиях определитель а) не изменяется; б) меняет знак?

8. При каких условиях можно сразу отметить, что определитель равен нулю?

9. Выпишите в общем виде систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

10. При каких условиях можно использовать правило Крамера для решения систем СЛУ? Выпишите формулы, по которым находятся значения неизвестных.

Задания для решения на практических занятиях

1. Вычислить определитель:

– по правилу Саррюса;

– разложением по первой строке или по первому столбцу;

– приведением к треугольному виду.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнение:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$.

3. Найти определитель путем приведения к треугольному виду.

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 30 & -10 & 20 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$.

4. Решить СЛУ с помощью правила Крамера. Сделать проверку.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6\,. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

Примеры решения задач

1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 9y = 3, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Проверка: $\begin{cases} 5\cdot(-3) + 9\cdot 2 = 3 \text{ – верно,} \\ 3\cdot(-3) + 5\cdot 2 = 1 \text{ – верно.} \end{cases}$

Ответ: $(-3, 2)$.

2. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Ответ: $(1, 2, 1)$.

Индивидуальные варианты

Решить систему линейных уравнений с помощью правила Крамера. Выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 6x + 11y = 14, \\ 8x - 5y = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x + 7y = 9, \\ 9x - 5y = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x + 12y = 3, \\ 6x + 10y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x - 11y = -7, \\ 9x - 5y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x - 7y = 2, \\ 8x - 5y = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x + 12y = 1, \\ 7x + 4y = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 8x + 9y = 11, \\ 5x - 12y = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 4x - 12y = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x + 10y = 14, \\ 9x - 7y = -1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x + 11y = 5, \\ 6x + 5y = -4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 11x - 6y = 14, \\ 5x + 8y = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7x - 6y = 9, \\ 5x + 9y = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 12x - 9y = 3, \\ 10x - 6y = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 11x + 6y = 7, \\ 5x + 9y = -1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x + 6y = -2, \\ 5x + 8y = -7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 12x - 5y = 1, \\ 4x - 7y = -5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 9x - 8y = 11, \\ 12x + 5y = -1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x - 8y = 7, \\ 12x + 4y = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10x - 6y = 14, \\ 7x + 9y = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 11x - 4y = 5, \\ 5x - 6y = -4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 9x + 7y = 1, \\ 5x - 3y = 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x - 3y = -4, \\ 9x + 7y = -1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 11x + 2y = 3, \\ 8x - 9y = -2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 9x + 8y = 2, \\ 2x - 11y = 3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 11x - 2y = 5, \\ 8x + 7y = -2. \end{cases}$

3. Умножение матриц

Пусть

$$a=(a_1\ \ a_2\ \dots\ a_n)\quad \text{и}\quad b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\ -$$

строка и столбец, состоящие из одинакового количества элементов. Определим

$$a\cdot b = a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n.$$

Пусть теперь **A** – матрица размера $m\times k$, а **B** – матрица размера $k\times n$, т.е. количество столбцов в матрице **A** равно количеству строк в матрице **B**, или, что то же самое, длина сроки матрицы **A** равна высоте столбца в матрице **B**. Тогда мы можем умножать строки матрицы **A** на столбцы матрицы **B**. Пусть $a^i=(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$ – i-ая строка матрицы **A**, а $b_j=\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$ – j-ый столбец матрицы **B**. Обозначим

$$c_{ij}=a^i\cdot b_j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}\,b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n.$$

Числа c_{ij} образуют матрицу **C** размера $m\times n$, которая называется произведением матриц **A** и **B**:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a^1\cdot b_1 & a^1\cdot b_2 & \dots & a^1\cdot b_n\\ a^2\cdot b_1 & a^2\cdot b_2 & \dots & a^2\cdot b_n\\ \dots & \dots & & \dots\\ a^m\cdot b_1 & a^m\cdot b_2 & \dots & a^m\cdot b_n\end{pmatrix}.$$

Из свойств операции умножения матриц мы отметим только одно: умножение матиц некоммутативно. Произведения **AB** и **BA** оба существуют и имеют одинаковый размер только в том случае, когда матрицы обе квадратные одного размера, но и в этом случае может быть **AB**≠**BA**.

Задания для решения на практических занятиях

1. Вычислить $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

2. Вычислить **AB** и **BA**, если а) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \beta & \gamma\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

б) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; в) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$.

3. Найти значение многочлена $f(\boldsymbol{A})$, если
$f(x)=-x^3+2x^2-x+3$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

4. Вычислить $\boldsymbol{A}^{48}$, если $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

Даны матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. *Вычислите произведения* $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, *если эти произведения определены.*

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 7 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$;

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 6\\ 0 & 4\end{pmatrix}$;

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 8 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

6. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 4 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$;

7. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}11 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

8. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

9. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9 & 1 & -4\\ 7 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

10. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 8 & 5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 0\\ -2 & 9\end{pmatrix}$;

11. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & -3 & -1\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & 9\end{pmatrix}$;

12. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$;

13. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & -2 & -7\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

14. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

15. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 12\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

16. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

17. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 9 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

18. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$;

19. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 9\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

20. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 5\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 6\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

21. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

22. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -6\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

23. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

24. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

25. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

4. Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Определение. Матрица $\boldsymbol{Y}$ называется *обратной к матрице* $\boldsymbol{A}$, если

$$\boldsymbol{AY} = \boldsymbol{YA} = \boldsymbol{E}$$

($\boldsymbol{E}$ – единичная матрица). Тогда обозначаем $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Матрица, которая имеет обратную к ней матрицу, называется *обратимой*.

Из определения следует, что матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$ обязательно являются квадратными одного и того же порядка.

Теорема. *Матрица* $\boldsymbol{A}$ *является обратимой тогда и только тогда, когда она невырождена* (*т.е.* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$).

Далее мы будем рассматривать только квадратные матрицы третьего порядка и системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Но всё сказанное будет верно и для квадратных матриц произвольного порядка, а также для систем линейных уравнений (СЛУ), содержащих n уравнений и n неизвестных ($n>0$).

Пусть дана СЛУ (2). Обозначим

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ называется матрицей СЛУ, $\boldsymbol{X}$ – столбец неизвестных, $\boldsymbol{B}$ – столбец свободных членов. Тогда систему (2) можно записать в матричном виде так:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}. \tag{2′}$$

Предположим, что матрица $\boldsymbol{A}$ не вырождена. Умножим обе части равенства (2′) слева на обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{3}$$

Тем самым, если мы знаем обратную матрицу, мы можем вычислить столбец решений.

Напомним, что минором, дополнительным к элементу a_{ij}, называется определитель матрицы, которая получается из матрицы $\boldsymbol{A}$ вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца; он обозначается M_{ij}. Алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} задаётся равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Оно отличается от минора только знаком в том случае, когда $i+j$ нечётно.

Теорема. *Для невырожденной квадратной матрицы* $\boldsymbol{A}$ *порядка* 3

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того, чтобы составить $\boldsymbol{A}^{-1}$, *мы на место каждого элемента матрицы* $\boldsymbol{A}$ *ставим его алгебраическое дополнение, получившуюся матрицу транспонируем* (*т.е. превращаем строки в столбцы*), *и затем умножаем на* $(\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

Контрольные вопросы

1. Что означает, что матрица обратима? Какие условия являются необходимыми и достаточными для существования матрицы, обратной к данной?

2. Выпишите формулу для нахождения матрицы, обратной к данной матрице порядка 3.

3. Для каких СЛУ можно использовать метод решения с помощью обратной матрицы? Выпишите формулу для нахождения решения.

