ISSN 2074-8566

ВЕСНІК

ВІЦЕБСКАГА ДЗЯРЖАЎНАГА ЎНІВЕРСІТЭТА

2023 № 3(120)

ВЕСНІК

ВІЦЕБСКАГА ДЗЯРЖАЎНАГА ЎНІВЕРСІТЭТА

НАВУКОВА-ПРАКТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца з верасня 1996 года
Выходзіць чатыры разы ў год

2023
№ 3(120)

З А С Н А В А Л Ь Н І К: установа адукацыі “Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт імя П.М. Машэрава”

Часопіс “Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта” ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па біялагічных, педагагічных, фізіка-матэматычных навуках

Адрас рэдакцыі:
210038, г. Віцебск, Маскоўскі пр-т, 33, кабінет 115,
тэл. +375(33)398-50-51.
E-mail: nauka@vsu.by
http://www.vsu.by

Рэгістрацыйны № 750 ад 27.10.2009.
Падпісана ў друк 31.08.2023. Фармат 60×84 1/8. Папера друкарская.
Ум. друк. арк. 11,39. Ул.-выд. арк. 7,97. Тыраж 175 экз. Заказ 85.

З М Е С Т

М А Т Э М А Т Ы К А

Б І Я Л О Г І Я

П Е Д А Г О Г І К А

CONTENTS

MATHEMATICS

BIOLOGY

PEDAGOGY

МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ ФИШЕРА

Н.Т. Воробьёв, А.А. Стайнова, С.Н. Воробьёв
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Материал и методы. *В исследовании используются методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории формаций и классов Фишера.*

Результаты и их обсуждение. *Классом Фишера называется класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, если из условия, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ и H/K – p-группа, где p – некоторое простое число, следует $H \in \mathfrak{F}$.*

Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется σ-классом Фишера, если для $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ и H/K – нильпотентная σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, выполняется $H \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ σ-локальна, если существует такая формационная σ-функция f, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = (G|G = 1$ или $G \neq 1$ и $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$.

В настоящей работе доказано, что σ-локальная формация является σ-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонической σ-функции σ-классы Фишера.

Заключение. *Найдена характеризация σ-локальных формаций Фишера, которые определяются разбиениями простых чисел.*

Ключевые слова: *формация, класс Фишера, σ-локальная формация, формационная σ-функция.*

CHARACTERIZATION OF σ-LOCAL FISCHER FORMATIONS

N.T. Vorobyev, A.A. Stainova, S.N. Vorobyev
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Material and methods. *Methods of the abstract theory of groups are used in this work. In particular, the methods of the theory of formations and Fischer classes.*

Findings and their discussion. *A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called a Fischer class if from the conditions $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ and H/K – p-group, where p is some prime number, follows $H \in \mathfrak{F}$.*

Let σ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$. Then Fitting class $\mathfrak{F}$ is called a Fischer σ-class if for $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ and H/K – nilpotent σ_i-group for some $\sigma_i \in \sigma$ it is true that $H \in \mathfrak{F}$. Formation $\mathfrak{F}$ is called σ-local if there is a σ- function f, that $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = (G|G = 1$ or $G \neq 1$ и $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ for all $\sigma_i \in \sigma(G))$.

In this paper, we prove that a σ-local formation is a Fisher σ-class if and only if all values of its canonical σ-function are Fisher σ-classes.

Conclusion. *In this paper characterization of σ-local Fischer formations, that are defined by partitions of prime numbers, is found.*

Key words: *formation, Fischer class, σ-local formation, formation σ-function.*

В настоящей работе все рассматриваемые группы предполагаются конечными. В терминологии и обозначениях будем следовать [1].

В исследовании структуры классов конечных групп известны своими приложениями наследственные классы групп. Класс групп называется *наследственным*, если наряду с каждой своей группой он содержит все ее подгруппы. Понятие наследственного класса Фиттинга было обобщено Хартли [2], где определены так называемые классы Фишера. *Классом Фишера* называется класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, если из условий, что $G \in \mathfrak{F}, K \leq H \leq G, K \trianglelefteq G$ и $H/K - p$-группа, где p есть некоторое простое число, следует $H \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что любой наследственный класс Фиттинга является классом Фишера, однако обратное в общем случае неверно. Возникает задача характеризации классов Фишера. Такая задача была решена К. Дерком и Т. Хоуксом для случая локальных формаций разрешимых групп, которые одновременно являются классами Фишера. Такие формации естественно называть локальными формациями Фишера.

В работе А.Н. Скибы [3] было обобщено понятие локальной формации при помощи разбиений множеств простых чисел. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i, \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G называется: *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$; *σ-нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Обозначим через $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ класс всех σ_i-групп, через $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ класс всех σ_i'-групп. Класс всех групп $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{N}$ будем обозначать символом $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$.

Согласно [4], отображение вида $f: \sigma \to$ {формации групп} называют *формационной σ-функцией* и полагают $LF_\sigma(f) = (G | G = 1$ или $G \neq 1$ и $G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Пусть f– формационная σ-функция. Множество всех σ_i, для которых $f(\sigma_i) \neq \emptyset$, называют *носителем* функции f и обозначают символом $Supp(f)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальной*, если существует такая формационная σ-функция f, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$. Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $\Pi = Supp(f)$, то по лемме из работы [5, лемма 2.3] справедливо равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\Pi \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i))$. Следуя [5, предложение 2.1], любая σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется единственной формационной σ-функцией F, причем такой, что выполняется $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(F) = \mathfrak{F}$. Данную формационную σ-функцию называют *канонической* формационной σ-функцией.

Возникает задача нахождения характеризации σ-локальных формаций Фишера произвольных групп. Решение этой задачи – цель настоящей работы. Доказана теорема: *σ-локальная формация является σ-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонической формационной σ-функции σ-классы Фишера*.

Материал и методы. В настоящем исследовании используются методы абстрактной теории групп, в частности методы теории конечных групп и их классов, а также методы теории формаций и классов Фишера.

Классом групп называют совокупность групп, которая наряду с каждой группой содержит ей изоморфную. Класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, называется *формацией*. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Ее обозначают символом $G_\mathfrak{F}$ и называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, тогда *произведением классов Фиттинга* называют класс групп $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (G: G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ являются формациями, то класс групп $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G: G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F})$ называют *произведением формаций*. В этом случае символом $G^\mathfrak{H}$ обозначают *$\mathfrak{H}$-корадикал* группы G, т.е. наименьшую нормальную подгруппу группы G такую, что $G/G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}$.

Будем называть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ *σ-классом Фишера*, если из того, что $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq G$ и H/K – нильпотентная σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, следует $H \in \mathfrak{F}$. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, мы получаем в точности определение класса Фишера.

