Матэматыка

УДК 517.91:517.977.1

Управляемость линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии управления и интеграла от управления

О.В. Храмцов
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящей работе свойство полной управляемости исследуется в предположении, что управляющее воздействие носит комбинированный характер: управляющее воздействие состоит из функции управления и интеграла от этой функции.

Цель исследования – получение условий полной управляемости в случае комбинированного управления.

Материал и методы. *Материалом исследования является аналитическое представление линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе используются методы Эйлера и Коши, матричного анализа теории матриц.*

Результаты и их обсуждение. *В статье изучено свойство полной управляемости, то есть возможность существования управляющего воздействия, которое переводит за конечный промежуток времени состояние системы из любого наперед заданного начального состояния в любое наперед заданное конечное состояние. В данной публикации программное управляющее воздействие носит комбинированный характер и состоит из функции управления и интеграла от этой функции. В работе изучен вопрос наличия свойства полной управляемости рассматриваемых дифференциальных систем. Все множество исследуемых дифференциальных систем разбито на четыре класса, в каждом из которых доказан ранговый критерий наличия свойства полной управляемости.*

Заключение. *Получены условия полной управляемости для стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые линейны по состоянию и по управляющему воздействию.*

Ключевые слова: *системы обыкновенных дифференциальных уравнений, автоматическое управление, полная управляемость.*

Controllability of the Linear Stationary Differential Equation Systems with Control and Integral of Control

O.V. Khramtsov
Educational establishment «Vitebsk State P.M. Masherov University»

Feature of total controllability is studied in the supposition that controlling influence is of combined character: controlling influence consists of the function of control and this function integral.

The purpose of the study is to obtain conditions of total controllability in the case of combined control.

Material and methods. *The material of the study is analytical presentation of linear stationary systems of usual differential equations. Methods by Eiler and Koshi, methods of matrix analysis of the matrix theory are used in the work.*

Findings and their discussion. *Feature of total controllability is studied in the article, or possibility of the existence of controlling influence which transfers during a finite period of time the state of the system from any primarily given initial state into any primarily given final state. In the paper program controlling influence is of combined character and consists of the function of control and this function integral. The issue of the presence of the feature of total controllability of the considered differential systems is studied in the paper. All the multitude of the differential systems under consideration is split into four classes in each of which range criterion of the presence of the feature of total controllability is proved.*

Conclusion. *Conditions of total controllability for stationary systems of usual differential equations which are linear in state and in controlling influence are obtained.*

Key words: *linear stationary differential equation systems, automated control, total controllability.*

В данной работе объектом исследования являются стационарные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые линейны по состоянию и управляющему воздействию. Рассматривается свойство полной управляемости таких систем, т.е. возможность построения управляющего воздействия, переводящего состояние системы за конечный промежуток времени из любого наперед заданного начального состояния в любое наперед заданное конечное состояние. Это свойство хорошо изучено в математической литературе в случае управления, состоящего из вектор-функции (см., например, [1–4]). Управляемость в различных классах функций управления рассмотрена в [5–6]. В настоящей работе свойство полной управляемости исследуется в предположении, что управляющее воздействие носит комбинированный характер: управляющее воздействие состоит из функции управления и интеграла от этой функции.

Цель данной статьи состоит в получении условий полной управляемости в случае комбинированного управления. Все множество исследуемых систем разбито на четыре класса, для каждого из которых доказан критерий наличия свойства полной управляемости. Эти критерии носят ранговый характер от некоторых матриц, составленных по известным матрицам исходной системы.

Материал и методы. Материалом исследования является аналитическое представление линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе используются методы: Эйлера – построения фундаментальной матрицы решений однородных линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Коши – построения общего решения неоднородных линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, проблемы моментов, методы матричного анализа теории матриц.

Результаты и их обсуждение. В данной работе все множество изучаемых дифференциальных систем разбито на четыре класса. В каждом классе получен критерий полной управляемости при наличии комбинированного управления. Все результаты являются новыми, ибо получены для не изучаемого ранее случая комбинированного управления, состоящего из функции управления и интеграла от этой функции.

