УДК 373.3.016:51

Методика работы с ключевыми задачами в контексте укрупнения дидактических единиц

В.В. Устименко, А.В. Виноградова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В методике преподавания математики в настоящее время учеными реализуется идея рассмотрения взаимосвязанных задач. Особо следует выделить подход, который включает в себя выделение системы ключевых задач (под ключевой понимают такую задачу, к которой можно свести решение некоторого количества задач той или иной темы).

Цель исследования – определить методику работы с ключевыми задачами.

***Материал и методы.** Материалами исследования послужили труды теоретиков и практиков по проблемам преподавания математики и опыт работы авторов со школьниками в УНКЦ на базе ГУО «СШ № 45 г. Витебска».*

***Результаты и их обсуждение.** Обучение решению задач с помощью ключевых может состоять из нескольких этапов: на первом этапе показать учащимся, что некоторые задачи можно решить с помощью одной и той же задачи, и при этом упрощается их решение. Далее ввести определение ключевой задачи и выделить систему ключевых задач, по теме. Затем вместе с учениками последовательно выявить весь набор ключевых задач.*

Решение практически любой ключевой задачи можно подвергнуть укрупнению, если подходить к нему с позиций его незаконченности. Одновременно с укрупнением решения задачи подобные изменения можно наблюдать и в других ее компонентах (в ее условии, заключении, базисе решения). Использование блоков укрупненных ключевых задач в учебном процессе параллельно с обучением школьников методам решений должно позволять учащимся усваивать и другой материал геометрии: различные понятия, теоремы и т.д.

***Заключение.** Организация усвоения учащимися отдельных методов решения геометрических задач требует включения в учебный процесс блоков укрупненных задач. Использование подобных блоков предполагает реализацию следующих этапов: работа учащихся с готовыми блоками, составление последних школьниками под руководством учителя и самостоятельно.*

***Ключевые слова:** укрупнение действия, ключевые задачи, методы решения, блоки взаимосвязанных задач.*

Methodology of Work with Key Problems in the Context of Integration of Didactic Units

V.V. Ustimenko, A.V. Vinogradova
Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

In the methods of teaching Mathematics at the moment methodists are implementing the idea of considering interrelated problems. Especially it is noteworthy to identify the approach, which includes the selection of the key problems (the key problem is understood as the problem which can reduce the solution of a number of tasks of a topic).

The purpose of the study is to identify the methods of work with key problems.

***Materials and methods.** Study materials were works by theorists and practitioners on teaching Mathematics and experience of the authors with students.*

***Findings and their discussion.** Teaching to solve problems using key ones can consist of several stages: the first stage to show students that some problems can be solved by the same problem, and it simplifies their solution. Next, introduce the definition of the key problem and single out system of key problems on the topic. Then, together with students consistently identify the entire set of key problems.*

Solution to almost any problem can be subjected to a key consolidation, if you approach it from the standpoint of its incompleteness. Along with the enlargement of solving the problem, such changes can be seen in its other components (in its condition, the conclusion, the basis of the solution). Using blocks of consolidated key problems in the educational process in parallel with teaching students the methods of their solutions should allow students to assimilate other material geometry, different concepts, theorems, etc.

***Conclusion.** Organization of individual students mastering methods for solving geometric problems requires the inclusion in the educational process of the integrated unit tasks. Using these blocks involves implementation of the following stages: students work with ready-made blocks, their drawing by pupils under the guidance of the teacher and individually.*

***Key words:** consolidation actions, key problems, methods, blocks of interrelated problems.*

Идея внедрения в процесс обучения геометрии блоков взаимосвязанных задач сегодня все больше привлекает к себе внимание методистов и педагогов. Однако в школьных учебниках по данному предмету эта идея своего отражения пока не нашла. Возможные связи между содержащимися в них задачами авторами, как правило, не учитываются. Задачи, предлагаемые в учебниках для работы школьников в классе и дома, оказываются мало связанными, особенно по линии решений. Кроме того, процесс решения задачи на уроках обычно заканчивается получением ответа, нередко с помощью какого-либо одного способа решения. В связи с этим возникает проблема обучения учащихся методам решения геометрических задач, которая может быть решена на основе обращения к теории укрупнения дидактических единиц. В нашей работе в качестве дидактической единицы, подвергаемой укрупнению, выступает действие как структурный компонент методов решения задач. Средством укрупнения действий, адекватных методам решения геометрических задач, являются блоки самих задач, взаимосвязанных между собой по линии укрупнения своих решений. Образуются подобные блоки в соответствии с комплексом методических приемов: замена требования задачи каким-либо новым требованием; замена условия задачи каким-либо новым условием; составление обратной задачи; обобщение задачи; расширение чертежа задачи [1].