Предварительные сведения. В качестве лемм приведем известные утверждения, которые будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *[1, гл. IX, теорема 1.12 (a)]. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ также является классом Фиттинга.*

2) *[1, гл. IV, теорема 1.8 (a)]. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то их произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ также является формацией.*

Лемма 1.2 *[1, гл. A, теорема 2.1 (b), (c)]. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если U и N – подгруппы группы G, а V нормализует N, то имеет место изоморфизм $VN/N \cong V/V \cap N$;*

2) *если M, N – нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq M$, то имеет место изоморфизм $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.*

Лемма 1.3 *[1, гл. A, тождество Дедекинда 1.3]. Пусть U, V, W – подгруппы группы G, причем $V \subseteq U$. Тогда справедливо равенство $U \cap VW = V(U \cap W)$.*

Лемма 1.4 *[1, гл. IX, лемма 1.1 (a)]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 1.5 *[1, гл. IX, лемма 1.7, теорема 1.9]. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-класс Фишера. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$Char(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F})$, где $\sigma(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из класса $\mathfrak{F}$;*

2) *$\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{F})}$.*

Лемма 1.6 *[1, гл. IX, лемма 1.13]. Пусть N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$, а факторгруппа G/N_1N_2 – нильпотентная группа. Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/N_2 \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ-классы Фишера. Тогда произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ также является σ-классом Фишера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то по утверждению 1) леммы 1.1 их произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ является классом Фиттинга. Остается выяснить, что если G группа из $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ и K ее нормальная подгруппа, содержащаяся в подгруппе H группы G такая, что H/K является нильпотентной σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, то $H \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$. Доказательство представим в виде нескольких этапов.

Вначале докажем, что из предположения $H/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ следует, что факторгруппы $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$ и $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}}$ являются группами из класса $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Так как по условию $K \trianglelefteq H$ и $K \trianglelefteq G$, то подгруппа $HG_{\mathfrak{F}} = HKG_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, факторгруппа $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} = HKG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} \cong H/H \cap KG_{\mathfrak{F}}$ по утверждению 1) леммы 1.2. Тогда, применяя утверждение 2) леммы 1.2, имеем изоморфизм $(H/K)/((H \cap KG_{\mathfrak{F}})/K) \cong$ $\cong H/H \cap KG_{\mathfrak{F}}$. Так как по условию $H/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и класс всех нильпотентных σ_i-групп является формацией, то группа $(H/K)/(H \cap KG_{\mathfrak{F}})/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Следовательно, изоморфная ей группа $H/H \cap KG_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Кроме того, $H/H \cap KG_{\mathfrak{F}} \cong HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$. Значит, $HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$.

Покажем, что $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Так как $K \trianglelefteq H$, то $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} = (H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cap K$. Применяя теперь утверждение 1) леммы 1.2, имеем изоморфизм $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \cong \big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K/K$. Поскольку $(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K$ – нормальная подгруппа группы $H/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ – класс Фиттинга, то группа $(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Следовательно, изоморфная группа $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$.

Далее докажем, что $H/H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Пусть $\bar{G} = G/G_{\mathfrak{F}}$, $\overline{K} = KG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$, $\overline{H} = HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}}$. Тогда из $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ следует $\bar{G} \in \mathfrak{H}$. Кроме того, $\overline{K} \trianglelefteq \bar{G}$ и по лемме 1.2 $\overline{H}/\overline{K} \cong HG_{\mathfrak{F}}/KG_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, ввиду доказанного выше, $\bar{G} \in \mathfrak{H}, \overline{K} \trianglelefteq \bar{G}, \overline{K} \subseteq \overline{H} \subseteq \bar{G}$ и $\overline{H}/\overline{K} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Поскольку $\mathfrak{H}$ является σ-классом Фишера, $\overline{H} = HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ и поэтому по утверждению 1) леммы 1.2 $HG_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{F}} \cong H/H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$.

Теперь докажем равенство $H_{\mathfrak{F}} \cap \big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K = H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Вначале заметим, что $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, $K \cap G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G_{\mathfrak{F}}$, $K \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $H \cap G_{\mathfrak{F}}/K \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Следовательно, из того, что $\mathfrak{F}$ – σ-класс Фишера, вытекает $H \cap G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Но $H \cap G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H$ и поэтому по определению $\mathfrak{F}$-радикала группы H заключаем, что $H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$. Далее, используя лемму 1.3, получаем равенство $H_{\mathfrak{F}} \cap \big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K = (H \cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}} \cap K)$. Так как $K \trianglelefteq H$, то по лемме 1.4 $H_{\mathfrak{F}} \cap K = K_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $H_{\mathfrak{F}} \cap \big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K = (H \cap G_{\mathfrak{F}})K_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $K_{\mathfrak{F}} \subseteq H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $H_{\mathfrak{F}} \cap \big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K = H \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Установим, что $H/\big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K \in \mathfrak{H}$. По предположению $H/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и класс $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ является формацией. Следовательно, по утверждению 2) леммы 1.5 $H/K/\big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K/K \cong H/\big(H \cap G_{\mathfrak{F}}\big)K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Легко видеть, ввиду теоремы Лагранжа, что

$$\big|H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})\big| = \big|H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}\big| \cdot \big|(H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}\big|.$$

Значит, множество всех простых делителей σ содержится во множестве всех простых делителей порядка группы $\left|H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})\right|$. Но факторгруппа $H/H \cap G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{H}$-группой и поэтому $\sigma_i \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Теперь, применяя лемму 1.5, получаем включения $\mathfrak{N}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$. Отсюда следует, что $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{H}$.

Наконец, применяя доказанное выше, покажем, что $H \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$. Для этого применим лемму 1.6 для групп: $\bar{G} = H/H \cap G_{\mathfrak{F}}$, $\overline{K_1} = (H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}$, $\overline{K_2} = H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}}$. Вначале проверим выполнимость всех условий леммы 1.6 для групп $\bar{G}$, $\overline{K_1}$ и $\overline{K_2}$. Очевидно, что $\overline{K_1} \trianglelefteq \bar{G}$ и $\overline{K_2} \trianglelefteq \bar{G}$. Рассмотрим пересечение $\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = ((H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cap (H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}})$. Ввиду того, что $H_{\mathfrak{F}} \cap \left(H \cap G_{\mathfrak{F}}\right)K = H \cap G_{\mathfrak{F}}$, получаем

$$\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = (H_{\mathfrak{F}} \cap (H \cap G_{\mathfrak{F}})K)/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) = (H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H \cap G_{\mathfrak{F}}) = 1.$$