I. Рассматривается процесс, описываемый линейной стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu + c\int_0^t u(s)ds \, , \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – выход, состояние системы; $u \in R^1$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая скалярная функция; A – постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, b, c – вещественные постоянные n-векторы.

Для заданной скалярной функции u система (1) имеет единственное решение [7, с. 227] с начальным условием

$$x(0) = x^0. \qquad (2)$$

Рассмотрим свойство полной управляемости системы (1) в смысле следующего определения [1, с. 177].

Определение 1. *Система (1) называется вполне управляемой, если для произвольных конечных состояний* $x^0, x^1 \in R^n$ *существуют конечный момент* t_1 *и непрерывно дифференцируемое управление* $u = u(t, x^0, x^1)$, $t \in [0, t_1]$, *такие, что для некоторого решения системы (1) наряду с условием (2) выполняется условие*

$$x(t_1) = x^1. \qquad (3)$$

Вначале рассматривается случай, когда векторы b и c не коллинеарны.

Имеет место

Теорема 1. *В случае, когда векторы* b *и* c *не коллинеарны, система (1) вполне управляема тогда и только тогда, когда хотя бы для одной матрицы*

$$Q_i \equiv [d, Ad, \ldots, A^{m-1}d, A^i b], \quad d = b + Ac, \quad i \in \{0, \ldots, m-1\}, \qquad (4)$$

выполняется условие

$$\exists i : rank Q_i = n, \quad i \in \{0, \ldots, m-1\}, \quad m \in \{n, n-1\}. \qquad (5)$$

Доказательство. Однородная система

$$\dot{y} = Ay \qquad (6)$$

имеет общее решение [1, с. 178]

$$y = \exp(At)y^0 = \sum_0^{m-1} \alpha_i(t) A^i y^0 \, , \qquad (7)$$

где m – степень минимального полинома матрицы A, $\alpha_i(t)$ – коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа–Сильвестра, построенного для функции $\exp At$. После подстановки (7) в (6) и элементарных преобразований получим

$$[E(\dot\alpha_0 + l_0\alpha_{m-1}) + A(\dot\alpha_1 - \alpha_0 + l_1\alpha_{m-1}) +$$
$$+ A^2(\dot\alpha_2 - \alpha_1 + l_2\alpha_{m-1}) +$$
$$\dots + A^{m-1}(\dot\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2} + l_2\alpha_{m-1})]y^0 \equiv 0. \quad (8)$$

Существует вектор y^0, что ранг матрицы коэффициентов в (8) удовлетворяет условию

$$rank[Ey^0, Ay^0, \dots, A^{m-1}y^0] = m.$$

Поэтому тождество (8) имеет место тогда и только тогда, когда вектор $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1})^T$ (символ $(\dots)^T$ означает транспонирование) удовлетворяет системе

$$\dot\alpha = L\alpha, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -l_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -l_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\dot\alpha(-t) = -L\alpha(-t). \quad (9)$$

Здесь l_i – коэффициенты в минимальном полиноме. Тогда согласно теореме Кэли–Гамильтона [8, с. 179] справедливо разложение

$$A^m = -l_0E - l_1A - \dots - l_{m-1}A^{m-1}. \quad (10)$$

2. Общее решение для системы (1) записывается в виде [6, с. 76]

$$x(t) = \exp(At)\times$$
$$\times[x^0 + \int_0^t \exp(-At)(bu(t) + cw(t))dt)], \quad (11)$$

$$w = \int_0^t u(s)ds.$$

Если воспользоваться формулой (7), то в момент $t = t_1$ из равенства (11) получим равенство

$$r = Q_1\int_0^{t_1}\alpha(-t)u(t)dt + Q_2\int_0^{t_1}\alpha(-t)\int_0^s u(s)dsdt, \quad (12)$$
$$Q_1 = [b, Ab, \dots, A^{m-1}b],$$
$$Q_2 = [c, Ac, \dots, A^{m-1}c],$$
$$r = \exp(-At_1)x^1 - x^0.$$