Задания для решения на практических занятиях

1. Найти обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$ и проверить выполнение равенств $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ для следующих матриц:

а) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; б) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

2. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 8\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 6 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

3. Найти решение СЛУ матричным методом:

а) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1-x_2+x_3=6,\\ x_1+5x_2=-3.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3=5,\\ x_1+x_2+x_3=6.\end{cases}$

Пример решения задачи

Найти решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=5,\\ 3x_1-x_2+4x_3=1,\\ -x_1+5x_2-x_3=9.\end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу данной системы:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 4\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычисляем алгебраические дополнения. При этом стараемся располагать их на листе бумаги так же, как расположены элементы матрицы. При этом важно помнить, что следует поставить знак минус в тех случаях, когда $i+j$ нечётно.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -19 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad (4)$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

После того, как уже найдены алгебраические дополнения, мы можем вычислить определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ с помощью разложения по первой строке:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1\cdot(-19) + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 14 = -35.$$

(мы умножаем каждый элемент первой строки матрицы на его алгебраическое дополнение и получившиеся числа складываем). Точно так же можно использовать разложение по любой другой строке.

Выписываем матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, и при этом не забываем, что элементы первой строки в вычислениях (4) записываются в первый столбец, второй строки – во второй столбец, третьей строки – в третий столбец:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Находим решение по формуле (4.3):

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19\cdot 5 - 3\cdot 1 + 7\cdot 9 \\ -1\cdot 5 - 2\cdot 1 - 7\cdot 9 \\ 14\cdot 5 - 7\cdot 1 - 7\cdot 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -35 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тем самым мы нашли, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0.$$

Прежде, чем писать ответ, делаем проверку:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 0 = 5 \ \text{– верно} \\ 3\cdot 1 - 2 + 4\cdot 0 = 1 \ \text{– верно,} \\ -1 + 5\cdot 2 - 0 = 9 \ \text{– верно.} \end{cases}$$

Ответ: $(1, 2, 0)$.

Если проверка не получается.

1. Проверьте, не забыли ли вы поставить знак минус при вычислении алгебраических дополнений там, где $i+j$ нечётно.

2. Проверьте, не забыли ли вы при составлении обратной матрицы выписать алгебраические дополнения по принципу: строка – в столбец.

3. Проверьте, не пропустили ли вы при составлении самой матрицы $\boldsymbol{A}$ где-нибудь знак минус.

4. Проверьте, правильно ли вы переписали условие.

5. Пересчитайте ещё раз алгебраические дополнения.

6. Пересчитайте $\det\boldsymbol{A}$.

7. Если по-прежнему проверка не получается, проверьте правильность составления $\boldsymbol{A}^{-1}$ путём умножения матриц: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$. Если, например, при умножении первой строки матрицы $\boldsymbol{A}$ на второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ получается не 0, а другое число, то ошибку следует искать во втором столбце матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$. Аналогично, сделав проверку $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, мы можем определить номер строки в $\boldsymbol{A}^{-1}$, в которой содержится ошибка. Если вместо единичной матрицы получается диагональная матрица, у которой на диагонали стоит не 1, а другое число, то неверно найден $\det\boldsymbol{A}$.

Индивидуальные варианты

Решить систему линейных уравнений

а) с помощью правила Крамера;

б) с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=3, \\ -3x_1+12x_2-2x_3=-7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-3, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-11, \\ 4x_1-4x_2+7x_3=-7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=-3, \\ -2x_1-7x_2-7x_3=-3, \\ 3x_1+12x_2+5x_3=-4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=5, \\ -3x_1-5x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1+2x_2-5x_3=-4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=4, \\ 3x_1-12x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-2, \\ 4x_1-4x_2+7x_3=-1, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=1, \\ 3x_1+12x_2-5x_3=3, \\ 2x_1+7x_2-7x_3=-10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=16, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=15. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=-8, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-8, \\ -2x_1+4x_2-7x_3=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=3, \\ -3x_1-12x_2+2x_3=-7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 - 12x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 12x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -10. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 15. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 13, \\ 4x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 15. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 - 11x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - 13x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 13x_2 - 7x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -12, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

5. Полярная система координат на плоскости

Определение. Выберем на плоскости произвольные точку O, которую назовём полюсом, и луч OP, который назовём полярной осью. Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим $r = OM$, а φ – ориентированный угол между лучами OP и OM (рисунок 1). Тогда пара (r, φ) называется полярными координатами точки M. Совокупность точки O и оси OP называется полярной системой координат на плоскости.

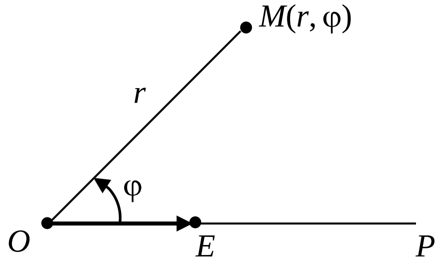

*рис.*1

Если декартовы координаты могут принимать любое действительное значение, то для полярных есть ограничения. Очевидно, что $0 \le r < +\infty$, а для угла φ обычно договариваются, что $0 \le \varphi < 2\pi$, либо, что $-\pi < \varphi \le \pi$. При этом, если $r = 0$, то φ считается неопределенным.

Выберем декартову СК так, чтобы точка O была ее началом, а положительное направление оси Ox совпадало с направлением оси OP. Тогда формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (5)$$

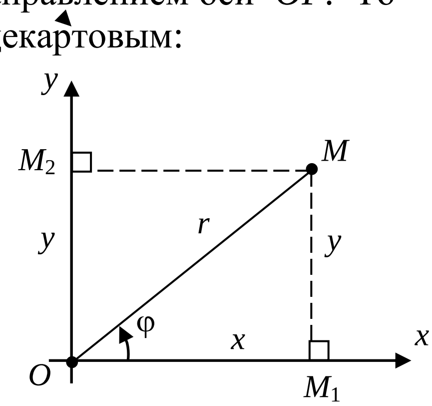

*рис.*2

Формулы перехода от декартовых координат к полярным:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (5')$$

Подчеркнем, что знание синуса, косинуса, или тангенса в отдельности не позволяет однозначно определить угол φ: два различных угла могут иметь одинаковый синус или одинаковый косинус. Поэтому угол φ следует находить сразу из двух равенств:

$$\cos\varphi = x/r,\ \ \sin\varphi = y/r,$$

либо так: $\varphi = \arccos\dfrac{x}{r}$, если $y \ge 0$; $\varphi = -\arccos\dfrac{x}{r}$, если $y < 0$ (в предположении, что $-\pi < \varphi \le \pi$). Использование арктангенса неудобно: надо оговаривать еще случай $x = 0$, и поэтому приходится писать 4 равенства.

Контрольные вопросы

1. Из каких элементов состоит полярная система координат на плоскости?
2. Изобразите полярную СК, выберите произвольную точку, и покажите на чертеже ее полярные координаты.

3. В каких пределах изменяются первая и вторая полярные координаты?

4. Как обычно выбирают вместе полярную и декартову СК? Выпишите в этом случае формулы перехода от одной СК к другой.

Задания для решения на практических занятиях

1. Даны декартовы координаты точек. Найти их полярные координаты и изобразить их, показав на чертеже полярные координаты: $A(0, 3/2)$, $B(-1, 1)$, $C(1, \sqrt{3})$, $D(2,-2)$, $E(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

2. Даны полярные координаты точек. Найти их декартовы координаты: $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(4,-\frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(8,\frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$. Изобразить данные точки.

3. Даны полярные координаты концов отрезка: $A\left(10,\frac{4\pi}{9}\right)$, $B\left(10,-\frac{2\pi}{9}\right)$. Найти полярные координаты его середины.