Цель исследования – определить методику работы с ключевыми задачами.

Материал и методы. Материалами исследования послужили труды теоретиков и практиков по вопросам преподавания математики и укрупнения дидактических единиц, многолетний опыт работы авторов со школьниками. При проведении исследования использовались эмпирические и логические методы.

Результаты и их обсуждение. Под ключевой задачей понимают такую задачу, к которой можно свести решение некоторого количества задач той или иной темы. Другими словами, ключевая задача – это именно та задача, которая помогает ученику не теряться во множестве вспомогательных задач, связанных с исходной задачей. Если хорошо знать ключевую задачу, то можно решить не 1–2 задачи темы, а до 20 задач. От учащегося требуется не только прочное знание условия, рисунка и решения ключевой задачи, но и умение «видеть» ее в данной задаче. Последнее является для учеников наиболее сложным моментом. Следует отметить, что ключевые задачи являются тем минимумом, которым необходимо овладеть, чтобы решить практически любую задачу темы. Таким образом, вместе с целью научиться решать задачи одновременно ставится другая – знать и уметь решать ключевые задачи. Значит, в обучении математике эти задачи являются как средством, так и целью обучения.

Для отбора ключевых задач предлагаем следующий порядок действий:

- внимательно проанализировать всевозможные способы решения как каждой задачи по теме, так и всех задач в целом;
- разбить все задачи темы на группы, которые включают, по возможности, максимальное количество задач, решения которых осуществляются при помощи одной и той же задачи (которая, скорее всего, уже сформулирована как одна из этих задач). Она и будет ключевой задачей для данной группы;
- из выбранных таким образом ключевых задач создают новую группу, которая должна включать не более 7–8 (иногда до 10) подобных задач.

Вместе с тем отметим, что данный порядок действий не является «жестким» указанием к выполнению. Его можно детализировать, дополнять, изменять на свое усмотрение.

Обучение решению задач с помощью ключевых может состоять также из нескольких этапов: на первом этапе рекомендуется показать учащимся, что некоторые задачи можно решить с помощью одной и той же задачи. И при этом упрощается их решение. Далее следует ввести определение ключевой задачи. Когда учащиеся только знакомятся с понятием «ключевая задача», учитель сам выделяет систему ключевых задач по разбираемой теме. При этом в зависимости от подготовленности учащихся все задачи могут быть разобраны и записаны на одном уроке, а могут записываться постепенно на нескольких уроках. Затем процесс обучения необходимо строить таким образом, чтобы вместе с учениками последовательно выявить весь набор ключевых задач по данной теме. На последующих этапах учителю рекомендуется только руководить процессом и использовать следующую формулировку: «Попробуйте решить эту задачу с помощью ключевой» (можно даже назвать какой). Ученикам нужно провести аналогию с решенными подобным образом задачами. Этот этап является наиболее трудным для изучения, так как учащимся необходимо самостоятельно подобрать нужную в данном случае ключевую задачу, с помощью которой можно решить исходную.

Отметим, что переход от одного этапа к другому должен осуществлять сам учитель, потому что только он может определить уровень сформированности у школьников навыков решения задач с помощью ключевых.

Использование системы ключевых задач позволяет, с одной стороны, включить в работу каждого ученика, а с другой – развивает системное, логическое мышление. Для мотивированных детей появляется возможность проанализировать и оценить материал в полном объеме, сравнить разные методы решения, определить границы применимости для дальнейшего использования полученных знаний при решении более сложных задач.

