ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.615.4:517.537.32
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-359-365

Поступило в редакцию 10.04.2023
Received 10.04.2023

А. В. Лебедев[1], Ю. В. Трубников[2], М. М. Чернявский[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

О МЕТОДЕ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА–ЭЙТКЕНА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Развит метод Эйлера–Лагранжа и вычислены все корни произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на основе подсчета пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли–Эйткена–Никипорца), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z) / P(z)$.

Ключевые слова: корень полинома, ряд Тейлора, ряд Лорана, определитель Адамара, определитель Вандермонда

Для цитирования. Лебедев, А. В. О методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 5. – С. 359–365. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-5-359-365

Andrei V. Lebedev[1], Yurii V. Trubnikov[2], Mikhail M. Chernyavsky[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

ON THE BERNOULLI–EULER–LAGRANGE–AITKEN NUMERICAL METHOD FOR ROOTS OF POLYNOMIALS

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. The article presents a development of the Euler–Lagrange method for calculation of all roots of an arbitrary polynomial $P(z)$ with complex coefficients based on the calculation of the limits of ratios of determinants (as in the Bernoulli–Aitken–Nikiporets methods) built by means of the Taylor and Laurent series coefficients for the function $P'(z) / P(z)$.

Keywords: root of a polynomial, Taylor series, Laurent series, Hadamard determinant, Vandermonde determinant

For citation. Lebedev A. V., Trubnikov Yu. V., Chernyavsky M. M. On Bernoulli–Euler–Lagrange–Aitken numerical method for roots of polynomials. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 5, pp. 359–365 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-5-359-365

В 1728 г. Д. Бернулли в [1] для полиномов с действительными коэффициентами $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0, a_n \neq 0$, (т. е. $P(x)$ – полином степени n, для которого 0 не является корнем) описал метод (названный последователями в его честь) нахождения наибольшего по модулю действительного корня с помощью вычисления предела последовательности t_{m+1} / t_m отношений соседних по номерам решений разностного уравнения

$$a_0t_m + a_1t_{m-1} + \ldots + a_nt_{m-n} = 0,\ m = n, n + 1, \ldots, \tag{1}$$

построенного по коэффициентам полинома $P(x)$ (подробности, см., напр., в [2, гл. 10]). Обоснования этому методу Д. Бернулли не дал. В 1748 г. Л. Эйлер в [3] посвятил главу 17 анализу метода типа метода Бернулли для нахождения наибольшего (наименьшего) по модулю действительного корня многочлена $P(x)$, не имеющего кратных корней. Л. Эйлер использовал степенные ряды (он называл их рекуррентными рядами), построенные по функции $1 / P(x)$ и подсчитывал пределы отношения соседних коэффициентов этих рядов. Он обнаружил (на примерах), что в ситуации, когда $P(x)$ имеет пару наибольших по модулю комплексно сопряженных корней метод может не работать – предел отношения соседних коэффициентов может не существовать. В 1798 г. Ж. Л. Лагранж, развивая идеи Эйлера, в [4] описал соответствующий метод для подсчета наибольшего (наименьшего) по модулю действительного корня многочлена $P(x)$, обладающего кратными корнями. Для этого он рассматривал ряды, построенные по функции $\frac{P'(x)}{P(x)}$. В 1927 г. А. К. Эйткен в [5] обобщил метод Бернулли для подсчета произведений упорядоченных по модулю корней полинома $P(x)$. Он использовал при этом пределы отношений определителей, составленных из последовательных по номерам решений разностного уравнения (1) (подробности см., напр., в [2, гл. 10], где содержится также обзор иных сходных по духу методов подсчета корней полиномов с действительными коэффициентами). В работах В. И. Шмойлова, Д. И. Савченко [6] и В. И. Шмойлова, Г. А. Кириченко [7], на базе разработанного В. И. Шмойловым [8] r / φ-алгоритма суммирования (расходящихся) цепных дробей, подсчет корней полинома $P(x)$ методом Эйткена преобразован в подсчет цепных дробей Никипорца $N_i^{(n)} = N_i(a_0, ..., a_n)$ (отношений бесконечных «определителей», выражающихся через коэффициенты полинома $P(x)$), для вычисления которых и используется r / φ-алгоритм.

