ПОСТРОЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СИСТЕМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ КАК ВАЖНЕЙШИЙ РЕСУРС РАЗВИТИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ (НА ПРИМЕРЕ ЛИНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ)

Герасимов Валерий Дмитриевич,
учитель математики, ГУО «Средняя школа № 20 г. Орши»

ЧЕРЕЗ ОПТИМИЗАЦИЮ К КАЧЕСТВУ

Рассматривается реализация принципа системной дифференциации при построении содержания школьного математического образования как альтернатива «поэлементной организации знаний» (на примере подбора и структурирования учебного материала при изучении дробей и задач с дробными отношениями). Выделены базовые задачные модели.

Содержание школьного математического образования выступает в качестве ведущего компонента процесса обучения математике как дидактической системы. При этом фактор содержания оказывает тот или иной эффект на осуществление цели обучения не только в зависимости от того, какие понятия входят в это содержание, но и от того, в каком порядке расположены элементы содержания, как они связаны между собой. Поэтому одним из направлений инновационной деятельности может быть оптимизация структуры содержательных линий школьной математики в рамках действующих образовательных стандартов на основе принципа системной дифференциации.

Актуальность инновационной модели обусловлена противоречиями:

– между необходимостью осуществления качественного образования и недостаточной разработанностью оптимальных методов, средств и форм обучения, учитывающих психодидактические требования, в частности, принцип системной дифференциации в познании;

– между объемом учебного материала и количеством времени, отводимого на его изучение;

– между массовым характером образования и индивидуальными особенностями восприятия и усвоения учебного материала учащимися, разным уровнем их математической подготовки.

Методологической основой разработанного инварианта содержания линии текстовых задач является, во-первых, **принцип системной дифференциации**, который сформулирован в исследованиях российского психолога Н.И. Чуприковой и который она относит к универсальным принципам (или законам) развития всех сложных систем природы и общества, включая систему познавательных процессов человека и его знаний. Во-вторых, **структурный подход к пониманию природы математических способностей**, который в свое время был намечен К. Дункером и развит в исследованиях В.А. Крутецкого.

В применении к проблеме конструирования учебного материала линии текстовых задач закон системной дифференциации предполагает, что обучение должно начинаться с небольшого числа базовых задачных структур, однако таких, которые содержат в себе целое, которое потом вырастает и развивается. При этом расположение изучаемого материала должно быть таково, чтобы все последующее вытекало из предыдущего, было его развитием, а не представляло совсем нового знания.

В системе компонентов математических способностей можно выделить следующие составляющие:

1. Способности к математике связаны со способностью к обобщению математического материала и соответственно запоминанию обобщений.

2. Скорость «свертывания» рассуждений различна у более способных и менее способных к математике школьников.

3. Способных к математике учащихся характеризует гибкость умственных процессов и высокая способность к переключению с прямого на обратный ход мысли.

4. Способные к математике дети отличаются четким «схватыванием» основных отношений, составляющих существо задач.

Как видим, базисная математическая способность – это способность мыслить логико-математическими структурами, схемами логико-математических отношений.

В рамках инновационной модели обучения математике в образовательный процесс вносятся следующие изменения.

1. В каждой группе текстовых задач подбор и структурирование учебного материала осуществляется вокруг «укрупненных дидактических единиц» (базовых задачных структур) в соответствии с **принципом системной дифференциации**. Все последующие варианты задач выступают как их конкретизация, развертывание. При этом общее направление познания каждой базовой структуры осуществляется от целого к части. В частности, это предусматривает построение учебной программы «по принципу спирали», когда исходное содержание знаний формируется в рамках некоторой целостности, затем вновь воспроизводится в единой структуре, как бы возвращается «назад», но уже на более высоком уровне.

Данный подход позволяет интегрировать достижения ассоциативного и когнитивно-конструктивистского подходов к организации, структурированию и адаптации математического материала. С точки зрения ассоциативного подхода усвоение базовых математических структур является необходимым условием понимания математического содержания. С точки зрения когнитивно-конструктивистского подхода понимание основывается на переструктурировании усвоенных когнитивных структур и активном конструировании новых знаний.

2. При построении системы текстовых задач акцентируется внимание на их особой роли как **базовых структур**, интегрирующих учебный материал основных содержательных линий школьной математики. При этом методика обучения их решению направлена на формирование представлений об общих подходах к решению любых задач.