Между тем, методисты-математики, а также многие опытные учителя утверждают, что процесс решения задачи не должен заканчиваться только после выполнения ее требования. Не следует останавливаться на этом, сводя практически все функции задачи к нулю. Необходимо дальше работать, «играть» с задачей, образуя на ее основе задачи-аналогии, задачи-обобщения, обратные или противоположные ей задачи и т.д. Это вносит в учебный процесс множество положительных моментов с методической точки зрения.

Раскроем методику такой «игры» с отдельно взятой ключевой задачей в контексте укрупнения действий, адекватных методам ее решения.

Предположим, что учащимся предложена следующая задача:

1.1. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти высоту трапеции.

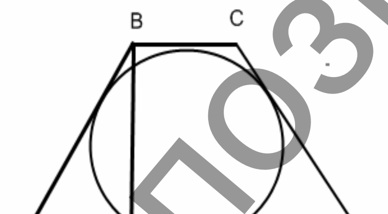

Рис. 1.

В соответствии с заключительным этапом решения задачи, выделяемым в рамках деятельностного подхода, после выполненного решения с учениками необходимо провести анализ данной задачи: обсудить ее содержание, этапы решения, выявить другие возможные способы получения правильного ответа. Тогда задачами, укрупняющими задачу 1.1, могут быть следующие задачи:

1.2. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти диагональ.

1.3. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти площадь трапеции.

1.4. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти угол между диагоналями.

1.5. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти острый угол при основании.

1.6. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти радиус окружности.

1.7. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти длину окружности.

1.8. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти отношение периметра трапеции и длины окружности.

1.9. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 10, 24. Найти площадь треугольника АОВ.

1.10. Основания трапеции равны a и b. Найти высоту трапеции.

При решении любой из задач 1.1–1.9 на некотором этапе также можно решить задачу, обратную к ней или обобщенную.

Таким образом, анализ простейшей задачи 1.1, осуществленный в контексте укрупнения ее решения, позволяет составить достаточно большой блок различных задач, в который могут войти задачи не только вычислительного характера.

Развитие ключевой задачи, осуществляемое в контексте укрупнения ее решения, оказывает положительное воздействие на многие личностные качества обучаемых. Так, выполнение учениками упражнений на восстановление того или иного задачного блока способствует развитию у учащихся вариативности и логики мышления, интуиции, воображения. Любое упражнение, где требуется составить одну или более новых задач, также помогает формировать эти качества параллельно с развитием речи и памяти учащихся, раскрытием их творческого потенциала. Упражнения с блоками, содержащими взаимно обратные задачи, позволяют развивать у учащихся элементы самоконтроля, критичности их мышления, самостоятельности и т.д., в то же время способствуя упрочнению приобретаемых ими знаний, умений и навыков. Хотя последнему, на наш взгляд, способствует не только наличие в блоках задач, обратных друг к другу, но и всякая отдельно взятая укрупненная задача. Как утверждают психологи, лучшее запоминание, усвоение чего-либо (учебного материала, доказательства теоремы, решения задачи и т.д.) дает незавершенное действие, что объясняется возникновением так называемой остаточной напряженности. В случае обращения учащихся к решению укрупненной задачи-2 (решение которой состоит из решения задачи-1 и n новых действий) подобная напряженность всегда существует за счет наличия в решении n новых действий. Поэтому выполненное решение такой задачи-2 запоминается школьниками лучше, чем в том случае, если бы не было предварительного решения задачи-1. Лучше будут усвоены ими и знания, необходимые для осуществления этого решения, и действия, адекватные используемому методу решения.

Более основательно усвоить действия, соответствующие различным методам решения ключевых задач, а значит, и упрочнить навыки работы с этими методами, школьникам позволит знание самих методов решения.