В данной работе мы развиваем метод Эйлера–Лагранжа и вычисляем все корни произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами на базе подсчета пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли–Эйткена–Никипорца), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $\frac{P'(z)}{P(z)}$.

Соответствующие методы для вычисления наибольшего и наименьшего по модулю корня полинома $P(z)$ получены в [9; 10].

Пусть $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$; $a_0, a_n \neq 0$ – произвольный полином степени n, для которого 0 не является корнем, т. е.

$$P(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (z - z_p)^{m_p}, \tag{2}$$

где $m_1 + m_2 + ... + m_p = n$ – сумма кратностей корней z_j и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$ и $z_j \neq 0$, $j = 1, ..., p$. Вместе с полиномом $P(z)$ рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{3}$$

Здесь правая часть – разложение функции $\frac{P'(z)}{P(z)}$ в ряд Тейлора в окрестности нуля.

Отметим сразу же, что современными средствами компьютерной математики (например, система Maple или Wolfram Mathematica) элементарно осуществляется вычисление любого числа коэффициентов этого ряда для произвольного заданного полинома $P(z)$.

По коэффициентам c_k ряда (3) строятся определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел (k, r), $k \geq 0$, $r > 0$, определителем Адамара $H_{k,r}$ называется определитель

$$H_{k,r} = \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+r-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k+r-1} & c_{k+r} & \cdots & c_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Для набора чисел $(\alpha_1, ..., \alpha_s)$, $s > 1$, определителем Вандермонда $V(\alpha_1, ..., \alpha_s)$ называется определитель

$$V(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_s\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_s^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} & \ldots & \alpha_s^{s-1}\end{vmatrix};$$

и полагаем $V(\alpha_1)=1.$

Следующее утверждение связывает определители Адамара и Вандермонда для рассматриваемого полинома $P(z)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $(z_1,\ldots,z_p)$ *– корни полинома P(z) (2) и* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *– ряд Тейлора (3). Для любой пары* $(k,r),\ k\ge 0,\ 0<r\le p,$ *имеет место равенство*

$$H_{k,r}=(-1)^r r!\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_r\\ 1\le j_r\le p}}\frac{m_{j_1}\cdot\ldots\cdot m_{j_r}}{(z_{j_1}\cdot\ldots\cdot z_{j_r})^{k+2r-1}}[V(z_{j_1},\ldots,z_{j_r})]^2.$$

В частности,

$$H_{k,p}=(-1)^p p!\,m_1\cdot\ldots\cdot m_p\left(\frac{1}{z_1\cdot\ldots\cdot z_p}\right)^{k+2p-1}[V(z_1,\ldots,z_p)]^2. \tag{4}$$

Для $r>p\quad H_{k,r}=0$.

Из формулы (4) вытекает, что

$$\frac{H_{k,p}}{H_{k+1,p}}=z_1\cdot\ldots\cdot z_p.$$

А для $r<p$ имеет место следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть* $0<|z_1|\le|z_2|\le\ldots\le|z_r|<|z_{r+1}|\le|z_{r+2}|\le\ldots\le|z_p|$ *(для* $r=p-1$ *условие записывается как* $0<|z_1|\le|z_2|\le\ldots\le|z_{p-1}|<|z_p|$*). Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}=z_1\cdot\ldots\cdot z_r. \tag{5}$$

При этом

$$\left|\frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}-z_1\cdot\ldots\cdot z_r\right|<C\,q^{k+2r-1},$$

где

$$0<q=\frac{|z_r|}{|z_{r+1}|}<1,$$

т. е. последовательность (5) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

И если k такое, что $q^{k+2r}D<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, *где*

$$D=\sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_r\\ 1\le j_r\le p\\ (j_1,j_2,\ldots,j_r)\ne(1,2,\ldots,r)}} d_{j_1\ldots j_r},\quad d_{j_1\ldots j_r}=\frac{m_{j_1}\cdot\ldots\cdot m_{j_r}}{m_1\cdot\ldots\cdot m_r}\left[\frac{V(z_{j_1},\ldots,z_{j_r})}{V(z_1,\ldots,z_r)}\right]^2, \tag{6}$$

то можно выбрать $C=|z_1\cdot\ldots\cdot z_r|\,2D(1+2\varepsilon)$.