4. Одна из вершин треугольника находится в полюсе, а две другие имеют полярные координаты: $A\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(8,-\frac{\pi}{12}\right)$. Найдите его площадь и длину стороны AB.

5. Даны полярные координаты вершин треугольника: $A\left(3,\frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8,-\frac{7\pi}{24}\right)$, $C\left(6,-\frac{5\pi}{8}\right)$. Найдите его площадь.

Пример решения задачи

Пример. Вершина A помещается в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты: $B(6,\frac{5\pi}{4})$, $C(4,\frac{7\pi}{12})$.

а) Изобразить ***данный*** треугольник (сделать ***точный*** чертёж).

б) Вычислить площадь треугольника.

в) Найти длину BC.

Решение. Нарисуем чертеж к задаче, построив точки B и C по их полярным координатам (**не следует перерисовывать этот чертёж точка в точку: в вашем варианте свои данные!**). Из чертежа и геометрического смысла полярных координат находим, что

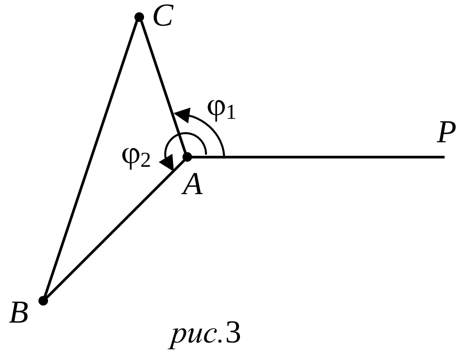

*рис.*3

$$AB = 6,\quad AC = 4,\qquad \angle BAC = |\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{5\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-\frac{1}{2})=76,$$

$$BC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}.$$

Индивидуальные варианты

1. $C(3,-\frac{\pi}{3})$, $B(2,-\pi)$. **2.** $C(2,-\frac{\pi}{12})$, $B(3,\frac{\pi}{4})$. **3.** $C(1,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{5\pi}{12})$.

3. $C(3,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{7\pi}{12})$. **5.** $C(2,\frac{\pi}{3})$, $B(5,\frac{\pi}{12})$. **6.** $B(4,-\frac{\pi}{9})$, $C(1,-\frac{5\pi}{18})$.

7. $B(2,\frac{7\pi}{12})$, $C(3,\frac{11\pi}{12})$. **8.** $B(4,-\frac{\pi}{6})$, $C(7,\frac{\pi}{6})$. **9.** $B(3,\pi)$, $C(4,\frac{2\pi}{3})$.

10. $C(5,\frac{7\pi}{12})$, $B(2,\frac{5\pi}{6})$. **11.** $B(2,\frac{\pi}{3})$, $C(1,\frac{7\pi}{12})$. **12.** $B(3,-\frac{\pi}{2})$, $C(1,\frac{\pi}{4})$.

13. $B(1,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{11\pi}{12})$. **14.** $B(5,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{13\pi}{12})$. **15.** $B(2,-\frac{\pi}{3})$, $C(3,-\frac{\pi}{6})$.

16. $B(1,-\frac{7\pi}{12})$, $C(2,-\frac{11\pi}{12})$. **17.** $B(5,-\frac{\pi}{4})$, $C(3,-\frac{5\pi}{12})$. **18.** $B(2,\frac{3\pi}{4})$, $C(5,\frac{11\pi}{12})$.

19. $B(1,\frac{5\pi}{12})$, $C(3,\frac{7\pi}{12})$. **20.** $B(2,\frac{11\pi}{12})$, $C(3,\frac{3\pi}{4})$. **21.** $B(3,\frac{3\pi}{4})$, $C(4,\frac{7\pi}{12})$.

22. $B(5,\frac{5\pi}{12})$, $C(3,\frac{3\pi}{4})$. **23.** $B(2,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{\pi}{12})$. **24.** $B(3,\frac{\pi}{12})$, $C(1,-\frac{\pi}{4})$.

25. $B(3,-\frac{3\pi}{4})$, $C(2,\frac{\pi}{12})$.

6. Комплексные числа

Комплексные числа впервые возникли в связи с необходимостью иметь решение для квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Впоследствии они нашли широкое применение во всех разделах математики и физики.

Определение. Обозначим $i=\sqrt{-1}$. Число i называется *мнимой единицей*. Таким образом, выполнено $i^2=-1$.

Определение. *Комплексным числом* называется формальное алгебраическое выражение вида $z=a+bi$, где $a, b\in \boldsymbol{R}$. Число a называется действительной частью, выражение bi – мнимой частью. Обозначаем $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$. Совокупность всех комплексных чисел обозначаем $\boldsymbol{C}$.

Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. Тогда сумма, разность и произведение этих чисел определяется так:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,\quad z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i,$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2=$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Определение. Число $\bar{z}=a-bi$ называется *сопряжённым* (*комплексно сопряжённым*) к числу $z=a+bi$.

Заметим, что $\frac{1}{2}(z+\bar{z})=a=\mathrm{Re}\,z$, $\frac{1}{2}(z-\bar{z})=b=\mathrm{Im}\,z$. Теперь умножим:

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

Получилось действительное число. Теперь можем определить деление.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)\cdot(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{(a_2)^2+(b_2)^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{(a_2)^2+(b_2)^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{(a_2)^2+(b_2)^2}\,i.$$

Таким образом, для того, чтобы совершить деление, мы числитель и знаменатель дроби домножаем на число, сопряжённое к знаменателю. Тогда в знаменателе получится действительное число.

Комплексные числа принято изображать точками на плоскости, где задана декартова система координат. Число $z=a+bi$ изображается точкой с координатами (a,b). Тогда $\bar{z}$ изображается точкой с координатами $(a,–b)$, симметричной относительно Ox. Будем говорить, что z – это и есть точка с координатами (a,b).

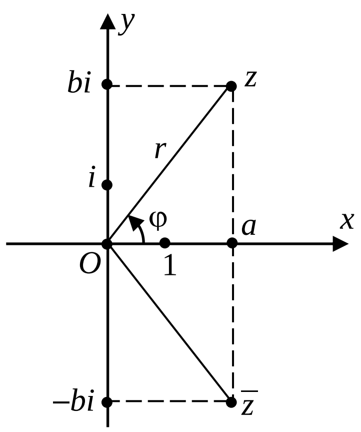

рис. 4

Пусть на плоскости задана ещё полярная система координат, у которой полярная ось сонаправлена с Ox. Пусть (r, φ) – полярные координаты точки z. Тогда r называется *модулем комплексного числа* z, а φ – его *аргументом*. Обозначаем $r=|z|$, $\varphi=\arg z$ (рисунок 4).

В соответствии с формулами перехода от полярных координат к декартовым выполнено

$$\begin{cases} a=r\cdot\cos\varphi, \\ b=r\cdot\sin\varphi. \end{cases}$$

Значит

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Эта запись называется *тригонометрической формой комплексного числа*, а запись $z=a+bi$ называется *алгебраической формой*. Очевидно (например, из чертежа), что $\bar{z}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$.

Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются*. Поскольку деление есть операция обратная умножению, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Ещё одним следствием из правила умножения является формула:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Контрольные вопросы

1. Что такое мнимая единица? Что называется комплексным числом?
2. Как изображаются комплексные числа? Что называется числом, комплексно-сопряженным данному, и как оно изображается?
3. Что такое модуль и аргумент комплексного числа? Покажите эти величины на чертеже.
4. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
5. Как умножаются и делятся числа в тригонометрической форме? Как находится степень комплексного числа в тригонометрической форме?

Задания для решения на практических занятиях

1. Даны два комплексных числа $z_1 = 11 + 2i$, $z_2 = 2 - i$. Вычислить **а)** $z_1 + z_2$, **б)** $z_1 - z_2$, **в)** $z_1 z_2$, **г)** z_1/z_2.