Вычислим следующие интегралы по частям с учетом (9)

$$\int_0^{t_1}\alpha(-t)u(t)dt =$$
$$= \alpha(-t)\int_0^{t_1}u(t)dt - \int_0^{t_1}\dot\alpha_{m-1}(t)\int_0^s u(s)dsdt =$$
$$= \alpha(-t)\int_0^{t_1}u(t)dt + L\int_0^{t_1}\alpha(-t)\int_0^s u(s)dsdt. \quad (13)$$

После подстановки (13) в (12) получим систему

$$r = (Q_2 + Q_1E_{-1} +$$
$$+ [0,0,\dots,0,Q_1l])\int_0^{t_1}\alpha(t)w(t)dt + Q_1\alpha(t_1)w(t)\Big|_0^{t_1},$$

$$w(t) = \int_0^t u(s)ds, \; l = (-l_0, -l_1, \dots, -l_{m-1}), \quad (14)$$

элементы поддиагональной единичной матрицы E_{-1} имеют вид: $_{1,} = 1$

$e_{ps} =$.

После вычислений с учетом (10) из системы (14) получается система

$$r = Qp, \quad p = (p_0, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m)^T, \quad (15)$$
$$Q \equiv [d, Ad, ..., A^{m-1}d, \sum_0^{m-1}\alpha_i(-t_1)A^ib]p,$$
$$d = b + Ac,$$

относительно вектора p и расширенная проблема моментов

$$\begin{cases} p_m = w(t)\Big|_0^{t_1}, \\ p_0 = \int\limits_0^{t_1} \alpha_0(-t)w(t)dt, \\ p_1 = \int\limits_0^{t_1} \alpha_1(-t)w(t)dt, \\ \ldots \\ p_{m-1} = \int\limits_0^{t_1} \alpha_{m-1}(-t)w(t)dt. \end{cases} \qquad (16)$$

Для разрешимости системы (15) необходимо и достаточно, чтобы $rankQ = n$. Но выполнение этого условия возможно в силу линейной независимости функций $\alpha_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, тогда и только тогда, когда для матриц (4) выполняется условие (5) теоремы 1. Необходимость теоремы 1 доказана. Докажем теперь его достаточность.

3. Решение расширенной проблемы моментов (16) будем искать в классе многочленов [5]

$$u = C_1 + 2C_2t + 3C_3t^2 + \ldots + (m+1)C_{m+1}t^m,$$

$$C_i \in R^1. \qquad (17)$$

Тогда $\quad w = C_1t + C_2t^2 + C_3t^3 + \ldots + C_{m+1}t^{m+1}$.

Из первой строки (16) найдем

$$C_1t_1 = p_m - C_2t_1^2 - C_3t_1^3 - \ldots - C_{m+1}t_1^{m+1}. \qquad (18)$$

После подстановки (18) в интегралы из (16) получится проблема моментов

$$f_i = \int\limits_0^{t_1} \alpha_i(t)(C_2h_1(t) + \ldots + C_{m+1}h_m(t))dt, \quad (19)$$

$$f_i = p_i - p_m\int\limits_0^{t_1} \alpha_i(t)dt, \; h_j = t^{j+1} - t_1^{j+1},$$

$$i = 0,1,\ldots,m-1.$$

Ввиду линейной независимости в каждой из последовательностей функций $\alpha_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, $h_i(t)$, $i = 1,\ldots,m$, определитель матрицы $\left[\int\limits_0^{t_1} \alpha_i(t)h_j(t)dt\right]_{0,1}^{m-1,m}$ коэффициентов при неизвестных $C_2,\ldots,C_{m+1}$ отличен от нуля [6, с. 5]. Поэтому система (19) имеет единственное ненулевое решение $C_2,\ldots,C_{m+1}$, а из (18) найдется C_1. Искомое (17) управление $u(t)$, $t \in [0,t_1]$, решающее задачу (16), построено и, значит, достаточность условия (5) теоремы доказана. Теорема 1 доказана.