Все методы решения задач по геометрии нередко разделяют на три группы: алгебраические, геометрические, комбинированные. Под алгебраическим методом будем понимать метод составления уравнения или системы уравнений, в которые входят заданные и искомые величины. При поиске решений геометрических задач с помощью уравнений более удобным является анализ Евклида: искомая величина обозначается через x, и на основе текста задачи выводятся следствия до тех пор, пока не будет получено уравнение, связывающее искомую величину x с данными величинами. При этом учащихся следует обучать приемам составления уравнений:

- если в прямоугольном треугольнике все стороны выражаются через известные и неизвестные величины, то уравнение составляем с помощью теоремы Пифагора;
- если в подобных треугольниках сходственные стороны выражаются известными и неизвестными величинами, то уравнение составляем на соотношении сходственных сторон;
- один и тот же элемент фигуры необходимо выразить через известные и неизвестные величины разными способами, затем эти выражения приравнять;
- использовать геометрические формулы, в которых вместо входящих в них букв следует подставить известные и неизвестные величины;
- если в качестве неизвестной величины вводится угол, то составляется тригонометрическое уравнение с использованием соотношений сторон и углов в треугольнике.

Иногда при решении геометрических задач нужно ввести вспомогательный отрезок или угол. Тогда величину этого отрезка или угла полагают равной, например, x и затем находят искомую величину. В процессе вычислений буква x обычно сокращается, поэтому данный метод иногда причисляют к алгебраическому методу.

Одной из разновидностей алгебраического метода является координатный метод, который дает возможность решения задач по геометрии средствами алгебры. Происходящие при этом преобразования тех или иных формул нередко ведут к цели более простым и коротким путем, делая решение задачи более изящным и красивым. Главное в применении координатного метода – удачный выбор системы координат: выбор начала координат и направления осей. Обычно в качестве осей координат выбирают прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии (если таковые имеются) фигур, рассматриваемых в задаче. Желательно, чтобы система координат естественным образом определялась условием задачи.

К геометрическим методам относят методы, использующие дополнительные построения, которые позволяют существенно упростить решение задачи, а также свойства фигур. В качестве дополнительных построений могут быть следующие:

1) продолжение отрезка или отрезков на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой;

2) проведение прямой через заданные две точки;

3) проведение через заданную точку прямой, параллельной данной прямой;

4) проведение через заданную точку прямой, перпендикулярной данной прямой и т.д. [2].

К геометрическим методам также относится метод геометрических преобразований: симметрия центральная и осевая, параллельный перенос, поворот, гомотетия. Они используются, как правило, при решении достаточно сложных задач.

Поиск решения задач геометрическим методом удобнее вести с помощью анализа Паппа. Его начинают с вопроса (требования) задачи и определяют, какие величины надо знать, чтобы ответить на этот вопрос. Далее выясняют, являются ли эти величины известными. Если некоторые из них не даны в условии задачи, то ставится вопрос, как можно найти такие величины, что необходимо знать для этого, а также какие дополнительные построения следует выполнить. Подобные вопросы повторяют до тех пор, пока не обнаружится, что нахождение «промежуточных» неизвестных величин сводится к вычислениям с данными величинами.

Редко бывает, что при решении достаточно сложных задач используется только один метод решения. Очень часто приходится прибегать к помощи комбинированного метода, который включает в себя комбинацию различных методов.

При этом сочетание различных методов способствует обобщению и систематизации приобретаемых учащимися знаний, их углублению и включению в новые связи и отношения, приводящие в итоге к возникновению качественно новых знаний.

Как пример приведем следующую задачу: длины оснований трапеции ABCD – 10 и 24, а боковых сторон – 13 и 15. Найти высоту трапеции.

Решение.

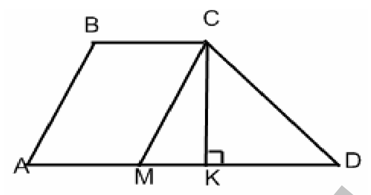

рисунок 3

1 способ (алгебраический). Так как задача не решается по действиям, то введем переменную *x*, которой обозначим AE, тогда KD = *14-x*. Из ΔABE по теореме Пифагора выразим высоту BE: $BE^2 = AB^2 - AE^2$ или $BE^2 = 13^2 - x^2$ (1). Из ΔDCK: $CK^2 = CD^2 - KD^2$ или $CK^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ (2). Так как высоты в трапеции равны, мы можем приравнять полученные данные: $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$. Решая уравнение, находим *x*=5. Подставляем найденное значение *x* в уравнение (1) или (2), получаем, что высота трапеции равна 12.

Ответ: 12.