2. Дано комплексное число в алгебраической форме. Запишите его в тригонометрической форме. Изобразите это число на комплексной плоскости, показав на чертеже модуль и аргумент числа.

а) $1 + i$; **б)** $\sqrt{3} - i$; **в)** $-2 + 2i$.

3. Даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = 6(\cos 45° + i \sin 45°),\ z_2 = 3(\cos 15° + i \sin 15°).$$

Найдите **а)** $z_1 z_2$, **б)** z_1/z_2. Запишите полученные числа в алгебраической форме.

4. Вычислите **а)** $(1+i)^{14}$, **б)** $(\sqrt{3} - i)^9$.

Пример решения задачи

Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 4i$. Вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ *и* z_1/z_2. Вычислить z_1/z_2.

Решение. $z_1 + z_2 = (1+2i) + (3+4i) = (1+3) + (2+4)i = 4 + 6i$;

$z_1 - z_2 = (1+2i) - (3+4i) = (1-3) + (2-4)i = -2 - 2i$;

$z_1 \cdot z_2 = (1+2i) \cdot (3+4i) = 3 + 4i + 6i + 8i^2 = (3-8) + (4+6)i = -5 + 10i$;

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{9-16i^2} = \frac{3+2i-8\cdot(-1)}{9-16(-1)} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.$$

Индивидуальные варианты

1. $z_1 = -1 + 5i$, $z_2 = 2 + 3i$;
2. $z_1 = 10 + 11i$, $z_2 = 2 - 3i$;
3. $z_1 = -4 + 7i$, $z_2 = 2 + 3i$;
4. $z_1 = 3 + 7i$, $z_2 = 2 - 5i$;
5. $z_1 = 7 - 4i$, $z_2 = 2 - 3i$;
6. $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 3 - i$;
7. $z_1 = 4 + 7i$, $z_2 = -2 + 3i$;
8. $z_1 = -11 + 8i$, $z_2 = 6 - i$;
9. $z_1 = -7 + 9i$, $z_2 = 1 + 3i$;
10. $z_1 = 9 + 13i$, $z_2 = 3 + i$;
11. $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 1 + 3i$;
12. $z_1 = -13 + 11i$, $z_2 = 5 - 2i$;
13. $z_1 = -1 + 13i$, $z_2 = 4 + i$;
14. $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 3 - 2i$
15. $z_1 = 2 + 9i$, $z_2 = 1 - 4i$;
16. $z_1 = -4 + 6\mathrm{i}$, $z_2 = 1 + \mathrm{i}$;
17. $z_1 = 9 - 2i$, $z_2 = 1 - 4i$;
18. $z_1 = -13 + i$, $z_2 = 3 + 5i$;
19. $z_1 = 9 + 2i$, $z_2 = 1 + 4i$;
20. $z_1 = 13 + 13i$, $z_2 = 5 - i$;
21. $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 1 + 4i$;
22. $z_1 = 12 - 2i$, $z_2 = 1 + 6i$;
23. $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = 1 + 4i$;
24. $z_1 = -3 - 2i$, $z_2 = 2 - 3i$;
25. $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = -1 + 3i$;

7. Уравнение прямой на плоскости

***Теорема.* 1.** *Прямая* l*, проходящая через точку* $M_o(x_o, y_o)$*, и имеющая направляющий вектор* $\vec{a}(a_1, a_2)$*, задается уравнением*

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2}, \tag{6}$$

которое называется *канонический уравнением прямой**, или* *параметрическими уравнениями**:*

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \ t \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{7}$$

2. *Прямая, проходящая через точку* $M_o(x_o, y_o)$*, и имеющая вектор нормали* $\vec{n}(A, B)$*, задается в декартовой СК уравнением*

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \tag{8}$$

(*уравнение прямой с вектором нормали*).

Следствие. *Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида*

$$Ax + By + C = 0, \tag{9}$$

которое называется *общим уравнением прямой**. И обратно, любое уравнение вида* (9) *на плоскости задает прямую; при этом геометрический смысл коэффициентов* A*,* B *в уравнении* (9) *– это координаты вектора нормали к прямой.*

8. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями:

$$l_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1 = 0\,,$$
$$l_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2 = 0\,.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{n}_1(A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ – это векторы нормали к l_1 и l_2.

***Теорема* 9.1. 1.** $l_1 || l_2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

2. $l_1 = l_2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

3. $l_1 \perp l_2 \ \Leftrightarrow\ A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;

4. *угол между* l_1 *и* l_2 *вычисляется по формуле*

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

9. Уравнение прямой в нормальной форме. Расстояние от точки до прямой

Определение. Говорим, что *общее уравнение прямой* (9) *имеет нормальную форму*, если $A^2+B^2=1$. Это равносильно тому, что вектор $\vec{n}$ (A,B) – единичный.

Если уравнение (9) не имеет нормальной формы, то мы можем привести его к этой форме, разделив на $\sqrt{A^2+B^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Теорема. *Пусть прямая* l *определяется уравнением* (9) *в нормальной форме. Тогда расстояние от точки* $M(x_1,y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h=|Ax_1+By_1+C|. \qquad (10)$$

Следствие. *Если прямая определяется произвольным уравнением вида* (9), *то*

$$h=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (10')$$

Контрольные вопросы

1. Напишите каноническое и параметрические уравнения прямой. По каким данным они составляются?
2. Напишите уравнение прямой с вектором нормали и укажите, какие данные должны подставляться в это уравнение.
3. Напишите общее уравнение прямой. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты, стоящие перед переменными x и y?
4. Напишите признаки параллельности и совпадения двух прямых, заданных общими уравнениями.
5. Напишите формулу для вычисления косинуса угла между прямыми, заданными общими уравнениями.
6. Какое уравнение и при каком условии называется уравнением в нормальной форме?
7. По какой формуле вычисляется расстояние от точки до прямой?

Задания для решения на практических занятиях

1. Даны координаты вершин треугольника: $A(0,5)$, $B(-5,3)$, $C(1,9)$. Составьте уравнение высоты AD, проведенной из вершины A к стороне BC и найти координаты точки D.

2. Даны координаты двух вершин $A(-6,2)$, $B(2,-2)$ треугольника ABC и точки $H(1,2)$ пересечения высот (рисунок 5). Найти координаты вершины C.

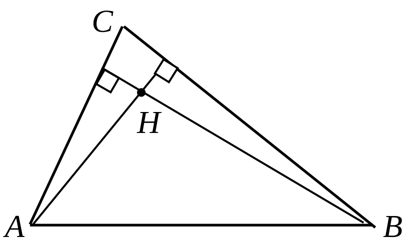

*рис.*5

3. Даны координаты вершин треугольника, вписанного в окружность: $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(5,6)$. Найти координаты центра окружности и ее радиус.

4. Даны координаты вершин треугольника: $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(5,6)$. Составьте уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.

5. Найдите координаты основания перпендикуляра, проведенного через точку $M(10,-10)$ к прямой $4x-3y-20=0$, и найдите координаты точки, симметричной M относительно данной прямой. Уравнение перпендикуляра следует составлять в параметрической форме.

6. Вычислите площадь треугольника, заключенного между координатными осями и прямой $4x-3y+36=0$.

Пример решения задачи

Даны координаты вершин треугольника ΔABC: $A(-1, 3)$, $B(11, 0)$, $C(9,9)$.

а) Составить уравнения стороны AB и высоты CD. Найти координаты точки D.

б) Вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой.