II. Теперь рассматривается случай, когда векторы b и c коллинеарны, т.е. существует число *k, что* $c = kb$.

Имеет место

Теорема 2. *В случае, когда векторы* b *и* c *коллинеарны, система (1) вполне управляема тогда и только тогда, когда для матрицы*

$$Q \equiv [b, Ab, \ldots, A^{n-1}b]$$

выполняется условие

$$rankQ = n. \qquad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае коллинеарности векторов b и c имеем: $c = kb$, $k \in R^1$, и система (1) принимает вид

$$\dot{x} = Ax + b(u + k\int\limits_0^t u(s)ds). \qquad (21)$$

Сформируем новое управление

$$v = u + k\int\limits_0^t u(s)ds. \qquad (22)$$

Тогда система (21) примет простой вид

$$\dot{x} = Ax + bv,$$

для которой критерий управляемости известен [1, с. 183] и заключается в выполнении условия (20). Отсюда следует, что искомое управление v существует, в том числе и непрерывно дифференцируемое [5]. Из уравнения (22) всегда можно восстановить управление u, так как это уравнение эквивалентно задаче Коши

$$\dot{u} + ku = \dot{v}(t), \quad u(0) = v(0). \qquad (23)$$

Задача Коши (23) всегда имеет решение в области определения гладкой функции $v(t)$, $t \in [0,t_1]$. Теорема 2 доказана.

III. Рассмотрим теперь случай векторного управления. Пусть процесс описывается линейной стационарной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu + C\int_0^t u(s)ds\,, \qquad (24)$$

где $x \in R^n$ – выход, состояние системы; $u \in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция; A – постоянная вещественная $(n \times n)$ - матрица; B, C – вещественные постоянные $(n \times r)$ - матрицы.

Множество всех систем Ω (23) разобьем в зависимости от свойств матрицы управления $[B, C]$ на два класса Ω_1 и Ω_2, для каждого из которых рассматривается затем задача управления. Пусть

$$rank[B, C] = \rho\,, \quad \rho \in \{1, \ldots, 2m\}\,, \ 2m \le n\,.$$

К классу Ω_1 относятся те системы (23), для которых выполняются одновременно два свойства

$$\rho = r_0 \le r\,, \qquad (25.1)$$

$$\exists \alpha \in R^1 : rank[B + \alpha C] = r_0\,, \qquad (25.2)$$

где r – размерность вектора управления u.

К классу Ω_2 относятся те системы (23), для которых не выполняется хотя бы одно из свойств (25): $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$.

Для систем класса Ω_2 имеет место

Теорема 3. *Система (24) класса Ω_2 вполне управляема тогда и только тогда, когда хотя бы для одной матрицы*

$$Q_I \equiv [D, AD, ..., A^{m-1}D, A^{i_1}b_1, \ldots, A^{i_r}b_r]\,,$$
$$D = B + AC\,,$$

$$i_j \in \{0, \ldots, m-1\}\,, \quad I = \{i_1, \ldots, i_r\}\,,$$

выполняется условие

$$\exists I : rank Q_I = n\,, \ I = \{i_1, \ldots, i_r\}\,,$$
$$i_j \in \{0, \ldots, m-1\}\,. \qquad (26)$$

(Здесь b_i – i-й столбец матрицы B).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы использует некоторые результаты из доказательства теоремы 1.

1. Общее решение для системы (23) записывается в виде [8, с. 76] аналогично (11)

$$x(t) = \exp(At) \times$$

$$\times [x^0 + \int_0^t \exp(-At)(Bu(t) + Cw(t))dt)]\,, \qquad (27)$$

$$w = \int_0^t u(s)ds\,, \quad w \in R^r\,. \qquad (28)$$

Если воспользоваться формулой (7), то в момент $t = t_1$ из (27) получим систему

$$g = Q_1\int_0^{t_1} \alpha(-t)u(t)dt + Q_2\int_0^{t_1} \alpha(-t)\int_0^s u(s)ds\,, \qquad (29)$$

$$Q_1 = [B, AB, \ldots, A^{m-1}B]\,,$$
$$Q_2 = [C, AC, \ldots, A^{m-1}C]\,,$$
$$g = \exp(-At_1)x^1 - x^0\,.$$