В основу типологии текстовых задач положен **вид отношений (связей) между значениями величины (величин)**. Так, в условии текстовой задачи принято рассматривать одну или несколько ситуаций (моментов, эпизодов) с описываемым объектом (объектами). Количественная сторона рассматриваемой в задаче «ситуации с объектом» может характеризоваться:

а) одной величиной;

б) тремя взаимосвязанными величинами (задачи на процессы);

в) геометрическими величинами (задачи с геометрическим содержанием).

В задачах с одной величиной значения этой величины связаны:

- отношением целого и его частей (связь «было–изменение–стало» или связь «всего»);
- отношением равенства (связь «равно» / «столько же»);
- отношением разностного сравнения (связь «больше (меньше) на»);
- отношением кратного сравнения (связь «больше (меньше) в»);
- отношением части от целого (дробным отношением);
- отношением пропорциональности;
- свойствами различных числовых зависимостей и другими.

В задачах на процессы значения трех взаимосвязанных величин связаны особенностями рассматриваемого процесса (деление на равные части, деление поровну, покупка товара, выполнение работы, движение и другие).

В задачах с геометрическим содержанием значения величин связаны свойствами геометрической фигуры.

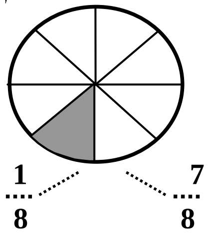
3. При моделировании методов и средств обучения математике учитывается необходимость одновременного усвоения информации на трех уровнях: конкретных действий, образном и символическом. При этом реализован **механизм формирования понятий от среднего уровня обобщенности**, суть которого состоит в том, что в процессе обучения формируется понятие – прототип, идеальная когнитивная структура, доступная для понимания и усвоения учащимися всего класса. Такой подход способствует эффек-

тивности преподавания математики, устраняется противоречие между тем, что ребенок должен и может усвоить.

Рассмотрим пример подбора и структурирования учебного материала при изучении дробей и задач с дробными отношениями в 3–6 классах.

<u>Задание 1.</u> Рассмотрите рисунок. Расскажите, на сколько равных долей разделено целое? Сколько долей закрашено? Сколько не закрашено?

Обратите внимание на числа, записанные рядом с рисунком. Если целый предмет разделен на равные доли, то для их подсчета используют особые числа – ***ДРОБИ****.*



С дробными числами, как и с натуральными числами, можно составлять числовые равенства. Подумайте, о чем «говорят» равенства, составленные к рисунку? Что обозначает «единица»?

$$\frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{8}{8} = 1$$
$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$
$$1 - \frac{7}{8} = \frac{8}{8} - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

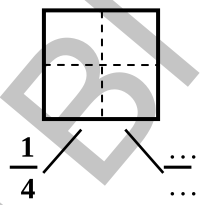
Догадались? «Единица» в каждом из равенств обозначает один целый предмет (например, «пирог»). Складывая части (доли), мы как бы восстанавливаем целый предмет. Вычитая из единицы дробное число, мы находим другую часть целого предмета.

Как видим, введение дроби $\frac{1}{8}$ (и соответственно $\frac{7}{8}$) рассматривается в рамках целостной структуры («пирога»), где «1» символизирует «целое». Самостоятельно или под руководством учителя учащиеся рисуют, закрашивают «части пирога» в пределах данной целостности. Тем самым возникает не только осмысление значения понятий «одна восьмая» и «семь восьмых» на доступном для ребенка уровне, но и осуществляется выход на операции сложения и вычитания.

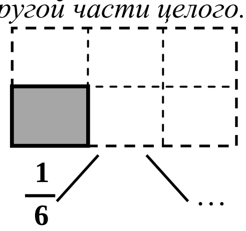
Обратим внимание, как в последующих заданиях, связанных с введением дробей, базовая числовая структура вновь воспроизводится в рамках целостности со всем многообразием связей.

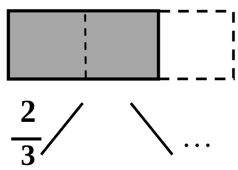
<u>Задание 2.</u> Закрасьте часть целого, которая соответствует дроби. Запишите дробь, которая соответствует другой части целого.

Догадались, как надо рассуждать? Обращаем внимание на число под чертой дроби! Оно «говорит» о том, на сколько равных долей надо разделить фигуру («нечто целое»). Число над чертой дроби показывает, сколько таких долей надо закрасить.