Решение. **а)** Прямая AB имеет направляющий вектор $\overrightarrow{AB}$. Для того, чтобы найти его координаты, мы вычитаем координаты начала из координат конца: $\overrightarrow{AB}(11-(-1),\ 0-3)$; $\overrightarrow{AB}(12,-3)$. Используем каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2},$$

Здесь (x_0,y_0) – координаты любой точки на прямой, (a_1,a_2) – координаты направляющего вектора. Мы берем точку A и вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\frac{x-(-1)}{12}=\frac{y-3}{-3}.$$

Перемножаем крест-накрест:

$$-3(x+1)=12(y-3) \quad /:-3$$

$$x+1=-4(y-3); \quad x+1+4(y-3)=0; \quad x+4y-11=0.$$

Последнее уравнение называется «общим уравнением прямой». Тот же самый вектор $\overrightarrow{AB}(12,-3)$ перпендикулярен прямой CD. Он называется вектором нормали к CD. Мы используем уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

Здесь (x_0, y_0) – координаты любой точки на прямой, (A, B) – координаты вектора нормали. Мы используем точку $C(9,9)$:

$$12(x-9)-3(y-9)=0; \quad 4(x-9)-(y-9)=0;$$

$$4x-36-y+9=0; \quad 4x-y-27=0.$$

Точка D – это общая точка прямых AB и CD. Ее координаты должны удовлетворять сразу двум уравнениям AB и CD. Поэтому записываем уравнения прямых в систему.

$$\begin{cases} x+4y-11=0, \\ 4x-y-27=0. \end{cases}$$

Находим $x=7$, $y=1$. $D(7,1)$.

Применим формулу $(10')$ к уравнению прямой AB и к точке C:

$$h=\frac{|9+4\cdot 9-11|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|34|}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}$$

Ответ. AB: $x+4y-11=0$, CD: $4x-y-27=0$, $D(7,1)$, $h=2\sqrt{17}$.

Индивидуальные варианты

1. $A(-3,1)$, $B(9,5)$, $C(-2,8)$.
2. $A(-2,-5)$, $B(1,7)$, $C(8,1)$.
3. $A(-5,-4)$, $B(10,-1)$, $C(-1,2)$.
4. $A(0,1)$, $B(12,-3)$, $C(5,6)$
5. $A(0,2)$, $B(9,-4)$, $C(7,6)$
6. $A(-1,2)$, $B(5,-2)$, $C(6,6)$
7. $A(0,4)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-3)$
8. $A(0,-4)$, $B(8,0)$, $C(4,-7)$
9. $A(0,-3)$, $B(9,0)$, $C(5,-8)$
10. $A(0,-3)$, $B(-12,0)$, $C(-2,6)$
11. $A(-6,0)$, $B(6,4)$, $C(-5,7)$
12. $A(-1,-5)$, $B(2,7)$, $C(8,-3)$
13. $A(-5,1)$, $B(10,-5)$, $C(2,4)$
14. $A(-6,1)$, $B(6,-3)$, $C(-1,6)$
15. $A(-6,2)$, $B(3,-4)$, $C(1,6)$
16. $A(1,-2)$, $B(7,2)$, $C(8,-6)$
17. $A(2,5)$, $B(5,-1)$, $C(-2,-2)$
18. $A(4,0)$, $B(0,-8)$, $C(6,-6)$
19. $A(0,3)$, $B(9,0)$, $C(5,8)$
20. $A(-2,0)$, $B(1,-12)$, $C(8,-6)$
21. $A(-3,2)$, $B(9,-2)$, $C(-2,-5)$
22. $A(1,-7)$, $B(-2,5)$, $C(-8,-5)$
23. $A(5,0)$, $B(-10,3)$, $C(1,6)$
24 $A(0,2)$, $B(9,-1)$, $C(8,6)$
25. $A(0,-2)$, $B(9,4)$, $C(7,-6)$

Пример решения задачи

Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1,-6)$, $B(-3,0)$, $C(6,9)$. Составить уравнение окружности, описанной вокруг треугольника (рисунок 6).

Решение. Центр окружности, описанной вокруг треугольника, находится на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам этого треугольника. Находим координаты середин $M_1(x_1,\ y_1)$, и $M_3(x_3,\ y_3)$ сторон BC и AB:

$x_1 = \dfrac{x_C + x_B}{2} = \dfrac{-3+6}{2} = \dfrac{3}{2}$, $y_1 = \dfrac{y_C + y_B}{2} = \dfrac{0+9}{2} = \dfrac{9}{2}$,

$M_1\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$.

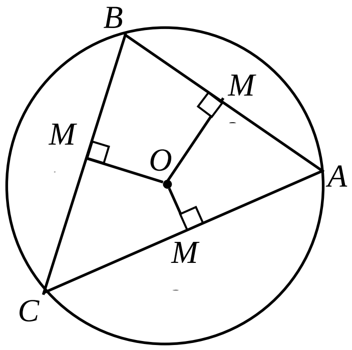

*рис.*6

Аналогично находим $M_3(-1,-3)$.

Пусть l_3 – прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к AB, а l_1 – к BC. Тогда $\vec{n}_3 = \overrightarrow{AB}\,(-4, 6) \perp l_3$ и l_3 проходит через M_3. Поэтому её уравнение:

$$-4(x+1) + 6(y+3) = 0.$$

Аналогично $\vec{n}_1 = \overrightarrow{BC}(9, 9) \perp l_3$. Поэтому уравнение l_1:

$$9(x - \frac{3}{2}) + 9(y - \frac{9}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 6 = 0.$$

Имеем $O = l_1 \cap l_3$. Поэтому, чтобы найти координаты точки O необходимо решить совместно уравнения l_1 и l_3:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ -4x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 4:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 10y - 10 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y = 1,\ x = 5,\ O(5, 1)$.

Радиус равен расстоянию от точки O до любой из вершин треугольника:

$$R = |\overrightarrow{AO}| = \sqrt{(1-5)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{65}.$$

Индивидуальные варианты

1. $A(-3,-2)$, $B(4,-3)$, $C(1, 6)$.

2. $A(-6,-6)$, $B(1,-7)$, $C(-2, 2)$.

3. $A(-10,-3)$, $B(7,-10)$,$C(2, 15)$

4. $A(3, 2)$, $B(\ 2,-5)$, $C(-1, 4)$

5. $A(3, 0)$, $B(1,-4)$, $C(-2, 5)$.

6. $A(9, 5)$, $B(2, 12)$, $C(-3, 13)$.

7. $A(-4,-4)$, $B(8, 2)$, $C(0, 8)$.

8. $A(-5,-3)$, $B(7, 1)$, $C(-1, 9)$.

9. $A(-2,-5)$, $B(10, 1)$, $C(4,-7)$.

10. $A(-5,-1)$, $B(7, 5)$, $C(-1,-3)$.

11. $A(-5, 0)$, $B(7, 4)$, $C(1,-2)$.

12. $A(-6,-3)$, $B(9, 2)$, $C(0, 9)$.

13. $A(-5,-2)$, $B(10, 3)$, $C(3,-6)$.

14. $A(6, 5)$, $B(4,-9)$, $C(-2, 9)$.

15. $A(6, 1)$, $B(2,-7)$, $C(5, 4)$.

16. $A(2, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(-7,-1)$.

17. $A(8,0)$, $B(-4,4)$, $C(2,-8)$.
18. $A(1,-6)$, $B(4,-5)$, $C(-7,-2)$.
19. $A(15,-2)$, $B(-3,10)$, $C(-10,-7)$.
20. $A(4,1)$, $B(2,-3)$, $C(-5,-2)$.
21. $A(4,1)$, $B(2,-3)$, $C(-5,-2)$.
22. $A(5,2)$, $B(0,-3)$, $C(-4,-1)$.
23. $A(13,3)$, $B(5,-9)$, $C(-12,-2)$.
24. $A(8,0)$, $B(-4,4)$, $C(2,-8)$.
25. $A(9,1)$, $B(-3,5)$, $C(1,-7)$.