Вычислим следующие интегралы по частям с учетом (9)

$$\int_0^{t_1} \alpha(-t)u(t)dt = \alpha(-t)\int_0^{t_1} u(t)dt - \int_0^{t_1} \dot{\alpha}_{m-1}(t)\int_0^s u(s)dsdt =$$

$$= \alpha(-t)\int_0^{t_1} u(t)dt + L\int_0^{t_1} \alpha(-t)\int_0^s u(s)dsdt\,. \qquad (30)$$

После подстановки (30) в (29) получим систему

$$g = (Q_2 + Q_1E_{-1} + [0, 0, \ldots, 0, Q_1 l])\int_0^{t_1} \alpha(t)w(t)dt +$$

$$+ Q_1\alpha(t_1)w(t)\Big|_0^{t_1}\,. \qquad (31)$$

$$w(t) = \int_0^t u(s)ds\,, \ l = (-l_0, -l_1, \ldots, -l_{m-1})\,,$$

элементы поддиагональной единичной матрицы E_{-1} имеют вид: $e_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$. Остальные элементы $e_{ps} = 0$.

После вычислений с учетом (10) из системы (31) получается алгебраическая линейная неоднородная система относительно неизвестного вектора p

$$g = Qp\,, \qquad (32)$$

где $p = (p_0^{\ T}, p_1^{\ T}, \ldots, p_{m-1}^{\ T}, p_m^{\ T})^T$, $p_i \in R^m$,

$$Q \equiv [D, AD, ..., A^{m-1}D, \sum_{0}^{m-1} \alpha_i(-t_1)A^i B]p\,,$$
$$D = B \quad AC\,,$$

и расширенная проблема моментов

$$\begin{cases} p_m = w(t)\Big|_0^{t_1}, \\ p_0 = \int_0^{t_1} \alpha_0(-t)w(t)dt, \\ p_1 = \int_0^{t_1} \alpha_1(-t)w(t)dt, \\ \ldots \\ p_{m-1} = \int_0^{t_1} \alpha_{m-1}(-t)w(t)dt. \end{cases} \qquad (33)$$

Для разрешимости системы (32) необходимо и достаточно, чтобы $rankQ = n$. Но выполнение этого условия возможно в силу линейной независимости функций $\alpha_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, тогда и только тогда, когда для матриц Q_I выполняется условие (26) теоремы 3. Необходимость условия (26) теоремы 3 доказана. Докажем теперь его достаточность.

2. Решение проблемы моментов (33) будем искать в классе векторных многочленов [5]

$$u = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \ldots + (m+1)C_{m+1}t^m,$$
$$C_i \in R^r. \qquad (34)$$

Тогда $w = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots + C_{m+1}t^{m+1}$.

Из первой вектор-строки (34) найдем

$$C_1 t_1 = p_m - C_2 t_1^2 - C_3 t_1^3 - \ldots - C_{m+1}t_1^{m+1} \,.(35)$$

После подстановки (35) в интегралы из (33) получится векторная проблема моментов

$$f_i = \int_0^{t_1} \alpha_i(t)(C_2 h_1(t) + \ldots + C_{m+1}h_m(t))dt\,, \quad (36)$$

$$f_i = p_i - p_m \int_0^{t_1} \alpha_i(t)dt\,, \; h_j = t^{j+1} - t_1^{j+1}\,,$$
$$i = 0,1,\ldots,m-1\,.$$

Пересортируем равенства (36) по координатам

$$f_{si} = \int_0^{t_1} \alpha_j(t)(C_{2i}h_1(t) + \ldots + C_{m+1,i}h_m(t))dt\,, \quad (37)$$
$$j = 0,1,\ldots,m-1\,, \; i = 1,\ldots,r\,,$$
$$s = 0,1,\ldots,m-1\,.$$