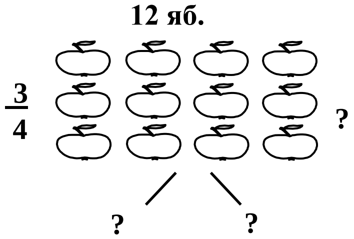
<u>Задание 3.</u> Восстановите целое по части, зная, сколько и каких долей эта часть составляет от целого. Запишите дробь, которая соответствует другой части целого.

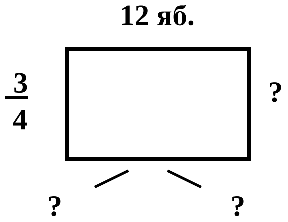




Следующий шаг: в качестве целого начинают рассматриваться различные величины (длина, масса, ...), наборы одинаковых предметов. Но базовая структура не утрачивается, на ее основе идет подготовительная работа к введению соответствующей задачной структуры.

<u>Задание 4.</u> Рассмотрите рисунок, его схематическую запись и найдите все неизвестные числа.





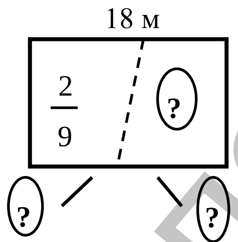
Наконец, переходим к решению задач с дробными отношениями. Надо научить школьника находить в условии задачи и правильно понимать связи следующего вида **«А = $\frac{m}{n}$ от В»**.

Например, «? = $\frac{3}{4}$ от 12». «?» – это часть целого, которая неизвестна; «12» – целое, которое известно. Значит, ? = 12 : 4 · 3 = 9.

Или такая связь: «9 = $\frac{3}{4}$ от ?». «9» – это часть целого, которая известна; «?» – целое, которое неизвестно. Значит, ? = 9 : 3 · 4 = 12.

В 3–4 классах учащиеся моделируют условие задачи с дробным отношением с помощью прямоугольника. При этом на начальном этапе к условию задачи ставятся все возможные вопросы. Такой подход важен для формирования целостного представления о данном типе задач.

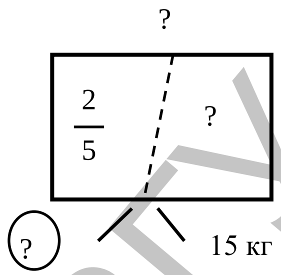
<u>Задание 5.</u> *В вазе 18 мандаринов. $\frac{2}{9}$ всех мандаринов съели. Какая часть мандаринов осталась? Сколько мандаринов съели? Сколько мандаринов осталось?*



Примерный ход рассуждений ученика таков. В условии задачи есть дробь, значит, некоторые числа в условии «связаны» этой дробью! При этом важно понять, от какого числа «берется» дробь. В нашей задаче связь между числами «спрятана» в предложении «*$\frac{2}{9}$ всех мандаринов съели*». Эту связь можно записать так: «$\frac{2}{9}$ от 18 = ?» или «? = $\frac{2}{9}$ от 18».

Предлагаемая ниже задача относится к числу наиболее трудных задач с дробными отношениями. И только заложенные ранее базовые структуры, сформированное системное мышление позволяют большинству учащихся начальной школы без особого труда разобраться в ней.

<u>Задание 6.</u> *Из ящика израсходовали $\frac{2}{5}$ всех гвоздей. Сколько килограммов гвоздей израсходовали, если в ящике осталось 15 кг?*



В 5–6 классах мы поднимаемся на более высокую ступень формализации, плавно переходя от рисунков, схематических записей к более абстрактным моделям.

<u>Задание 7.</u> *Из ящика израсходовали $\frac{2}{5}$ всех гвоздей. Сколько килограммов гвоздей израсходовали, если в ящике осталось 15 кг?*

I (изр)	?	$\frac{2}{5}$ от 15
II (ост)	15 кг	? от 15
I+II =	?	1

<u>Задание 8.</u> *Из ящика израсходовали 40% всех гвоздей. Сколько килограммов гвоздей израсходовали, если в ящике осталось 15 кг?*

I (изр)	?	40% от 15
II (ост)	15 кг	? от 15
I+II =	?	1

<u>Задание 9.</u> *Мясо при варке теряет 35% своей массы. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы получить 650 г вареного?*

I (вар.)	650 г	?% ·(I + II)
II (потери)	?	35% ·(I + II)
I + II =	?	100%

Разработанный инвариант подбора и структурирования учебного материала линии текстовых задач является противоположностью «поэлементной организации знаний». В традиционном подходе каждая задача, особенно для слабоуспевающего ученика, выступает как новая. В нашем подходе базовая структура никогда не утрачивается. Исходное содержание знаний на новом «витке» учебной программы вновь воспроизводится в целостной структуре со всем многообразием связей, но уже на более высоком уровне.