Пример решения задачи

Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых (параллельны, пересекаются или совпадают). Если прямые пересекаются – найти угол между ними, а если параллельны – расстояние между ними.

а) l_1: $2x+y+5=0$, l_2: $x-7y+11=0$.

Решение. Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то

$$l_1 \,||\, l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}; \quad l_1=l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

В нашем случае $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{7}$, поэтому прямые не параллельны и не совпадают. Значит, они пересекаются. Угол между прямыми вычисляется по формуле $\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – векторы нормали к этим прямым. В нашем случае

$$\vec{n}_1(2,1),\ \vec{n}_2(1,-7),\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2\cdot1+1\cdot(-7)=-5;$$

$$|\vec{n}_1|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},\ |\vec{n}_2|=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}.$$

Значит, $\cos\alpha=\frac{|-5|}{\sqrt{5}\cdot5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

***Ответ*:** $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

б) l_1: $\sqrt{2}x-2y+8=0$, l_2: $2x-2\sqrt{2}y-15=0$.

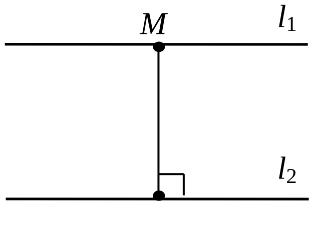

*рис.*7

Решение. Проверяем прямые на параллельность или совпадение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-2}{-2\sqrt{2}}\neq\frac{8}{-15}$$

Значит, $l_1||l_2$. Расстояние между прямыми есть длина их общего перпендикуляра (рисунок 7). Расстояние от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, находится по формуле $(10')$.

Выберем точку $M \in l_1$. Для этого надо подобрать любые две координаты, удовлетворяющие уравнению l_1. В нашем случае, самый простой выбор: $M(0, 4)$. Расстояние от M до l_2 и будет расстоянием между l_1 и l_2:

$$h = \frac{|2\cdot 0 - 2\sqrt{2}\cdot 4 - 15|}{\sqrt{2^2 + (-2\sqrt{2})^2}} = \frac{8\sqrt{2} + 15}{2\sqrt{3}}.$$

Индивидуальные варианты

1. а) $x + 1 = 0,$ $x + y - 5 = 0;$ **б)** $2x - 2y - 5 = 0,$ $-x + y + 1 = 0;$ **в)** $2x + 3y - 1 = 0,$ $4x + 6y - 2 = 0.$

2 а) $3x - y - 3 = 0,$ $x + 2y + 8 = 0;$ **б)** $2x + y = 0,$ $-4x - 2y - 5 = 0;$ **в)** $2x - y + 1 = 0,$ $-6x + 3y - 3 = 0.$

3. а) $3x + 4y = 0,$ $8x - 6y + 5 = 0;$ **б)** $4x - 6y + 5 = 0,$ $-6x + 9y + 10{,}5 = 0;$ **в)** $-x + 5y + 2 = 0,$ $2x + 3y - 8 = 0.$

4. а) $3x + y + 5 = 0,$ $x + 2y - 8 = 0;$ **б)** $-3x + y + 1 = 0,$ $6x - 2y + 5 = 0;$ **в)** $9x - 6y - 12 = 0,$ $6x - 4y - 8 = 0.$

5. а) $3x + 5y - 7 = 0,$ $4x + y + 1 = 0;$ **б)** $5x - 10y + 11 = 0,$ $x - 2y + 5 = 0;$ **в)** $-4x + y + 2 = 0,$ $x + 4y - 4 = 0.$

6. а) $-2x + 3y - 11 = 0,$ $x + 5y + 8 = 0;$ **б)** $3x + 12y - 8 = 0,$ $2x + 8y + 10 = 0;$ **в)** $8x + 2y + 5 = 0,$ $x - 4y - 15 = 0.$

7. а) $-3x + y - 12 = 0,$ $-x + 2y - 7 = 0;$ **б)** $3x + y - 5 = 0,$ $9x + 3y - 15 = 0;$ **в)** $6x + 2y - 7 = 0;$ $9x + 3y + 5 = 0.$

8. а) $-3x + 5y - 1 = 0,$ $-4x + y + 1 = 0;$ **б)** $-5x + y - 5 = 0,$ $10x - 2y - 10 = 0;$ **в)** $2x + 3y = 0,$ $3x - 2y + 9 = 0.$

9. а) $4x + 3y - 12 = 0,$ $x + 6y + 12 = 0;$ **б)** $x - 7y + 10 = 0,$ $-3x + 21y + 10 = 0;$ **в)** $2x - 4y - 12 = 0,$ $-3x + 6y + 18 = 0.$

10. а) $-4x + 3y + 18 = 0,$ $-x + 7y + 7 = 0;$ **б)** $x + 3y + 5 = 0,$ $2x + 6y - 7 = 0;$ **в)** $x - 2y + 1 = 0,$ $2x + y + 1 = 0.$

11. а) $3x + 2y + 5 = 0,$ $5x - y + 5 = 0;$ **б)** $5x + 2y - 7 = 0,$ $10x + 4y + 8 = 0;$ **в)** $\sqrt{2}x - y + 2\sqrt{2} = 0,$ $2x - \sqrt{2}y + 4 = 0.$

12. а) $x + 3y + 11 = 0,$ $2x + y + 5 = 0;$ **б)** $4x + 7y - 28 = 0,$ $16x + 28y - 8 = 0;$ **в)** $\sqrt{2}x + 2y + 2\sqrt{2} = 0,$ $x + \sqrt{2}y + 2 = 0.$

13. а) $5x + 3y + 11 = 0,$ $x + 4y - 5 = 0;$ **б)** $3x + 5y + 15 = 0,$ $9x + 15y + 3 = 0;$ **в)** $x + \sqrt{2}y - 2 = 0.$ $\sqrt{2}x - y = 0.$

14. а) $3x + 4y + 7 = 0,$ $6x + y + 7 = 0;$ **б)** $\sqrt{2}x + y + 2 = 0,$ $2x + \sqrt{2}y - 2 = 0;$ **в)** $4x + 2y - 6 = 0,$ $6x + 3y - 9 = 0.$

15. а) $3x - 2y + 1 = 0,$ $6x + 9y + 6 = 0;$ **б)** $7x - 2y + 7 = 0,$ $-28x + 8y + 21 = 0;$ **в)** $\sqrt{3}x + 3y = 0,$ $-x + \sqrt{3}y + 3 = 0.$

16. а) $x-3y+4=0,$
$2x-y=0;$

б) $3x-5y+15=0,$
$9x-15y+11=0;$

в) $\sqrt{5}x-5y+3\sqrt{5}=0,$
$-x+\sqrt{5}y-3=0.$

17. а) $5x-3y-9=0,$
$x-4y-11=0;$

б) $-4x+5y-8=0,$
$2x-2{,}5y+16=0;$

в) $-4x+5y-20=0,$
$5x+4y=0.$

18. а) $3x-4y+12=0,$
$6x-y=0;$

б) $20x+30y-15=0,$
$4x+6y+3=0;$

в) $4x+6y+3=0,$
$3x-2y-1=0.$

19. а) $-2x+10y-11=0,$
$2x+3y-7=0;$

б) $6x-y-7=0,$
$-12x+2y-14=0;$

в) $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0,$
$4x+9y-6=0.$

20. а) $2x+4y-5=0,$
$3x+y+9=0;$

б) $-2x+3y+6=0,$
$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-3=0;$

в) $10x-5y-1{,}8=0,$
$x+2y=0.$

21. а) $8x+2y-7=0,$
$3x+5y+8=0;$

б) $0{,}6x-0{,}8y-1=0,$
$-3x+4y-8=0;$

в) $9x-2y+18=0,$
$4{,}5x-y+9=0.$

22. а) $2x+12y-5=0,$
$4x+3y+7=0;$

б) $-3x+8y-10=0,$
$0{,}6x-1{,}6y+5=0;$

в) $-3x+8y-10=0,$
$4x+1{,}5y-5=0.$

23. а) $4x+6y-7=0,$
$-x+5y-6=0;$

б) $2x-4y-9=0,$
$-3x+6y-6=0;$

в) $8x+3y-10=0,$
$1{,}6x+0{,}6y-2=0.$

24. а) $6x+2y-9=0,$
$-x-2y+5=0;$

б) $\sqrt{2}x+2y-8=0,$
$x+\sqrt{2}y=0;$

в) $6x-8y+12=0,$
$-9x+12y-18=0.$

25. а) $6x+10y-5=0,$
$4x+y-1=0;$

б) $7x+2y-3=0,$
$14x+4y-6=0;$

в) $6x-8y+12=0,$
$-9x+12y-10=0.$

11. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

Число $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$.