Отметим, что $H_{k,1}=c_k$. Поэтому для вычисления наименьшего по модулю корня получаем следующее утверждение, составляющее (для полиномов с действительными коэффициентами и их действительных корней) суть наблюдений Л. Эйлера в [3, глава 17]. При этом Эйлер не приводил оценку скорости сходимости приближений.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $(z_1,\dots,z_p)$ *– корни полинома P(z) (2),* $0<|z_1|<|z_2|\le\dots\le|z_p|$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ *– ряд Тейлора (3). Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{c_k}{c_{k+1}}=z_1. \tag{7}$$

При этом

$$\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}-z_1\right|<Cq^{k+1},$$

где

$$0<q=\frac{|z_1|}{|z_2|}<1,$$

т. е. последовательность (7) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

И если k такое, что $q^{k+2}(n-1)<\frac{1}{2},$ *то можно выбрать* $C=|z_1|4(n-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В проверке здесь нуждается только последняя формула для константы C. Она вытекает из оценок для C в утверждении теоремы 2. Действительно, в рассматриваемой ситуации из (6) получаем

$$D=\sum_{j=2}^{p}\frac{m_j}{m_1}\le n-1,$$

и в соответствии с утверждением теоремы 2 можем выбрать $C=|z_1|2D\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)=|z_1|4(n-1)$.

Теорема 2, по существу, описывает не только достаточные, но и необходимые условия существования обсуждаемых пределов. А именно, справедлива следующая

Т е о р е м а 3. *Пусть* $0<|z_1|\le|z_2|\le\dots\le|z_r|=|z_{r+1}|\le|z_{r+2}|\le\dots\le|z_p|$. *Тогда не существует предела* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}$.

Данная теорема раскрывает отмеченное во введении наблюдение Л. Эйлера [3, гл. 17] о том, что при наличии (у полинома с действительными коэффициентами) пары наибольших по модулю комплексно сопряженных корней метод типа Бернулли может не работать. Заметим, при этом, что пары корней не обязаны быть комплексно сопряженными (они могут быть любыми – в том числе и действительными). В качестве примера достаточно рассмотреть многочлен $P(z)=z^2-1$. Здесь $\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}=\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k-1]z^k$. $H_{k,1}=\left[(-1)^k-1\right]$ и последовательность $\frac{H_{k,1}}{H_{k+1,1}}$ не имеет предела.

Вышеприведенные результаты позволяют вычислять корни многочлена $P(z)$, начиная с наименьшего по модулю $0<|z_1|<|z_2|<\dots$. Ниже описывается аналогичная процедура вычисления корней полинома, начиная с наибольшего по модулю.

Рассмотрим разложение функции $\frac{P'(z)}{P(z)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности (т. е. для $|z|>\max\limits_{1\le j\le p}|z_j|$).

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{j=1}^{p}\frac{m_j}{z-z_j}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{z^{k+1}}. \tag{8}$$

По коэффициентам ряда (8) строим соответствующие определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел (k,r), $k\ge0$, $r>0$, определителем Адамара $\mathbf{H}_{k,r}$ называется определитель

$$\mathbf{H}_{k,r} = \begin{vmatrix} b_k & b_{k+1} & \dots & b_{k+r-1} \\ b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k+r-1} & b_{k+r} & \dots & b_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Аналогом теоремы (1) для ряда Лорана (8) служит