Конечно, решение делать или не делать подробную краткую запись задачи принимает сам ученик. Главное – найти и понять в условии задачи связь (отношение) вида **«A = $\frac{m}{n}$ от B»** или **«A = p % от B»**. Предлагаемый вариант моделирования условий задач с дробными отношениями активизирует школьников на уроке, организует их внимание к объяснениям учителя и ответам товарищей. Учащиеся быстрее думают, свободнее рассуждают.

Как показали длительные исследования и экспериментальная апробация, инновационная модель обучения математике обеспечивает **достижение оптимального соответствия объема учебного материала и учебного времени,** необходимого для восприятия, понимания и усвоения базовых математических структур учащимися с разными уровнями математической подготовки. В частности, уже первый год реализации инновационного проекта «Структурно-динамическая модель обучения математике на основе принципа системной дифференциации» показал, что для качественного выполнения требований государственной программы по математике **требуется учебного времени на 10–15% меньше**, чем предусмотрено действующей программой.

Дополнительный резерв времени, использование в учебном процессе дидактических материалов, подготовленных с учетом особенностей внедряемой модели обучения (как дополнительных к действующим учебным пособиям), обеспечивают:

а) оптимизацию форм и методов организации учебного процесса с учетом разных уровней математической подготовки учащихся; усвоение учащимися большей части нового учебного материала на уроке и минимизацию обязательных домашних заданий;

б) эффективную реализацию дифференцированного подхода:

– совершенствование системы работы по оперативному выявлению затруднений учащихся в усвоении содержания учебного предмета, учет и своевременную коррекцию их знаний и умений;

– активизацию работы на уроке с учащимися, проявляющими интерес к математике.

Соответственно:

1) повышается качество математической подготовки каждого учащегося (уровень усвоения теоретических знаний, эффективность решения всех типов текстовых задач, предусмотренных школьной программой);

2) формируются основы теоретического мышления, усвоение не только декларативных, но и процессуальных знаний, их творческое использование (перенос общих принципов);

3) обеспечивается преемственность обучения между начальной и средней школой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов, В.Д. Инновационная образовательная концепция «Обучение. Социализация. Развитие» / В.Д. Герасимов, А.П. Лобанов, // Психология образования: теория, практика, инноватика: сб. ст. под ред. А.П. Лобанова, А.А. Амелькова, В.А. Попкович. – Минск: БГПУ, 2006. – С. 16–21.
2. Герасимов, В.Д. Построение школьного курса математики на основе принципа системной дифференциации / В.Д. Герасимов // Теория развития: дифференционно-интеграционная теория: сб. ст. / под ред. Н.И. Чуприковой, А.Д. Кошелева. – М.: Языки славянских культур, 2011. – С. 113–142.
3. Герасимов, В.Д. Моя математика. 3 класс: учебник-тетрадь: в 2 ч. / В.Д. Герасимов. – Минск: Аверсэв, 2011. – 256 с.
4. Герасимов, В.Д. Моя математика. 4 класс: учебник-тетрадь: в 2 ч. / В.Д. Герасимов. – Минск: Аверсэв, 2011. – 256 с.
5. Герасимов, В.Д. Моя математика. 5 класс: учебник-тетрадь / В.Д. Герасимов. – Минск: Аверсэв, 2012. – 256 с.
6. Герасимов, В.Д. Моя математика. 6 класс: учебник-тетрадь / В.Д. Герасимов. – Минск: Аверсэв, 2013. – 256 с.
7. Лобанов, А.П. Интеллект и ментальные репрезентации: образовательный подход: монография / А.П. Лобанов. – Минск: БГПУ, 2010. – 288 с.
8. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий; под ред. Н.И. Чуприковой. – М.: Ин-т практ. психологии; Воронеж: НПО «Модэк», 1998. – 432 с.
9. Фридман, Л.М. Сюжетные задачи по математике: история, теория, методика / Л.М. Фридман. – М.: Школьная пресса, 2002. – 225 с.
10. Чуприкова, Н.И. Умственное развитие: Принцип дифференциации / Н.И. Чуприкова. – СПб.: Питер, 2007. – 448 с.