Теорема. **1.** *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

2. *Для того чтобы ненулевые векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю:* $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Если мы знаем, чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и знаем их длины, то мы можем вычислить угол между ними:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Пусть в пространстве задана декартова СК, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – базисные орты. Пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда формулы для вычисления скалярного произведения, скалярного квадрата и длины вектора имеют вид:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\,,$$

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\,,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

Из них вытекает формула для вычисления косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,.$$

Если $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{PQ}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поэтому длина вектора вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Эта же величина называется *расстоянием между точками* P и Q.

12. Векторное произведение

Определение. *Векторным произведением двух ненулевых векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой *вектор* $\vec{c}$ (рисунок 8), что

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Если же среди векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть хотя бы один нулевой, то их векторным произведением является $\vec{0}$. Пишем: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

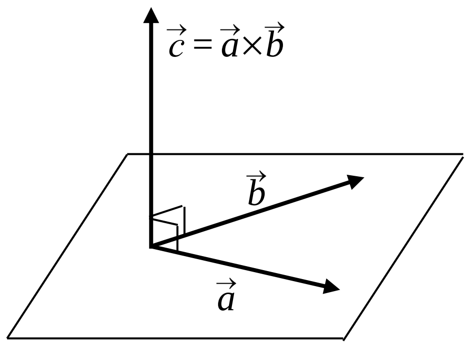

рис. 8

Теорема. *Модуль векторного произведения двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *численно равен площади параллелограмма, построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}$ *и* $\overrightarrow{OB}$*, представляющих эти векторы, отложенные из одной точки (рисунок 9).*

Следствие. (*Третий признак коллинеарности векторов*) *Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору*: $\vec{a} \,||\, \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$. *В частности, для любого вектора* $\vec{a}$ *выполнено* $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.

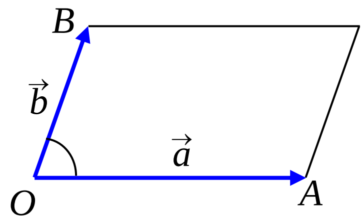

*рис.*9

Отметим, что не только площадь параллелограмма можно найти с помощью векторного произведения двух неколлинеарных векторов, но и можно найти третий вектор, который перпендикулярен двум данным векторам.

Теорема. *Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами в декартовой СК* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$*, вычисляется по формуле*:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{k}.$$

13. Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением трех векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Можно доказать, что оно же равно $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Это позволяет нам использовать обозначение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ без расстановки скобок и знаков. Встречается также такое обозначение: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Теорема. *Модуль смешанного произведения трех векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ *численно равен объему параллелепипеда построенного на направленных отрезках* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, *представляющих эти векторы, отложенные из одной точки.*

Следствие. **1.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$;

2. тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ правая $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$;

3. тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ левая $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$.

Теорема. *Смешанное произведение векторов* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ *в декартовой системе координат вычисляется по формуле*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение скалярного произведения двух векторов и скалярного квадрата вектора.

2. Чему равен скалярный квадрат вектора? Что можно сказать про векторы, если их скалярное произведение равно нулю?

3. По каким формулам вычисляются: а) скалярное произведение векторов, б) длина вектора, в) угол между векторами, если нам известны декартовы координаты векторов?

4. Дайте определение векторного произведения двух векторов.

5. Какую геометрическую величину можно вычислить с его помощью?

6. Какой вектор по отношению к двум данным можно найти с помощью векторного произведения?

7. Выпишите формулу, с помощью которой можно вычислить векторное произведение по координатам.

8. Дайте определение смешанного произведения трех векторов.

9. Какую геометрическую величину можно вычислить с его помощью?

10. Что можно сказать про взаимное расположение трех векторов, в зависимости от знака смешанного произведения?

Задачи для решения на практических занятиях

1. Даны точки $A(4, 6, 3)$, $B(-5, 2, 6)$, $C(4, -4, -3)$. Найти:

а) координаты и модуль вектора $\vec{m} = 4\,\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$;

б) скалярное произведение вектора $\vec{m}$ и $\vec{n} = 4\overrightarrow{AB}$. Будут ли эти векторы ортогональными?

в) проекцию вектора $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$ на вектор $\vec{n}$;

г) координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении λ=4/5.

2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти:

а) модуль векторного произведения векторов $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$. Будут ли векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарными?

б) смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Будут ли эти векторы компланарными?

в) угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$. Найти:

а) площадь сечения *ABM*, где *M* – середина *DC*;

б) объем пирамиды *ABCD*;

в) высоту пирамиды *DH*, опущенную на грань *ABC*.

4. Выясните взаимное расположение следующих векторов (компланарны, образуют правую тройку, образуют левую тройку):

а) $\vec{a}(1, 0, 0)$, $\vec{b}(1, 0, 1)$, $\vec{c}(1, 1, 1)$;

б) $\vec{a}(13, 12, 11)$, $\vec{b}(24, 23, 22)$, $\vec{c}(35, 34, 33)$.

Пример решения задачи

Даны координаты вершин треугольной пирамиды *SABC*: $A(4, 0, 1)$, $B(5, -1, 1)$, $C(4, 7, -5)$, $S(7, 5, 2)$.

а) Найти объем пирамиды, площадь основания *ABC* и высоту (с помощью векторного и смешанного произведений).

б) Найти угол $\angle BAC$. Укажите, какой вектор перпендикулярен основанию.

в) Составить уравнение плоскости основания и вычислить высоту по формуле расстояния от точки до плоскости. Сравнить с ранее полученным результатом.

Решение. **а)** Находим координаты трех векторов, лежащих на ребрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$$\vec{AB}(1,-1,0),\ \vec{AC}(0,7,-6),\ \vec{AS}(3,5,1).$$

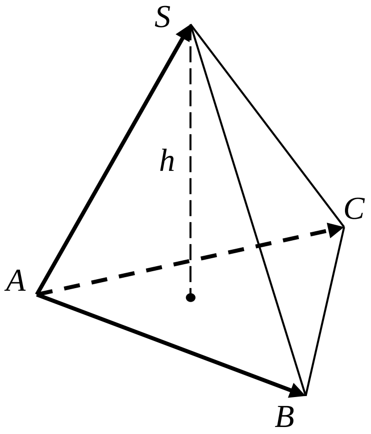

*рис.*10

Модуль смешанного произведения этих векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объем же пирамиды составляет 1/6 от объема параллелепипеда (рисунок 10):

$$V = \frac{1}{6}|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AS}|.$$

Смешанное произведение можно вычислить так:

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AS} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления площади основания нам понадобится векторное произведение $\vec{AB}\times\vec{AC}$. Поэтому проще воспользоваться определением смешанного произведения: $\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AS} = (\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AS}$. При этом, вероятность арифметической ошибки будет намного меньше. Рекомендуем для проверки правильности вычислений использовать оба способа.

