процесс и делают обучение более интерактивным и увлекательным. Дальнейшее исследование и развитие этой методологии могут усилить её влияние на образовательные практики и способствовать более успешному обучению в различных областях.

1. Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы VI Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 19 апреля 2018 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – 450 с.
2. Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы II Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов, Витебск, 17–18 апреля 2014 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – 441 с.
3. Старт в науку: материалы II Международной научно-практической конференции студентов и учащихся, 17 мая 2018 / Оршанский колледж учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2018. – 179 с.
4. Старт в науку: материалы VI Международной научно-практической конференции студентов и учащихся, 19 мая 2022 г. / Оршанский колледж учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»; сост.: Е.А. Чикованова, Е.В. Дернова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – 448 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЯ КРАТНОСТИ 3 ПОЛИНОМА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Грицкевич Н.С., Китаров Д.А.,

студенты 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – ***Чернявский М.М.,*** *преподаватель кафедры инженерной физики*

Ключевые слова. Кратный корень, точные формулы, рациональное выражение, результант, частная производная, символьное решение.

Keywords. Multiple root, exact formulas, rational expression, resultant, partial derivative, symbolic solution.

Теория выражения кратных корней полинома в терминах частных производных от некоторых результантов является новым и быстро развивающимся направлением в области алгебраических полиномов. Конечными результатами здесь являются формулы, выражающие значение кратного корня (при условии, что он единственный) в виде рациональных функций от коэффициентов полинома.

Настоящий доклад посвящен современной теории построения семейств точных аналитических формул для кратных корней полиномов. Данные формулы представляют собой символьные рациональные выражения от коэффициентов полинома, а исследования в этом направлении продолжают идеи, рассмотренные в [1]. Цель работы – в терминах корней полинома комплексного аргумента получить условия, при которых рациональные выражения для корня кратности 3 не дадут результата.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента произвольной степени, имеющие корень кратности 3. Методы исследования – методы алгебры с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2023.

Результаты и их обсуждение. Доказана следующая

Теорема. *Если полином комплексного аргумента* $f = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 = 1, a_n \neq 0)$, *имеет корень* w *кратности* 3, *то матрицы, составленные из частных производных третьего порядка от результанта* $R = R(f, g)$, *где* $g = f''(z) = \sum_{j=0}^{n-2} b_j z^{n-2-j}$, $g_i = f''(z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *по правилу* $\mathrm{H}_{b_l} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial b_l}$ *(*H *– матрица Гессе из производных* $\dfrac{\partial^2 R}{\partial b_j \partial b_k}$, $(j, k, l = 0, 1, \ldots, n-2)$*), имеют вид:*

$$\mathrm{H}_{b_0}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b_0}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0^2}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0\partial b_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0\partial b_{n-3}}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0\partial b_{n-2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1\partial b_0}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1^2}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1\partial b_{n-3}}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1\partial b_{n-2}}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3}\partial b_0}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3}\partial b_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3}\partial b_{n-2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2}\partial b_0}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2}\partial b_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2}\partial b_{n-3}}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2}^2}\right) \end{pmatrix}=$$

$$=3!\cdot\prod_{m=4}^{n} g_m \begin{pmatrix} w^{3(n-2)} & w^{3(n-2)-1} & \dots & w^{3(n-2)-(n-2)+1} & w^{3(n-2)-(n-2)} \\ w^{3(n-2)-1} & w^{3(n-2)-2} & \dots & w^{3(n-2)-(n-2)} & w^{3(n-2)-(n-2)-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w^{3(n-2)-(n-2)+1} & w^{3(n-2)-(n-2)} & \dots & w^{3(n-2)-2(n-2)+2} & w^{3(n-2)-2(n-2)+1} \\ w^{3(n-2)-(n-2)} & w^{3(n-2)-(n-2)-1} & \dots & w^{3(n-2)-2(n-2)+1} & w^{3(n-2)-2(n-2)} \end{pmatrix}=$$

$$=3!\cdot\prod_{m=4}^{n} g_m \begin{pmatrix} w^{3(n-2)} & w^{3(n-2)-1} & \dots & w^{2(n-2)+1} & w^{2(n-2)} \\ w^{3(n-2)-1} & w^{3(n-2)-2} & \dots & w^{2(n-2)} & w^{2(n-2)-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w^{2(n-2)+1} & w^{2(n-2)} & \dots & w^{n} & w^{n-1} \\ w^{2(n-2)} & w^{2(n-2)-1} & \dots & w^{n-1} & w^{n-2} \end{pmatrix}; \tag{1}$$

$$\mathrm{H}_{b_s}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b_s}=\frac{1}{w^s}\cdot \mathrm{H}_{b_0}\quad \left(s=1,2,\dots,n-2\right). \tag{2}$$

Составляя отношение частных производных третьего порядка от результанта из выражений (1) и (2), можем получить значение корня w кратности 3. Заметим, что получаемые рациональные выражения для w не дадут результата, когда произведение $\prod_{m=4}^{n} g_m=\prod_{m=4}^{n} f''(z_m)=0$. Поэтому необходимо исследование данной конструкции при различных n. Например, покажем, что для полинома четвертой степени

$$f(z)=z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=(z-z_1)^3(z-z_4)\quad (a_4\neq 0)$$

$g_4=f''(z_4)\neq 0$. Действительно, $f''(z)=12z^2+6a_1z+2a_2$.