Т е о р е м а 4. *Пусть* $(z_1,\dots,z_p)$ *– корни полинома* $P(z)$ *(2) и* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{z^{k+1}}$ *– ряд Лорана (8). Для любой пары* (k, r), $k \ge 0$, $0 < r \le p$, *имеет место равенство*

$$\mathbf{H}_{k,r} = r!\sum_{\substack{j_1<j_2<\dots<j_r \\ 1\le j_r\le p}} m_{j_1}\cdot\ldots\cdot m_{j_r}(z_{j_1}\cdot\ldots\cdot z_{j_r})^k[V(z_{j_1},\dots,z_{j_r})]^2.$$

В частности,

$$\mathbf{H}_{k,p} = p!\,m_1\cdot\ldots\cdot m_p(z_1\cdot\ldots\cdot z_p)^k[V(z_1,\dots,z_p)]^2. \tag{9}$$

Для $r > p$ $\mathbf{H}_{k,r} = 0$.

Из (9) вытекает, что

$$\frac{\mathbf{H}_{k+1,\,p}}{\mathbf{H}_{k,\,p}} = z_1\cdot\ldots\cdot z_p.$$

А для $r < p$ имеет место следующий аналог теоремы 2.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $|z_p|\ge|z_{p-1}|\ge\ldots\ge|z_{p-r+1}|>|z_{p-r}|\ge|z_{p-r-1}|\ge\ldots\ge|z_1|>0$ *(для* $r = p-1$ *условие записывается как* $0<|z_1|<|z_2|\le\ldots\le|z_p|$*). Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}} = z_{p-r+1}\cdot\ldots\cdot z_p. \tag{10}$$

При этом

$$\left|\frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}} - z_{p-r+1}\cdot\ldots\cdot z_p\right| < C\,q^k,$$

где

$$0 < q = \left|\frac{z_{p-r}}{z_{p-r+1}}\right| < 1,$$

т. е. последовательность (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

И если k такое, что $q^k D < \varepsilon < \frac{1}{2}$, *где*

$$D = \sum_{\substack{j_1>j_2>\dots>j_r \\ 1\le j_1\le p \\ (j_1,j_2,\dots,j_r)\ne(p,p-1,\dots,p-r+1)}} d_{j_1\dots j_r},\quad d_{j_1\dots j_r} = \frac{m_{j_1}\cdot\ldots\cdot m_{j_r}}{m_p\cdot\ldots\cdot m_{p-r+1}}\left[\frac{V(z_{j_1},\dots,z_{j_r})}{V(z_p,\dots,z_{p-r+1})}\right]^2, \tag{11}$$

то можно выбрать $\boldsymbol{C} = |z_p\cdot\ldots\cdot z_{p-r+1}|\,2D(1+2\varepsilon)$.

Отметим, что $\mathbf{H}_{k,1} = b_k$. Поэтому для вычисления наибольшего по модулю корня, подобно следствию 1, получаем следующее утверждение, составляющее (для полиномов с действительными коэффициентами и их действительных корней) суть наблюдений Л. Эйлера в [3, глава 17]. При этом Л. Эйлер не приводил оценку скорости сходимости приближений.

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $(z_1,\dots,z_p)$ *– корни полинома* $P(z)$ *(2), и* $|z_p|>|z_{p-1}|\ge\ldots\ge|z_1|>0$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{z^{k+1}}$ *– ряд Лорана (8). Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_{k+1}}{b_k}=z_p, \tag{12}$$

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}-z_p\right|<C\,q^k,$$

где

$$0<q=\frac{|z_{p-1}|}{|z_p|}<1,$$

т. е. последовательность (12) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

И если k такое, что $q^k(n-1)<\frac{1}{2}$, *то можно выбрать* $C=|z_p|\,4(n-1)$.

Для вывода константы C здесь замечаем, что в рассматриваемой ситуации из (11) получаем

$$D=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{m_j}{m_p}\le n-1.$$

Подобно теореме 2, теорема 5, по существу, описывает не только достаточные, но и необходимые условия существования обсуждаемых пределов. А именно, справедлива следующая

Т е о р е м а 6. Пусть $|z_p|\ge|z_{p-1}|\ge\ldots\ge|z_{p-r+1}|=|z_{p-r}|\ge|z_{p-r-1}|\ge\ldots\ge|z_1|>0$. Тогда не существует предела $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}}$.