Составим факторгруппу $\bar{G}/\overline{K_1}\,\overline{K_2}$ и покажем ее нильпотентность. Действительно,

$$\bar{G}/\overline{K_1}\,\overline{K_2} = (H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/((H \cap G_{\mathfrak{F}})K/(H \cap G_{\mathfrak{F}})(H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}}) = (H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}})/((H \cap G_{\mathfrak{F}})KH_{\mathfrak{F}})/(H \cap G_{\mathfrak{F}}).$$

Учитывая, что $H \cap G_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$, по утверждению 2) леммы 1.2 мы имеем

$$\bar{G}/\overline{K_1}\,\overline{K_2} = (H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/(\,H_{\mathfrak{F}}K/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cong H/H_{\mathfrak{F}}K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Остается проверить $\bar{G}/\overline{K_1} \in \mathfrak{H}$. Применяя лемму 1.3, получаем

$$\bar{G}/\overline{K_1} = (H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/((H \cap G_{\mathfrak{F}})K/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cong H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K.$$

Но $H/(H \cap G_{\mathfrak{F}})K \in \mathfrak{H}$ и поэтому $\bar{G}/\overline{K_1} \in \mathfrak{H}$. Таким образом, все условия леммы 1.6 выполняются. Теперь $\bar{G} \in \mathfrak{H}$, и по лемме 1.6 это равносильно тому, что $\bar{G}/\overline{K_2} \in \mathfrak{H}$. Это означает по утверждению 2) леммы 1.2, что $(H/H \cap G_{\mathfrak{F}})/(H_{\mathfrak{F}}/H \cap G_{\mathfrak{F}}) \cong H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ и произведение $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ является σ-классом Фишера. Теорема доказана.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\dots\}$, получаем следующий результат Локетта [5]

Следствие 1.8. *Произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.*

Для разрешимых групп получаем

Следствие 1.9. *Произведение двух любых классов Фишера разрешимых групп является классом Фишера.*

Мы будем использовать следующую формулу для σ-локальной формации, которую представляет

Лемма 1.10 *[5, лемма 2.3]. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $\Pi = Supp(f)$. Тогда справедливо равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i))$.*

Лемма 1.11. *Пересечение множества σ-классов Фишера является σ-классом Фишера.*

Доказательство этого утверждения следует непосредственно из определения σ-класса Фишера.

Каноническое определение σ-локальной формации описывает следующая

Лемма 1.12 *[5, предложение 2.1 (2)]. Пусть f – формационная σ-функция, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – такая формационная σ-функция, что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i)$.*

Основной результат

Определение 2.1. *Формацию Фишера $\mathfrak{F}$ назовем σ-локальной, если $\mathfrak{F}$ является σ-локальной формацией.*

В частности, если $\sigma = \sigma^1$, получаем определение локальной формации Фишера.

Основной результат представляет следующая

Теорема 2.2. *σ-Локальная формация является σ-классом Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонической формационной σ-функции являются σ-классами Фишера.*

Доказательство. Пусть все значения канонической формационной σ-функции F являются σ-классами Фишера. Покажем, что σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ в этом случае также является σ-классом Фишера. Так как формация $\mathfrak{F}$ σ-локальна, то по лемме 1.10, используя формулу σ-локальной формации, получаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i))$, где $\Pi = Supp(f)$. Заметим, что $F(\sigma_i)$ – σ-класс Фишера. Поскольку фиттинговы формации $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ являются наследственными, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – тоже σ-классы Фишера. Тогда произведение $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ также является σ-классом Фишера для всех $\sigma_i \in \Pi$

по лемме 1.7. Следовательно, по лемме 1.11 пересечение $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Pi} \cap (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i))$ σ-классов Фишера является σ-классом Фишера. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{F}$ – σ-класс Фишера.

Докажем обратное. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация Фишера с канонической формационной σ-функцией F, т.е. $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$. По лемме 1.12 $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i)$. Покажем, что все значения формационной σ-функции F являются σ-классами Фишера.

Пусть $G \in F(\sigma_i)$ и $K \trianglelefteq G, K \leq H \leq G$. Предположим, что $H/K \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Докажем, что $H \in F(\sigma_i)$. Рассмотрим регулярное сплетение $W = A \wr G$, где A – σ_i-группа. Тогда $W = A^{\natural} G$, где $A^{\natural}$ – базисная группа сплетения W. Отсюда следует, что $W/A^{\natural} \cong G$. Но $G \in F(\sigma_i)$. Следовательно, $W \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i)$. Так как F – каноническая формационная σ-функция $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) = F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $W \in \mathfrak{F}$. Ввиду нормальности подгрупп K и $A^{\natural}$ в группах G и W соответственно следует, что $A^{\natural} K \trianglelefteq W$. Действительно, пусть $x = ag \in W$, где $a \in A^{\natural}$ и $g \in G$. Тогда $x^{-1} A^{\natural} K x = g^{-1} a^{-1} A^{\natural} K a g$. Отсюда имеем, что $g^{-1} A^{\natural} K a g = g^{-1} K A^{\natural} g$ и поэтому $x^{-1} A^{\natural} K x = g^{-1} K g A^{\natural} = K A^{\natural}$. Так как $A^{\natural} K \leq A^{\natural} H$, то $A^{\natural} K \trianglelefteq H A^{\natural}$. Тогда, используя изоморфизмы

$$(HA^{\natural})/(KA^{\natural}) = (HKA^{\natural})/(KA^{\natural}) \cong H/(H \cap KA^{\natural}) \text{ и}$$
$$(H/K)(H \cap KA^{\natural}/K) \cong H/(H \cap KA^{\natural}),$$

получаем $H/(H \cap KA^{\natural}) \in \mathfrak{F}$. Итак, $W \in \mathfrak{F}$, $KA^{\natural} \triangleleft W$, $KA^{\natural} \leq HA^{\natural} \leq W$ и $(HA^{\natural})/(KA^{\natural}) \in \mathfrak{F}$.

Поскольку по условию $\mathfrak{F}$ является σ-классом Фишера, то $HA^{\natural} \in \mathfrak{F}$. Теперь ввиду σ-локальности формации $\mathfrak{F}$ и определения канонической формационной σ-функции F получаем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i'} F(\sigma_i)$. Следовательно, $HA^{\natural} \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i)$. Но по лемме [1, гл. A, лемма 18.8 (a)] $A^{\natural} H \cong A^{|G:H|} \wr H = W_1$. Значит, $W_1 = A^{\natural\natural} H$, где $A^{\natural\natural}$ – базисная группа сплетения W_1. Пусть $O_{\sigma_i'}(W_1)$ – наибольшая нормальная σ_i'-подгруппа группы W_1. Так как базисная группа $A^{\natural\natural}$ группы W_1 является σ_i-группой, то $O_{\sigma_i'}(W_1) \cap A^{\natural\natural} = 1$. Таким образом, по лемме [1, гл. A, лемма 18.8 (b)], $O_{\sigma_i'}(W_1) = 1$ и поэтому $O_{\sigma_i'}(HA^{\natural}) = 1$. Но тогда из $HA^{\natural} \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i)$ следует, что $HA^{\natural} = HA^{\natural}/O_{\sigma_i'}(HA^{\natural}) \in F(\sigma_i)$. Итак, $HA^{\natural} \in F(\sigma_i)$. Таким образом, $HA^{\natural}/A^{\natural} \cong H/H \cap A^{\natural} = H \in F(\sigma_i)$ и поэтому $F(\sigma_i)$ – σ-класс Фишера. Теорема доказана.