Здесь f_{si} – i-я координата вектора f_s, C_{pi} – i-я координата вектора C_p. Для каждого фиксированного i получаем алгебраическую линейную неоднородную систему относительно постоянного вектора $(C_{2i},\ldots,C_{m+1,i})$. Ввиду линейной независимости в каждой из последовательностей функций $\{\alpha_i(t)\}$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, и $\{h_i(t)\}$, $i = 1,\ldots,m$, определитель матрицы $[\int_0^{t_1} \alpha_i(t)h_j(t)dt]_{0,1}^{m-1,m}$ коэффициентов в (37) при неизвестных $C_{2i},\ldots,C_{m+1,i}$ отличен от нуля [6, с. 5]. Поэтому система (36) имеет единственное ненулевое решение $C_{2i},\ldots,C_{m+1,i}$, а из (35) найдется $C_{1,i}$. Искомое (34) управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, решающее задачу управления, построено и, значит, достаточность условия (26) доказана. Теорема 3 доказана.

IV. Рассмотрим теперь системы (24) класса Ω_1. При выполнении условий (25) существует матрица P, составленная из ровно r_0 линейно независимых вектор-столбцов матриц B, C такая, что $rankP = r_0$. Тогда существуют однозначно определяемые вещественные $(r_0 \times r)$– матрицы M, N такие, что имеют место представления

$$B = PM\,, \quad C = PN\,, \qquad (38)$$

и при этом в силу свойства (25.2) номера столбцов в матрице P не совпадают: $i_\mu \neq j_\nu \quad \forall \mu \in \{1,\ldots,p\}, \forall \nu \in \{1,\ldots,q\}$, и $rank[M, N] = r_0$. Отберем в матрицу P максимальное число p линейно независимых столбцов из матрицы B и добавим в нее остальные линейно независимые с ними столбцы из матрицы C

$$P = [b^{i_1},\ldots,b^{i_p},c^{j_1},\ldots,c^{j_q}]\,, \quad p + q = r_0\,. \quad (39)$$

(Индекс вверху означает номер столбца). Система (24) класса Ω_1 в силу (38) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + P(Mu + N\int_0^t u(s)ds)\ , \qquad (40)$$

Имеет место

Теорема 4. *Система (40) класса* Ω_1 *вполне управляема тогда и только тогда, когда для матрицы*

$$Q \equiv [P, AP, ..., A^{n-1}P]$$

выполняется условие

$$rankQ = n\ . \qquad (41)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае класса Ω_1 система (24) имеет вид (40). Сформируем новое управление

$$v = Mu + N\int_0^t u(s)ds\ . \qquad (42)$$

Тогда система (21) примет простой вид

$$\dot{x} = Ax + Pv\ ,$$

для которой критерий управляемости известен [1, с. 182] и заключается в выполнении условия (41). При этом управление существует в том числе и в классе гладких функций [5]. Отсюда следует, что искомое промежуточное управление v существует, в том числе и непрерывно дифференцируемое. Покажем, что из системы (42) всегда можно восстановить управление u. В силу свойства (25.2) номера столбцов в матрице P не совпадают: $i_\mu \neq j_\nu$ $\forall \mu \in \{1, \ldots, p\}, \forall \nu \in \{1, \ldots, q\}$. Введем в рассмотрение $(r \times r)$-матрицу перестановок T, у которой в каждой строке и каждом столбце стоит только одна единица. Тогда единица на месте (μ, i_μ) столбец с номером i_μ делает столбец с номером μ, а единица на месте (ν, j_ν) столбец с номером j_ν делает столбец с номером $p + \nu$. Введем новое управление

$$w = Tu\ , \quad \det T \neq 0\ , \qquad (43)$$

и представим его в виде

$$w = (w_1, w_2, w_3)\ , \quad w_1 \in R^p\ ,\ w_2 \in R^q\ ,$$
$$w_3 \in R^s\ ,$$

$$p + q = r_0\ , \quad p + q + s = r\ .$$

Тогда система (42) принимает вид

$$w_1 + M_1 w_2 + M_2 w_3 + N_1 \int_0^t w_1(s)ds +$$
$$+ 0\int_0^t w_2(s)ds + N_3 \int_0^t w_3(s)ds = v_1(t)\ , \qquad (44)$$

$$N_4 \int_0^t w_1(s)ds + \int_0^t w_2(s)ds + N_5 \int_0^t w_3(s)ds = v_2(t)\ , \qquad (45)$$