Список использованных источников

1. Bernoulli, D. Observationes de serbus recurrentibus / D. Bernoulli // Comment. acad. sc. Petrop. – 1732 (1728). – N 3. – P. 85–100.

2. McNamee, J. M. Numerical methods for roots of polynomials, part II / J. M. McNamee, V. Y. Pan. – Boston; Amsterdam; Oxford, 2013. – 741 p.

3. Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных: в 2 т. / Л. Эйлер; пер. с лат. Е. Л. Пацановского. – 2-е изд. – М., 1961. – Т. 1. – 315 с.

4. Lagrange, J. L. Sur la Méthode d'Approximation tirée des séries récurrentes (1798) / J. L. Lagrange // Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. – Paris, 1826. – Vol. 6. – P. 130–137.

5. Aitken, A. C. On Bernulli's Numerical Solution of Algebraic Equations / A. C. Aitken // Proc. R. Soc. Edinburgh. – 1927. – Vol. 46. – P. 289–305. https://doi.org/10.1017/s0370164600022070

6. Шмойлов, В. И. Некоторые применения алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей / В. И. Шмойлов, Д. И. Савченко // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 258–276.

7. Шмойлов, В. И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями Никипорца / В. И. Шмойлов, Г. А. Кириченко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 4-1. – С. 428–439. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-428-439

8. Шмойлов, В. И. Непрерывные дроби и *r* / φ-алгоритм / В. И. Шмойлов. – Таганрог, 2012. – 608 с.

9. Трубников, Ю. В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2018. – № 4 (101). – С. 5–17.

10. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.

References

1. Bernoulli D. Observationes de serbus recurrentibus. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1732 (1728), no. 3, pp. 85–100.

2. McNamee J. M., Pan V. Y. *Numerical methods for roots of polynomials, part II.* Boston, Amsterdam, Oxford, 2013. 741 p.

3. Euler L. *Introduction to the analysis of infinite (in two volumes). Vol. 1.* Moscow, 1961. 315 p. (in Russian).

4. Lagrange J. L. Sur la Méthode d'Approximation tirée des séries récurrentes (1798). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés.* Paris, 1826, vol. 6, pp. 130–137.

5. Aitken A. C. On Bernulli's Numerical Solution of Algebraic Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1927, vol. 46, pp. 289–305. https://doi.org/10.1017/s0370164600022070

6. Shmoylov V. I., Savchenko D. I. Some applications of the summation algorithm of continued fractions. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennoro universiteta. Seriya Fizika. Matematika = Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 258–276 (in Russian).

7. Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Solution of Algebraic Equations by Continuous Fractions of Nikiportsa. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 4-1, pp. 428–439 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-428-439

8. Shmoylov V. I. *Continued Fractions and the r / φ-algorithm*. Taganrog, 2012. 608 p. (in Russian).

9. Trubnikov Yu. V., Chernyavsky M. M. Divergent Power Series and Formulas of the Approached Analytical Solution of Algebraic Equations. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaŷnaga ŷniversiteta = Bulletin of Vitebsk State University*, 2018, no. 4 (101), pp. 5–17 (in Russian).

10. Chernyavsky M. M., Trubnikov Yu. V. Modification of Aitken's formulas and algorithms for analytical finding of multiple roots of polynomials. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaŷnaga ŷniversiteta = Bulletin of Vitebsk State University*, 2021, no. 1 (110), pp. 13–25 (in Russian).

Информация об авторах

Лебедев Андрей Владимирович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220050, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lebedev@bsu.by.

Трубников Юрий Валентинович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Витебский государственный университет им. П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: yurii_trubnikov@mail.ru.

Чернявский Михаил Михайлович – преподаватель. Витебский государственный университет им. П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: misha360ff@mail.ru.

Information about the authors

Lebedev Andrei V. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lebedev@bsu.by.

Trubnikov Yurii V. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: yurii_trubnikov@mail.ru.

Chernyavsky Mikhail M. – Lecturer. Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: misha360ff@mail.ru.