В случае разбиения $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ мы получаем следующее

Следствие 2.3. *Локальная формация является классом Фишера, когда все значения ее канонической формационной функции классы Фишера.*

В случае разрешимых групп получаем результат [1, гл. IX, предложение (3.6)] как

Следствие 2.4. *Локальная формация разрешимых групп является классом Фишера, когда все значения ее канонической формационной функции классы Фишера.*

Заключение. В работе найдена характеризация σ-локальных формаций Фишера, которая определяется разбиениями простых чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – P. 891.
2. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
3. Skiba, A.N. On one generalization of local formations / A.N. Skiba // Probl. Phys., Math. and Techn. – 2018. – № 1(34). – P. 76–81.
4. Чжан Чи. О Σ_t^{σ}-замкнутых классах конечных групп / Чи Чжан, А.Н. Скиба // Укр. мат. жур. – 2018. – Т. 70, № 12. – P. 1707–1715.
5. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite solvable groups: Ph. D. thesis / F.P. Lockett. – University of Warwick, 1971. – P. 91.

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – P. 891.
2. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
3. Skiba, A. N. On one generalization of local formations / A.N. Skiba // Probl. Phys., Math. and Techn. – 2018. – № 1(34). – P. 76–81.
4. Jang Chi, Skiba A.N. Ukr. mat. zhur. [Ukrainian Mathematical Journal], 2018, 70(12), pp. 1707–1715.
5. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite solvable groups: Ph. D. thesis / F.P. Lockett. – University of Warwick, 1971. – P. 91.

Поступила в редакцию 06.07.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: stainova.aa@mail.ru – Стайнова А.А.

УДК 517.983

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

С.А. Шлапаков*, О.В. Скоромник**
**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*
***Учреждение образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»*

Дробное исчисление – это часть современного математического анализа, которая в настоящее время интенсивно развивается. Важность изучения дифференциальных уравнений дробного порядка обусловлена их широким применением в задачах биологии, химии, физики, механики и, собственно, в самой теории дробного исчисления. В задачах прикладного характера нередко возникает необходимость рассматривать аналоги задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе исследуется краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка.

Цель статьи – показать равносильность задачи типа Коши и интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Материал и методы. *Рассматривается задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка общего вида. При этом используются методы функционального анализа и дробного исчисления.*

Результаты и их обсуждение. *В работе исследуется задача типа Коши для уравнения с дробной производной Адамара, показана ее эквивалентность интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а также доказаны существование и единственность решения задачи в пространстве интегрируемых функций.*

Заключение. *Полученные результаты обобщают таковые для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка.*

Ключевые слова: *дробное интегрирование и дифференцирование Адамара, задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, пространство интегрируемых функций.*

THE CAUCHY TYPE PROBLEM FOR THE EQUATION WITH FRACTIONAL HADAMARD DERIVATIVE

S.A. Shlapakov*, O.V. Skoromnik**
**Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"*
***Education Establishment "Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk"*

Fractional calculation is a part of modern mathematical analysis which is rapidly developing at present. The significance of the study of fractional oder differential equations is due to their wide application in Biology, Chemistry, Physics, Mechanics problems as well as in the theory of fractional calculation itself. In applied character problems it is often necessary to consider Cauchy problem analogues for differential equations of fractional order. We consider a boundary value problem of Cauchy type for a differential equation of fractional order.

The purpose of the article is to demonstrate the equality of the Cauchy type problem and the second order Volterra integral equation.

Material and methods. *The Cauchy type problem for the general type differential equation of fractional order is considered. Methods of functional analysis and fractional calculation are used.*

Findings and their discussion. *The Cauchy type problem for the equation with fractional Hadamard derivative is studied in the paper. Its equivalence to the second order Volterra integral equation is demonstrated. The existence and the only possible solution of the problem in the space of integrated functions are proved.*

Conclusion. *The obtained findings generalize those for convetional differential n-order equations.*

Key words: *fractional Hadamard integration and differentiation, Cauchy type problem for a differential equation of fractional order, the second order Volterra integral equation, space of integrated functions.*

В настоящей работе исследуется задача типа Коши, постановка которой производится для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка с дробной производной Адамара [1; 2]. Естественно, возникает проблема интегрирования такого уравнения с учетом начальных условий. Работа посвящена этому аспекту.

Цель статьи – показать равносильность задачи типа Коши и интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Материал и методы. Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, используемые при интегрировании дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дробного интегродифференцирования.

Результаты и их обсуждение. В [1] рассматривалась задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x)=f(x,y(x)),\, n-1<\alpha\le n,\, n\in N,\, n=-[-\alpha] \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k}y\right)(0+)=b_k\,,\, k=1,2,\dots,n\ , \tag{2}$$

где D_{0+}^{α} – дробная производная Римана–Лиувилля [1]:

$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{n}\displaystyle\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}y(t)dt\,,\, n-1<\alpha\le n,\, n\in N,\, a>0$, $\Gamma(\beta)=\displaystyle\int_{0}^{\infty}x^{\beta-1}e^{-x}dx$ – гамма-функция, $f(x,y)$ – заданная функция в некоторой области $D\subset R^2$; $\alpha, b_1, b_2,\dots, b_n$ – постоянные вещественные числа. Введем в рассмотрение множество $R_n\subset D$:

$$\begin{aligned}&R_n=\left\{(x,y)\in D: 0<x\le h\,,\left|x^{n-\alpha}y(x)-\frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)}\right|\le a\right\},\\&a>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{n-k}b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)},\end{aligned} \tag{3}$$

где $a, h, b_k\in R$.