где M_i, N_j – вещественные матрицы соответствующих размерностей. Без ограничения возможности управления положим

$$w_3(t) \equiv 0\ , \qquad (46)$$

а в качестве управления $v = (v_1^T, v_2^T)^T$, решающего задачу управления, используем функции с условием $v(0) = 0$, например, векторные полиномы [5] $v = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots + C_r t^m$, $C_i \in R^{r_0}$. В этом случае от системы (45) возьмем производную и получим с учетом равенства (46) равенство

$$w_2 = \dot{v}_2(t) - N_4 w_1\ . \qquad (47)$$

Подставим (47) в (44), учтем (46) и получим задачу Коши

$$\dot{w}_1 + (N_1 - M_1 N_4) w_1 = v_1(t) - N_1 \dot{v}_2(t)\ ,$$
$$w(0) = 0\ . \qquad (48)$$

Задача Коши (48) всегда имеет решение в области определения гладкой функции $v(t)$, $t \in [0, t_1]$. Из подстановки (43) найдем искомое управление u. Теорема 4 доказана.

Заключение. Управляемость изучена при наличии нового комбинированного управляющего воздействия в виде функции управления и интеграла от этой функции управления. Все множество исследуемых дифференциальных систем разбито на четыре класса, в каждом из которых доказан критерий наличия свойства полной управляемости. Для каждого класса критерий носит ранговый характер от некоторой матрицы, построенной по известным матрицам исследуемых систем. В данной работе получены условия полной управляемости для стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые линейны по состоянию и по управляющему воздействию. Результаты работы являются новыми и носят фундаментальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. – М.: Наука, 1971. – 395 с.
2. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М.: Наука, 1971. – 626 с.
3. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
4. Ли, Э. Основы теории оптимального управления / Э. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972. – 534 с.
5. Шкляр, Б.Ш. Об управляемости в классах простейших функций / Б.Ш. Шкляр // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 1972. – № 1. – С. 91–93.
6. Астровский, А.И. Наблюдаемость нестационарных линейных систем / А.И. Астровский. – Минск: Издательство ИМ АНБ. Препринт, 1978. – № 8(40). – 24 с.
7. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – М.: Наука, 1971. – 426 с.
8. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

REFERENCES

1. Roitenberg Y.N. Avtomaticheskoye upravlenkiye [Automated Control], Moscow: Nauka, 1971, 395 p.
2. Kalman R., Falb P., Arbib M. Ocherki po matematicheskoi teorii system [Stories on Mathematical Theory of Systems], Moscow: Nauka, 1971, 626 p.
3. Gabasov R., Kirillova F.M. Kachestvennaya teoriya optimalnikh protsessov [Qualitative Theory of Optimal Processes], Moscow: Nauka, 1971, 508 p.
4. Lee E., Marcus L. OIsnovi teorii optimalnogo upravleniya [Bases of the Theory of pptimal Control], Moscow: Nauka, 1972, 534 c.
5. Shkliar B.S. Vestnik BGU [Newsletter of BSU], 1,1972, 1,pp. 91–93.
6. Astrovski A.I. Nabludayemost nestatsionarnikh lineinikh sistem [Observance of Non Stationary Linear Systems], Minsk: Publishing House of IM ASB, 8 (40), 1978, 24 p.
7. Matveyev N.M. Metodi integrirovaniya obiknovennikh differentsialnikh uravnenii [Methods Integrating Usual Differential Equations], Moscow: Nauka, 1971, 426 p.
8. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on Mathematical Theory of Stability], Moscow: Nauka, 1967, 472 p.

Поступила в редакцию 19.03.2014. Принята в печать 20.06.2014
Адрес для корреспонденции: e-mail: kgima@vsu.by – Храмцов О.В.