2 способ (геометрический). Через вершину C трапеции ABCD (рис. 3) проведем отрезок CM||AB. Тогда, поскольку ABCM – параллелограмм, то AM = 10, CM = 13 и MD = AD – AM = 14. В треугольнике MCD известны три стороны CM = 13, CD = 15, MD =14, найдем площадь этого треугольника по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - MD)}$, где $p = \frac{MC + MD + CD}{2} = 21$, т.е. $S_{MCD} = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84$

Тогда высота

CK=$h = \frac{2S_{MDC}}{MD}$, $h = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12$

Ответ: 12.

Сочетание методов решения ключевых задач способствует повышению эффективности усвоения школьниками действий, адекватных этим методам, а также эффективности их обучения решению самих ключевых задач по геометрии, выполняемого всегда с использованием какого-либо конкретного метода решения (одного или более). Подобное утверждение справедливо для любой геометрической задачи: как планиметрической, так и стереометрической.

Анализ связи компонентов различных блоков, образуемых нами в ходе исследования, позволил сделать вывод о том, что решение практически любой ключевой задачи можно подвергнуть укрупнению, если подходить к нему с позиций его незаконченности, т.е. подразумевая существование его логического продолжения. Одновременно с укрупнением решения задачи подобные изменения можно наблюдать и в других ее компонентах (в ее условии, заключении, базисе решения). Между тем, очевидно, что процесс укрупнения непосредственно зависит от учебных целей и от объема и качества приобретаемых учащимися знаний, умений и навыков. Действительно, использование блоков укрупненных ключевых задач в учебном процессе параллельно с обучением школьников методам их решений должно позволять учащимся усваивать и другой материал геометрии: различные понятия, теоремы и т.д. Но в случае малого объема знаний, умений и навыков школьников значительно затрудняется достижение разнообразия в блочных задачах. Это негативно сказывается на интересе обучаемых к предмету.

Заключение. Организация усвоения учащимися отдельных методов решения геометрических задач требует включения в учебный процесс блоков укрупненных задач. Использование подобных блоков предполагает реализацию следующих этапов: работа учащихся с готовыми блоками, составление последних школьниками под руководством учителя и самостоятельно. На каждом из данных этапов возможно применение различных видов упражнений, позволяющих не только организовывать усвоение учащимися отдельных методов решений, входящих в блок задач, но и осуществлять интеграцию этих методов в соответствии со следующими основными способами: сочетание различных методов и их элементов при решении той или иной укрупненной задачи; решение одной и той же задачи в блоке разными методами. Кроме того, четкий подбор ключевых задач позволяет ликвидировать пресловутую «перегрузку» школьников, им приходится решать меньшее количество задач как в классе, так и дома. Овладение навыками решения ключевых задач гарантирует выполнение программных требований всеми учащимися, а те, кто заинтересован в более глубоких знаниях, свободно переходят к следующему качественному этапу обучения – решению нестандартных задач.

Следует отметить, что отбор материала к таким урокам требует больших затрат времени, но результат применения вышеописанных методов на практике стоит гораздо больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Устименко, В.В. Приемы укрупнения ключевых задач / В.В. Устименко, А.В. Виноградова // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2012. – № 3. – С. 58–62.
2. Азаров, А.И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8–11 классы: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования / А.И. Азаров, В.В. Казаков, Ю.Д. Чурбанов. – Минск: Аверсэв, 2005.

REFERENCES

1. Ustimenko V.V., Vinogradova A.V. Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta [Newsletter of Vitebsk State University], 2012, 3, pp. 58–62.
2. Azarov A.I., Kazakov V.V., Churbanov Y.D. Matematika dlia starsheklassnikov. Metodi resheniya planimetricheskih zadach. 8–11 klassi: posobiye dlia uchashchikhsia uchrezhdenii, obespechivayushchikh polucheniye obshchego sredego obrazovaniya [Mathematics for High Schoolchildren. Methods of Solving Planimetric Problems. 8–11 Years: Textbook for High Schools], Mn.: Avers, 2005

Поступила в редакцию 20.03.2014. Принята в печать 20.06.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: alla.vin@inbox.ru – Виноградова А.В.