Левые части в (2) представляют собой пределы в правосторонней окрестности $(0,0+\varepsilon), \varepsilon>0$, точки 0:

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k}y\right)(0+)=\lim_{x\to 0+}\left(D_{0+}^{\alpha-k}y\right)(x),\, k=1,2,\dots,n.$$

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y)$ *является вещественнозначной и непрерывной в области D функцией, причем она удовлетворяет по второй переменной условию Липшица*

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,\quad L>0,$$

и ограничению

$$\sup_{(x,y)\in D}\left|f(x,y)\right|=b_0<+\infty\,.$$

Тогда решение задачи (1)–(2) для значений $n=1,2,\dots$ *в (3) существует, является непрерывным и единственным.*

В ходе доказательства этого утверждения было показано, что задача типа Коши (1)–(2) эквивалентна уравнению

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt\,.$$

Данный факт согласуется с тем, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\dots+a_n(x)u=F(x),\ x>0$$

с начальными условиями при значении $x=0$

$$u(0)=c_0,\ u'(0)=c_1,\ u''(0)=c_2,\ \dots,\ u^{(n-1)}(0)=c_{n-1}$$

эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра [3]

$$\phi(x)+\int_0^x K(x,s)\phi(s)ds=f(x),$$

где

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$f(x)=F(x)-c_{n-1}a_1(x)-(c_{n-1}x+c_{n-2})a_2(x)-\dots-\left(c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+c_1x+c_0\right)a_n(x).$$

Дробное интегрирование и дифференцирование по Адамару порядка $\alpha>0$ определяется следующим образом:

$$\left(\Im^{\alpha}_{a+,\mu}h\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1}h(t)\frac{dt}{t},\ \alpha>0,\ x>a\geq 0,\ \mu\in R, \tag{4}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+,\mu}h\right)(x)=x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left(\Im^{n-\alpha}_{a+,\mu}h\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1,\ \mu\in R. \tag{5}$$

В случае $\mu=0$ формулы (4) и (5) принимают соответственно вид [4]:

$$\left(\Im^{\alpha}_{a+}h\right)(x)\equiv\left(\Im^{\alpha}_{a+,0}h\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{h(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad x>a\geq 0, \tag{6}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}h\right)(x)\equiv\left(D^{\alpha}_{a+,0}h\right)(x)=\delta^n\left(\Im^{n-\alpha}_{a+}h\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1. \tag{7}$$

Задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Адамара ставится следующим образом:

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x)=f(x,y(x)),\ n-1<\alpha\leq n,\ n\in N,\ a>0 \tag{8}$$

при начальных условиях

$$\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)=b_k,\ k=1,2,\dots,n=-[-\alpha]. \tag{9}$$

Задачу (8)–(9) будем рассматривать в пространстве регулярных функций

$$L^{\alpha}_{\delta}(a,b)=\left\{y\in L(a,b)\,\middle|\,D^{\alpha}_{a+}y\in L(a,b)\right\},\ 0<a<b<+\infty. \tag{10}$$

В (9) левые части, аналогично (2), означают пределы в правосторонней окрестности $(a,a+\varepsilon),\varepsilon>0$ точки a:

$$\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(D^{\alpha-k}_{a+,\mu}y\right)(x),\ k=1,2,\dots,n-1,$$

$$\left(D^{\alpha-n}_{a+}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(\Im^{n-\alpha}_{a+}y\right)(x),\ \alpha\neq n,$$

$$\left(D^{0}_{a+,\mu}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}y(x),\ \alpha=n.$$

Следует отметить, что при натуральном значении $\alpha = n \in N$ задача (8)–(9) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \delta^n y(x) = f(x, y(x)),\, \delta = x\frac{d}{dx},$$
$$\lim_{x\to a+}\left(\delta^{n-k} y\right)(x) = b_k,\, b_k \in R,\, k = 1,2,\ldots,n.$$

Предположим, что функция $y(x)$ является абсолютно интегрируемой по Лебегу на промежутке (a, b), то есть $y(x) \in L(a, b)$, причем она удовлетворяет задаче (8)–(9). Но согласно соотношениям (6) и (7)

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \delta^m\left(\Im_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x),\, n = -[-\alpha],\, \left(\Im_{a+}^{0} y\right)(x) = y(x),$$

причем $\left(\Im_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x) \in AC_{\delta,0}^{n}[a, b]$ [4]. Применим оператор дробного интегрирования Адамара $\Im_{a+}^{\alpha}$, определенный в (6), к обеим частям уравнения (8). Интегрируя по Адамару левую часть уравнения (8) с учетом свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования по Адамару [4], будем иметь

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\delta^{n-k}(\Im_{a+}^{n-\alpha} y)\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = y(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k},$$

а с учетом условий (9)

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}.$$

Если теперь $\left\|f(x,y)\right\|_{L_1} = M < \infty$, то $\left\|\left(\Im_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x)\right\|_{L_1} \le K\left\|f(x,y)\right\|_{L_1}$, где постоянная *K* приведена в [2]. Применим оператор дробного интегрирования по Адамару к правой части (8):

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t))\frac{dt}{t}.$$

Таким образом,

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t))\frac{dt}{t},\ x > a. \tag{11}$$

Конструкция (11) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Пусть теперь $y(x) \in L(a, b)$ и является решением уравнения (11). Применяя оператор дробного дифференцирования по Адамару D_{a+}^{α}, определенный в (7), к обеим частям уравнения (11), получим уравнение (8), поскольку

$$\left(D_{a+}^{\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} = 0 \quad (\beta-\alpha = 0,-1,-2,\ldots,1+[-\alpha]).$$

Подействуем оператором $D_{a+}^{\alpha-k}$ на обе части уравнения (11). Если $1 \le k \le n-1$, то

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(D_{a+}^{\alpha-k}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) + \left(D_{a+}^{\alpha-k}\Im_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-j} + \left(\Im_{a+}^{k} f(t, y(t))\right)(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{(k-j)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{k-1} f(t, y(t))\frac{dt}{t}.$$

Если же $k = n$, то имеем

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(n-j)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-1} f(t, y(t))\frac{dt}{t}.$$

Переходя в последних двух равенствах к правостороннему пределу $x \to a+$, получаем условия (9). Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$, $0 < a < b < \infty$ *и функция* $f(x, y) \in L(a, b)$ *при любом действительном y. Вещественная функция* $y(x) \in L(a, b)$ *является почти всюду решением задачи типа Коши (8)–(9) тогда и только тогда, когда она почти всюду удовлетворяет интегральному уравнению (11).*

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится обращаться к теории дробного дифференцирования и теории дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе получено интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода и доказана его эквивалентность задаче типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с дробной производной Адамара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2009. – № 3. – С. 132–135.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
4. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI(63) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 16–17 марта 2011 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – Т. 1. – С. 71–73.

REFERENCES

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozhaeniya [Integrals and Fraction Order Derivatives and Some Applications], Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Shlapakov S.A. Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta [Journal of Vitebsk State University], 2009, 3, pp. 132–135.
3. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Directory on Conventional Differential Equations], M.: Nauka, 1966, 576 p.
4. Shlapakov S.A. Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy XVI(63) Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 16–17 marta 2011 g. v 2 t. [Science – for Education, Industry, Economy: Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, March 16–17, 2011], Vitebsk State University, Vitebsk, 2011, 1, pp. 71–73.