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\vec{k} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{36+36+49} = \frac{11}{2}.$$

$$(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AS} = 6\cdot3 + 6\cdot5 + 7\cdot1 = 55. \qquad V = \frac{1}{6}|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AS}| = \frac{55}{6}.$$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{55/2}{11/2} = 5.$$

б) Согласно определению векторного произведения вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому вектор $\vec{h} = \vec{AB}\times\vec{AC}$ будет перпендикулярен основанию пирамиды; $\vec{h}(6,6,7)$.

Угол между векторами $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ ищется по формуле

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Угол $\angle BAC$ – это есть угол между векторами $\overrightarrow{AB}(1,–1, 0)$ и $\overrightarrow{AC}(0, 7,– 6)$.

Поэтому $\cos\angle BAC = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{1\cdot 0+(-1)\cdot 7+0\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\,\sqrt{0^2+7^2+(-6)^2}} = \dfrac{-7}{\sqrt{2}\,\sqrt{85}}.$

$$\angle BAC = \arccos\frac{-7}{\sqrt{170}} = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{170}}.$$

в) Мы уже знаем вектор нормали к плоскости основания: $\vec{h}(6, 6, 7)$. Поэтому уравнение плоскости можно составить по формуле, аналогичной формуле (8): $A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$. Но желательно продемонстрировать знание ещё одного способа составления уравнения. Плоскость, проходящая через точку $M(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум данным векторам $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение координаты точки A и векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+0 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$6(x-4)+6y+7(z-1)=0 \;\Leftrightarrow\; 6x+6y+7z-31=0.$$

(Желательно сделать проверку, подставив в это уравнение координаты точек A, B, C). Высота вычисляется по формуле, аналогичной формуле (10′):

$$h = \frac{|6\cdot 7+6\cdot 5+7\cdot 2-31|}{\sqrt{6^2+6^2+7^2}} = 5,$$

и этот результат совпадает с ранее найденным значением высоты.

Индивидуальные варианты

1. $A(-1, 1, 2)$, $B(-5, 4,-2)$, $C(-1, 2, 3)$, $S(-8,-5, 4)$.

2. $A(0, 2, 2)$, $B(0, 4, 3)$, $C(1, 4, 2)$, $S(7,-1, 7)$.

3. $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, 1, 4)$, $S(2,-7, 3)$.

4. $A(-1, 1,-2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(1,-2, 0)$, $S(5,-2,-12)$.

5. $A(-5, 1, 2)$, $B(-5,-2, 6)$, $C(-4, 4,-2)$, $S(2, 12, 4)$.

6. $A(-5, 1, 2)$, $B(-5,-2, 6)$, $C(-4, 4,-2)$, $S(2, 12, 4)$.

7. $A(-6, 0, 1)$, $B(-6,-3, 5)$, $C(-5, 3,-3)$, $S(1, 9,-1)$.

8. $A(1, 0,-1)$, $B(2, 0, 4)$, $C(4, 2, 3)$, $S(10,-11,-8)$.

9. $A(-1,3,0)$, $B(-1,-1,2)$, $C(0,5,-2)$, $S(7,2,6)$.

10. $A(1,4,2)$, $B(7,6,3)$, $C(3,4,3)$, $S(6,-7,-7)$.

11. $A(2,1,4)$, $B(3,-1,2)$, $C(3,7,6)$, $S(-7,6,-7)$.

12. $A(1,-1,0)$, $B(2,1,2)$, $C(1,1,1)$, $S(3,-2,7)$.

13. $A(-1,1,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(0,3,1)$, $S(6,-2,6)$.

14. $A(-1,-1,0)$, $B(-1,0,2)$, $C(2,-1,2)$, $S(0,-9,1)$.

15. $A(2,-1,1)$, $B(3,-1,2)$, $C(-2,-5,4)$, $S(4,-8,-5)$.

16. $A(-2,0,-3)$, $B(-2,-3,-2)$, $C(0,-3,-1)$, $S(4,-3,-13)$.

17. $A(6,1,1)$, $B(9,2,1)$, $C(6,2,3)$, $S(4,-11,11)$.

18. $A(1,0,-2)$, $B(2,-3,-2)$, $C(0,2,4)$, $S(2,4,-6)$.

19. $A(2,3,1)$, $B(6,3,0)$, $C(2,0,2)$, $S(-1,3,5)$.

20. $A(2,-2,4)$, $B(8,7,12)$, $C(2,-1,3)$, $S(5,1,0)$.

21. $A(-1,-2,2)$, $B(-2,-2,-1)$, $C(0,4,4)$, $S(-2,-6,6)$.

22. $A(3,-2,2)$, $B(3,-6,1)$, $C(0,-2,3)$, $S(3,1,6)$.

23. $A(-2,-4,0)$, $B(-1,-4,-3)$, $C(-3,0,0)$, $S(-1,-2,2)$.

24. $A(-2,0,3)$, $B(-2,3,4)$, $C(4,-2,2)$, $S(-6,-4,4)$.

25. $A(1,-1,3)$, $B(0,-5,3)$, $C(2,-1,0)$, $S(5,2,3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош.– М.: Наука, 1975.
2. Дадаян А.А. Алгебра и геометрия / А.А. Дадаян, В.А. Дударенко.– Минск: Вышэйшая школа, 1989.
3. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Мн.: Вышейшая школа, 1976.
4. Погорелов А.В. Геометрия / А.В. Погорелов.– М.: Наука, 1984.
5. Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие в 2 ч. / М.В.Милованов, М.М. Толкачов Р.И., Тышкевич, А.С.Феденко – Минск: Вышейшая школа, 1987.
6. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / П.С.Моденов – М.: Изд-во МГУ, 1969
7. Кононов С.Г. Аналитическая геометрия: учебное пособие / С.Г. Кононов – Минск, БГУ, 2014
8. Берёзкина Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебное пособие/ Л.Л. Берёзкина – Минск: РИВШ, 2012.
9. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебник для студентов учреждений высшего образования по физическим и радиофизическим специальностям / Л. Л. Березкина. – Минск: РИВШ, 2022.– 411 с.
10. Подоксёнов М.Н. Аналитическая геометрия. Курс лекций с примерами решения задач / М.Н. Подоксёнов.– Витебск, изд-во ВГУ, 2007
11. Подоксёнов, М.Н.Аналитическая геометрия и преобразования плоскости. / М.Н. Подоксёнов.– Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2016. – 285 с.
12. Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи: учеб. пособие для студентов учреждений высш. образования по техническим спец. : в 5 ч. Ч. 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. - Минск : Вышэйшая школа, 2016. – 303 с.
13. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко [и др.]; под общ. ред. Феденко А.С. Минск: Изд-во Университетское, 1989, [1999 – 2-е изд.].
14. Размыслович Г. П. Геометрия и алгебра. Практикум: учеб. пособие для студентов учреждений высш. образования по специальностям «Прикладная математика», «Информатика», «Актуарная математика» и направлениям специальностей «Экономическая кибернетика», «Компьютерная безопасность», «Прикладная информатика» / Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов, В. М. Ширяев. - Минск: Вышэйшая школа, 2018. – 380 с.

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
АЛЕКСАНДРОВИЧ Татьяна Алиевна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации к практическим занятиям
и для самостоятельной работы

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *А.В. Табанюхова*

Подписано в печать 15.11.2023. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 1,51. Тираж 30 экз. Заказ 138.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.