Подставим в последнее равенство соотношения Виета, записанные с учетом кратного корня $a_1=-3z_1-z_4,\quad a_2=3z_1^2+3z_1z_4$. После упрощения получим

$$f''(z)=6(2z-z_1-z_4)(z-z_1)\quad\Rightarrow\quad g_4=f''(z_4)=6(z_1-z_4)^2\neq 0,$$

то есть все значения частных производных из (1) и (2) одновременно не равны нулю при наличии корня кратности 3 и простого корня у полинома четвертой степени.

Далее рассмотрим полином пятой степени

$$f(z)=z^5+a_1z^4+a_2z^3+a_3z^2+a_4z+a_5\quad (a_5\neq 0),$$

имеющий корень кратности три, то есть представимый в виде

$$f(z)=(z-z_1)^3(z-z_4)(z-z_5)\quad (z_4\neq z_5) \tag{3}$$

или

$$f(z)=(z-z_1)^3(z-z_4)^2. \tag{4}$$

В этом случае $g_4g_5=f''(z_4)\cdot f''(z_5)$, где f'' берем от выражения (3):

$$f''(z)=2(z-z_1)\left(10z^2-8(z_1-6z_4-6z_5)z+z_1^2+3z_1z_4+3z_1z_5+3z_4z_5\right).$$

Вычислим $f''(z_4)$ и $f''(z_5)$:

$$f''(z_4)=g_4=2(z_1-z_4)^2(z_1-4z_4+3z_5);\quad f''(z_5)=g_5=2(z_1-z_5)^2(z_1+3z_4-4z_5).$$

Таким образом, для случая (3), когда $z_1=4z_4-3z_5$ или $z_1=-4z_4+3z_5$, все частные производные из (1) и (2) равны нулю, и получаемые на основе (1) и (2) рациональные формулы, не работают.

Если же корни z_4 и z_5 совпадают (случай (4)), то $g_4g_5=4(z_1-z_4)^6\neq 0$, что гарантирует вычисление корня кратности 3 при наличии второго корня кратности 2.

Далее рассмотрим полином шестой степени

$$f(z)=z^6+a_1z^5+a_2z^4+a_3z^3+a_4z^2+a_5z+a_6\quad (a_6\neq 0),$$

имеющий следующую мультипликативную структуру корней

$$f(z)=(z-z_1)^3(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)\quad (z_4\neq z_5, z_4\neq z_6, z_5\neq z_6)\tag{5}$$

или

$$f(z)=(z-z_1)^3(z-z_4)^2(z-z_6)\quad (z_4\neq z_6).\tag{6}$$

Рассмотрим произведение $g_4g_5g_6=f''(z_4)\cdot f''(z_5)\cdot f''(z_6)$:

$$f''(z)=2(z-z_1)\big(15z^3-(15z_1-10z_4-10z_5-10z_6)z^2+\big(3z_1^2+8z_1z_4+8z_1z_5+8z_1z_6+$$
$$+6z_4z_5+6z_4z_6+6z_5z_6\big)z-z_1^2z_4-z_1^2z_5-z_1^2z_6-3z_1z_4z_5-3z_1z_4z_6-3z_1z_5z_6-3z_4z_5z_6\big).$$

С помощью системы компьютерной алгебры вычислим $f''(z_4)$, $f''(z_5)$, $f''(z_6)$:

$$f''(z_4)=g_4=2(z_1-z_4)^2\left(z_1(-2z_4+z_5+z_6)+5z_4^2-4z_4z_5-4z_4z_6+3z_5z_6\right),$$
$$f''(z_5)=g_5=2(z_1-z_5)^2\left(z_1(z_4-2z_5+z_6)-4z_4z_5+3z_4z_6+5z_5^2-4z_5z_6\right),$$
$$f''(z_6)=g_6=2(z_1-z_6)^2\left(z_1(z_4+z_5-2z_6)+3z_4z_5-4z_4z_6-4z_5z_6+5z_6^2\right).$$

Правые части последних трех выражений обращаются в нуль при

$$z_1=\frac{5z_4^2-4z_4z_5-4z_4z_6+3z_5z_6}{2z_4-z_5-z_6},\ z_1=\frac{5z_5^2-4z_4z_5+3z_4z_6-4z_5z_6}{2z_5-z_4-z_6},\ z_1=\frac{5z_6^2+3z_4z_5-4z_4z_6-4z_5z_6}{2z_6-z_4-z_5}.$$

Если же мультипликативная структура корней полинома соответствует (6) (т. е. когда $z_4=z_5$), то $f''(z_4)=-2(-z_4+z_1)^3(z_4-z_6)\neq 0$, $f''(z_6)=2(-z_6+z_1)^2(z_4-z_6)\times$ $\times(3z_4+2z_1-5z_6)$. Последнее выражение обращается в нуль при $z_1=(5z_6-3z_4)/2$.

Исследование осуществлено в рамках договора БРФФИ № Ф23М-003 на выполнение НИР «Развитие теории конструирования экстремальных полиномов в комплексных областях и символьного решения алгебраических уравнений» (рег. № 20231184).

Заключение. В ходе проведенного исследования доказано, что рациональные формулы, получаемые из отношения частных производных третьего порядка от результанта многочлена, составленного с его второй производной, всегда дают значение корня кратности 3 у полинома четвертой степени. Для полиномов пятой и шестой степеней получены аналитические условия связи между корнем кратности три и оставшимися простыми корнями, при выполнении которых рациональные формулы не работают.

1. Чернявский, М.М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1(110). – С. 13–25. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26638 (дата обращения: 09.09.2023).