Поступила в редакцию 06.10.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.

УДК 004.021:519.85:378.016:378.044

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ

Е.А. Корчевская*, С.А. Ермоченко*, Т.В. Никонова, Л.В. Маркова***, Ю.А. Шпакова***
**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*
***Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»*
****Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси*

В настоящей работе для составления учебной нагрузки преподавателей кафедры предлагается композиционный генетический алгоритм, который базируется на объектно-ориентированном представлении исходной информации, адаптированных к ней генетических операциях и структурированных объектах генетической оптимизации.

Цель работы – адаптация генетического алгоритма для решения задачи распределения учебной нагрузки на кафедре.

***Материал и методы.** В качестве исходных использовались данные учебной нагрузки кафедры прикладного и системного программирования. Основным методом исследования является генетический алгоритм.*

***Результаты и их обсуждение.** Исходной информацией при распределении нагрузки выступают множества дисциплин кафедры, преподавателей, различных видов занятий. Между данными множествами существуют зависимости, которые образованы благодаря организационному процессу работы кафедры. Разработанный генетический алгоритм состоит из нескольких этапов: формирования первого поколения случайным образом; селекции, позволяющей отобрать наиболее приспособленные особи; генерации нового поколения путем применения скрещивания более приспособленных; мутации.*

***Заключение.** В результате работы предложена методика формирования нагрузки профессорско-преподавательского состава с помощью генетического алгоритма.*

***Ключевые слова:** генетический алгоритм, распределение учебной нагрузки, оператор скрещивания, оператор мутации.*

USING A GENETIC ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF DISTRIBUTION OF ACADEMIC WORKLOAD

E.A. Korchevskaya*, S.A. Yermochenko*, T.V. Nikonova, L.V. Markava***, Y.A. Shpakova***
**Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"*
***Education Establishment "Vitebsk State Technological University"*
****A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus*

In this paper, for compiling the academic workload of teachers of the department, a compositional genetic algorithm is proposed, based on the structuring of the initial information, genetic operations adapted to it, and an object-oriented representation of genetic optimization objects.

The purpose of the work is the adaptation of the genetic algorithm for solving the problem of distributing the teaching load at the department.

***Material and methods.** The data of the academic workload of the Applied and System Programming Department were used as initial data. The main research method is a genetic algorithm.*

***Findings and their discussion.** As initial information while distributing the workload is: a set of disciplines of the Department, the teachers of the Department, types of classes. Amomg these sets there are links arising from the organizational process of the Department work. The developed algorithm consists of several stages: "the scatter" – the stage at which the first generation is randomly compiled; the selection, which makes it possible to select the most appropriate individuals; the formation of a new generation that allows you to generate the following individuals by crossing the more fit; mutation.*

***Conclusion.** As a result of the work, a method for forming the workload of the teaching staff using a genetic algorithm is proposed.*

***Key words:** genetic algorithm, distribution of the academic load, crossover operator, mutation operator.*

Основополагающей задачей при организации учебного процесса на кафедрах в учреждении высшего образования является задача автоматизированного формирования учебной нагрузки. Грамотное распределение учебных дисциплин обеспечивает равномерную загрузку профессорско-преподавательского состава, который отвечает за подготовку молодых специалистов [1].

Многообразие форм, направлений, различных категорий и запросов к ним приводит к большому числу версий учебной нагрузки, из которых необходимо выбрать оптимальную. Данный процесс является многокритериальной, трудоемкой задачей, с учетом множества дисциплин, преподаваемых на кафедре, а также динамичного и многочисленного состава кафедры. Сложности формирования нагрузки связаны с тем, что задача составления оптимальной схемы распределения обусловлена следующими особенностями: трудоемкостью построения математической модели благодаря большому набору ограничений; многообразием направлений преподаваемых дисциплин; существованием всевозможных критериев оптимальности, которые трудоемко проверить вручную.

Основными связанными структурными объектами, фигурирующими в учебном процессе кафедры, являются дисциплины, преподаватели, должности и виды нагрузки [2]. Благодаря специфике организации учебного процесса на кафедре каждый преподаватель занимает определенную должность, имеет свое направление научного исследования, собственную специализацию, а также проводит конкретные занятия.

Цель работы – адаптация генетического алгоритма для решения задачи распределения учебной нагрузки на кафедре.

Материал и методы. В качестве исходных использовались данные учебной нагрузки кафедры прикладного и системного программирования. Основным методом исследования является генетический алгоритм. В настоящей работе для составления учебной нагрузки преподавателей кафедры предлагается композиционный генетический алгоритм, в основе которого лежит объектно-ориентированное представление исходных структурных объектов – участников учебного процесса кафедры.

Генетический алгоритм – это эволюционный алгоритм эвристического вида, состоящий из последовательности действий, которые путем случайного подбора оптимальной нагрузки позволяют найти решение или комбинацию решений к поставленной задаче. Данный алгоритм состоит из нескольких этапов: формирования первого поколения случайным образом; селекции, позволяющей отобрать наиболее приспособленные особи; генерации нового поколения путем применения скрещивания более приспособленных; мутации [3]. Все этапы и генетические операции адаптированы и представлены в виде объектов.

Суть алгоритма заключается в том, что через конечное количество циклических повторений будет найдено оптимальное решение задачи, которое удовлетворяет некоторым критериям. Для каждой задачи данные критерии являются уникальными. Оценка полученных решений происходит на этапе отбора (селекции). Выделяются наиболее важные критерии, по которым будет происходить анализ полученных решений. Далее создается следующее поколение, которое будет модифицировано с помощью тех же генетических операций до того момента, пока мы не придем к оптимальному результату с точки зрения установленных ограничений.

Генетический алгоритм является вариабельным и допускает различные модификации. Поэтому мы не можем в общем виде точно и однозначно указать этапы. Часто происходит модифицирование определенных шагов и включение операции мутации. Мутация – это выбор с некоторой вероятностью особей и внесение определенных для данной задачи изменений. Такая операция используется для трансформации последующих результатов. Скрещивание позволяет усовершенствовать с точки зрения поставленных критериев результат, изменить привычный ход итераций и за более короткое время найти оптимальное решение [4].

Результаты и их обсуждение. Исходной информацией при распределении нагрузки выступают:

а) множество $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{Nd}\}$ дисциплин кафедры;

б) множество $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{Ng}\}$ преподавателей кафедры;

в) множество $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{Np}\}$ видов занятий,

где Nd – число дисциплин кафедры, Ng – количество преподавателей кафедры, Np – количество видов занятий.

