УДК 512.622

АКТУАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

М. М. ЧЕРНЯВСКИЙ
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова
Витебск, Беларусь

Введение. Несмотря на продолжительную историю исследования свойств алгебраических полиномов действительного и комплексного аргумента, некоторые направления там практически не развивались из-за высокой трудоемкости ручных вычислений. Ситуация существенно изменилась благодаря росту возможностей систем компьютерной алгебры, вследствие чего ряд направлений в алгебре полиномов получил существенное развитие. Одним из таких направлений является построение точных формул для кратных корней полиномов [1]. Цель работы – в аналитическом виде установить структуру частных производных от результантов многочленов, записанных с полиномом произвольной степени и его производной заданного порядка, для обоснования формул для кратных корней.

Основная часть. Пусть $f(z)=a_0\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$ и $g(z)=b_0\prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j)$ – полиномы комплексного аргумента. Напомним, что выражение $R=a_0^m b_0^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$ называется *результантом* этих полиномов. Записанное произведение можно представить в виде [2; с. 336]:

$$R=a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot g(\alpha_n)=(-1)^{mn}b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m). \qquad (1)$$

В терминах коэффициентов полиномов произведение (1) часто записывают в виде определителя, который называют *формулой Сильвестра* (в ячейках определителя, где оставлены пустые поля, подразумеваются нули):

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n. \end{matrix}$$

Для обоснования точных символьных формул для корня кратности 3 исследуем структуру частных производных третьего порядка от результанта исходного многочлена $f(z)$, записанного с его второй производной $g(z)$.

Обозначим $g_i \equiv b_0 z_i^{n-2} + b_1 z_i^{n-3} + \ldots + b_{n-3} z_i + b_{n-2} = \sum_{j=0}^{n-2} b_j z_i^{n-2-j}$ – значение производной $g(z) = f''(z)$ на i-м корне исходного многочлена.

В случае корня кратности 3 $z_1 = z_2 = z_3$, $g_1 = g_2 = g_3$, т. е. для последующего исследования результант удобно записать в виде $R = g_1^3 \prod_{m=4}^{n} g_m$. Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j}\left(g_1^3\right) \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + g_1^3 \frac{\partial}{\partial b_j}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right) = 3 g_1^2 \cdot z_1^{n-2-j} \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + g_1^3 \frac{\partial}{\partial b_j}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right).$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_j \partial b_k} = 3\, z_1^{n-2-j} \frac{\partial}{\partial b_k}\left(g_1^2\right) \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + 3 g_1^2 z_1^{n-2-j} \cdot \frac{\partial}{\partial b_k}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right) + \frac{\partial}{\partial b_k}\left(g_1^3\right) \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m +$$

$$+ g_1^3 \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right) = 3 \cdot 2 \cdot z_1^{2(n-2)-(j+k)} g_1 \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + 3 g_1^2 z_1^{n-2-j} \cdot \frac{\partial}{\partial b_k}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right) +$$

$$+ 3\, z_1^{n-2-k} g_1^2 \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + g_1^3 \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right).$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial b_j \partial b_k \partial b_l} = 3! \cdot z_1^{2(n-2)-(j+k+l)} \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + 3! \cdot z_1^{2(n-2)-(j+k)} g_1 \cdot \frac{\partial}{\partial b_l}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right) +$$

$$+ 3 z_1^{n-2-j} \frac{\partial}{\partial b_l}\left(g_1^2 \cdot \frac{\partial}{\partial b_k}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right)\right) + 3\, z_1^{n-2-k} \frac{\partial}{\partial b_l}\left(g_1^2 \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m\right) + \frac{\partial}{\partial b_l}\left(g_1^3 \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k}\left(\prod_{m=4}^{n} g_m\right)\right).$$

Последние 3 слагаемые можно подробно не расписывать, так как после раскрытия скобок в каждом слагаемом появятся множители g_1 в определенных степенях, которые в случае корня кратности 3 будут равны нулю.

Таким образом, после подстановки $g_1 = 0$ окончательно получаем

$$\frac{\partial^3 R}{\partial b_j \partial b_k \partial b_l} = 3! \cdot z_1^{2(n-2)-(j+k+l)} \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m \quad \left(j, k, l = 0, 1, 2, \ldots, n-2\right). \tag{2}$$

Придавая тройкам (j, k, l) различные значения и записывая отношение частных производных (2), будем получать значение z_1 в различных степенях.

Заключение. В ходе исследования частных производных различных порядков от результантов многочленов дано обоснование точных аналитических формул для вычисления кратных корней полинома через коэффициенты. Правые части этих формул представляют собой рациональные функции от коэффициентов, которые легко получить с помощью систем компьютерной математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чернявский, М. М.** Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.

2. **Курош, А. Г.** Курс высшей алгебры : учебник / А. Г. Курош. – 19-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 432 с.