Между данными множествами существуют зависимости, которые сформированы в соответствии с организационным процессом работы кафедры. Поскольку исходные данные являются объемными и разнородными, то целесообразно для формирования объектов использовать приемы агрегирования и декомпозиции, что позволит исходную информацию представить в виде совокупности объектов и применить объектно-ориентированную парадигму программирования.

На основе имеющейся информации о нагрузке кафедры, об учебных планах различных специальностей можно сказать, что объекты D, P и G влияют на то, какие именно занятия и по каким дисциплинам должен провести определенный преподаватель.

Классификацию всех преподавателей кафедры можно представить в следующем виде:

1. Преподаватель-стажер (Множество G_1).
2. Преподаватель (Множество G_2).
3. Старший преподаватель (Множество G_3).
4. Доцент (Множество G_4).
5. Профессор (Множество G_5).

Очевидно, что $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5$.

За каждой из вышеперечисленных должностей закреплено количество часов, а именно обязательный минимум и максимум – это определенный интервал, в который должна вложиться вся нагрузка преподавателя. Также у каждого преподавателя есть специализация, которая обеспечивает закрепление за определенным набором дисциплин.

Для формального описания *j*-го преподавателя *k*-й квалификации, работающего на *d*-й должности, введем кортеж:

$$G = \{g_j\},\ g_j = \{g_d^j, g_k^j\}.$$

Входными данными для этой задачи являются фамилия преподавателя, должность, часовой диапазон нагрузки, соответствующий должностям, уровень и возможность преподавателя в проведении дисциплины, название дисциплины и ее вид, общая нагрузка для каждой дисциплины.

Алгоритм реализован в среде разработки Visual Studio 2019, на языке программирования C++. Создан один базовый класс, который называется object. От него будут наследоваться два класса, включающие в себя информацию о преподавателях и дисциплинах. Основная функция класса object – сохранять в себе общее количество часов. Так, в дисциплинах оно изначально известно, а для преподавателя оно вычисляется. Также создано два метода, с помощью которых возможен доступ к данным. Они позволяют при создании объекта класса вносить изменения или просто использовать существующие данные. Все классы в программе созданы с учетом принципа инкапсуляции. Существуют закрытые поля с данными, доступными только в зоне видимости класса, и публичные, которые содержат конструкторы и различные методы.

От класса object наследуется два класса teacher и discipline. Они хранят в себе всю информацию, которая была дана изначально, а также накапливают полученную.

В работе исследуется возможность применения генетического алгоритма для распределения нагрузки. Задача нахождения оптимального распределения нагрузки при помощи генетического алгоритма заключается в разработке критериев, по которым мы будем оценивать наши возможные решения.

В классе teacher осуществляется публичное наследование – публичные и защищенные данные наследуются без изменения уровня доступа к ним. Реализован динамический массив, заполняющийся строковыми значениями, которые означают, какие виды занятий может проводить преподаватель. Каждый объект класса содержит в себе ассоциативный контейнер, который хранит в себе пары, состоящие из ключа и значения. Ключ – это категория, в которой может вести дисциплину преподаватель, а значение – вес, насколько преподаватель профессионал в данном направлении.

Также в классе создана определенная система для хранения результатов после первого и последующих составлений поколений генетического алгоритма. Она реализована через список – последовательный контейнер такой, что любой элемент знает только о предыдущем и о следующем элементах. Данные, которые хранит список, – структуры, состоящие из трех полей: вид занятия (лекция, практика, лабораторная работа), время и указатель на дисциплину, часы которой мы присваиваем данному преподавателю.

Далее создан класс discipline, содержащий информацию о предметах. Он содержит четыре приватных поля: название дисциплины, категория и два списка. Первый список создан для упорядоченной записи часов по разным видам занятий, второй список – для записи значений после составления популяции.

Для организации этапа отбора требуется сформулировать условия, предъявляемые к особям популяции. Все требования могут быть обязательными и желательными. К первой группе относятся требования, невыполнение которых делает процесс распределения учебной нагрузки кафедры невозможным (в нашем случае необходимо уложиться во временные интервалы). Эти требования будем рассматривать в качестве обязательных ограничений оптимизационной задачи распределения нагрузки. Вторая группа включает в себя требования, выполнение которых является желательным. К числу данных требований относятся: соблюдение равномерности распределения нагрузки в течение двух семестров, соблюдение соответствия между характером занятий (у преподавателя должны быть и лекционная нагрузка и лабораторные занятия); требования, связанные с обеспечением комфорта преподавателей и студентов.

В генетическом алгоритме решения задачи распределения нагрузки каждая особь является одним из возможных решений задачи, т.е. вариантом распределения нагрузки. В итоге особями в генетическом алгоритме будут являться объекты двух созданных классов discipline и teacher. Каждая особь состоит из двух хромосом (дисциплина, преподаватель). И после первого и последующих созданий популяций особи будут сохранять в себе ссылки: особь, имеющая данные о преподавателе, будет содержать ссылку на дисциплину и наоборот. Это означает, что первая и вторая хромосомы связаны связью «однозначного соответствия».

Поиск оптимального распределения нагрузки с использованием генетических алгоритмов будет проходить в несколько этапов. Формирование начального поколения производится с помощью произвольного «разброса» часов по преподавателям при помощи функции, которая находит случайное значение в указанном диапазоне. Начальное значение диапазона всегда равно 1, а число часов, выделенное на определенный вид занятий, и явится конечным значением диапазона. Когда случайное число будет выявлено и записано в список и преподавателя и дисциплины, функция вычитает полученное значение из количества часов, отведенных на данный вид занятий. Когда все часы одной дисциплины будут рассмотрены и разбросаны по преподавателям, можно будет переходить к следующей особи и так до тех пор, пока не закончится массив дисциплин. Массив преподавателей заполняется последовательно, с поочередным прохождением по индексам.

На этапе отбора следует самые приспособленные особи перевести в следующую популяцию и сформировать новые особи. Для выбора оптимальных вариантов нагрузки необходимо реализовать функции пригодности для обязательных и желательных требований. Те особи, которые удовлетворяют требованиям, переходят в следующее поколение, а некоторое количество особей в новой популяции заполняется особями, полученными в результате кроссинговера и мутации особей.

Для создания разного рода критериев создан абстрактный класс, который содержит только один чисто виртуальный метод. В дальнейшем во всех наследуемых классах будет происходить его переопределение. Благодаря этому методом можно гибко пользоваться в коде, а именно создавать объекты классов наследуемых от абстрактного и всегда вызывать функцию, имеющую одно и то же имя, но выполняющую разный алгоритм.

В основе одной функции пригодности лежит оценка того, есть ли возможность у преподавателя вести дисциплину определенного вида. Так как в начальные данные, помимо фамилии и должности, входит еще и информация, насколько преподаватель специализируется в каком-либо направлении. Примерами направлений кафедры системного и прикладного программирования являются специалисты в разработке на C++, Java, языке Assembler, HTML, Python.

Для установления условий, при которых особь не способна перейти в следующее поколение, создан абстрактный класс с единственным чисто виртуальным методом, реализующим этап селекции. В производных классах этот метод переопределяется и производит оценку качества полученного решения. Первое условие проверяет, входит ли полученное число часов в промежуток минимума и максимума преподавателя, второе же учитывает возможность конкретного сотрудника преподавать определенные дисциплины.

Скрещивание (кроссинговер) особей происходит по следующей схеме: случайным образом из числа наиболее приспособленных выбираются две особи. Далее для каждой пары отобранных особей случайным образом производится обмен участками генетического кода между соответствующими хромосомами родительских особей. Данный процесс не позволяет избежать лишних проверок на корректность особей, полученных в результате процедуры скрещивания, поскольку у каждого преподавателя существует набор дисциплин, которые он не может преподавать.

К некоторым особям применяется оператор мутации. В предлагаемом алгоритме этот оператор изменяет значение нескольких генов особи на другие допустимые для данного гена значения, например, заменяет дисциплину для некоторого преподавателя на любую из допустимого.

Заключение. В результате генетического алгоритма с применением операторов отбора, скрещивания и мутации формируется новое поколение. Часть родительской популяции, удовлетворяющей условию отбора, также переходит в новую популяцию. Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполняться условие останова. Предлагается в качестве такого условия использовать следующее: некоторый процент особей имеет одинаковые значения функции приспособленности. В результате работы наиболее приспособленные особи будут переходить в новое поколение и накапливаться. В какой-то момент их количество и качество достигнет необходимого уровня.

В результате работы предложена методика формирования учебной нагрузки с помощью генетического алгоритма. Данная методика реализована с помощью объектно-ориентированной парадигмы программирования на языке программирования C++ с учетом основных принципов объектно-ориентированного программирования и позволяет на основании исходных данных оптимальным образом распределить нагрузку кафедры. В работе предложены различные варианты генетических операторов селекции, мутации, скрещивания, формирования начальной популяции и выполнена оценка эффективности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Адаменко, Н.Д. Некоторые аспекты учебного процесса на факультете математики и информационных технологий / Н.Д. Адаменко, Л.В. Маркова, Е.А. Корчевская // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; Е.Я. Аршанский [и др.]. – Витебск, 2021. – Т. 1. – С. 528–529.
2. Маркова, Л.В. Особенности учебного процесса в режиме офлайн / Л.В. Маркова, Н.Д. Адаменко, С.А. Ермоченко, Е.А. Корчевская // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2022. – № 3(116). – С. 83–88.
3. Маслов, М.Г. Разработка моделей и алгоритмов составления расписаний в системах административно-организационного управления: дис. … канд. техн. наук: 05.13.18 / М.Г. Маслов; Моск. гос. ун-т прикладной технологии. – М., 2004. – 217 л.
4. Яндыбаева, Н.В. Генетический алгоритм в задаче оптимизации учебного расписания вуза / Н.В. Яндыбаева // Современные наукоемкие технологии. – 2009. – № 11. – С. 97–98.

R E F E R E N C E S

1. Adamenko N.D., Markova L.V., Korchevskaya E.A. Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy 73 Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 11 marta 2021 g.: v 2 t. / Viteb. gos. un-t [Science – for Education, Industry, Economy: Proceedings of the 73rd Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, March 11, 2021: in 2 Volumes], Vitebsk, 2021, 1, pp. 528–529.
2. Markova L.V., Adamenko N.D., Yermochenko S.A., Korchevskaya E.A. Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta [Bulletin of Vitebsk State University], 2022, 3(116), pp. 83–88.
3. Maslov M.G. Razrabotka modelei i algoritmov sostavleniya raspisanii v sistemakh administrativno-organizatsionnogo upravleniya: dis. … kand. tekhn. nauk [Development of Models and Algorythms of Academic Schedule Elaboration in Systems of Administrative and OIrganizational Management: PhD (Technology Science) Dissertation], Mosk. Gos. un-t prikladnoi tekhnologii, M., 2004, 217 p.
4. Yandybayeva N.V. Sovremenniye naukoyemkiye tekhnologii [Contemporary Science Loaded Technologies], 2009, 11, pp. 97–98.

Поступила в редакцию 06.06.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: Korchevskaya.Elena@gmail.com – Корчевская Е.А.

УДК 517.956.32

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КОНЦЕ

Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко
Белорусский государственный университет

В настоящем исследовании для гладких решений модификацией метода характеристик выведен полный и окончательный критерий корректности по Адамару смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном режиме. Нестационарность граничного режима означает зависимость коэффициентов первой косой производной от времени. Ее характеристичность означает направление первой косой производной вдоль критической характеристики уравнения. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением.

Цель статьи – вывод критерия корректности по Адамару этой задачи во множестве гладких решений.

Материал и методы. *Материалом работы является смешанная задача для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной с зависящими от времени коэффициентами. Исследование корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) во множестве гладких решений проведено с помощью понятия критериального значения старших производных от правой части уравнения и обобщения исследования корректности задачи Ф.Е. Ломовцевым во множестве классических решений, что представляет новую модификацию метода характеристик.*

Результаты и их обсуждение. *Во множестве гладких решений получен критерий корректности смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной характеристической первой косой производной в граничном режиме. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования правой части уравнения, начальных данных и граничного данного для ее однозначной и устойчивой везде разрешимости в гладких решениях. Формула гладкого решения совпадает с известной формулой классического решения. Устойчивость гладкого решения по правой части уравнения, начальным данным и граничному данному выведена из явной формулы гладкого решения. Полученные результаты дают полное и окончательное исследование ее корректности. Они нужны для вывода критерия корректности аналогичной смешанной задачи для ограниченной струны.*

Заключение. *Для гладких решений найден критерий корректности по Адамару смешанной задачи с характеристической первой косой производной и зависящими от времени коэффициентами в граничном режиме.*

Ключевые слова: *смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая косая производная, гладкое решение, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.*

SMOOTH SOLUTIONS TO A MIXED PROBLEM FOR THE SIMPLEST VIBRATION EQUATION OF A SEMI-BOUNDED STRING AT CHARACTERISTIC FIRST OBLIQUE DERIVATIVE ON THE END

F.E. Lomovtsev, T.S. Tochko
Belarusian State University

In the article, for smooth solutions by a modification of the characteristic method, a complete and final criterion for the Hadamard's correctness of a mixed problem for the simplest inhomogeneous vibration equation of a semi-bounded string with a nonstationary characteristic first oblique derivative in the boundary mode is derived. The nonstationarity of the boundary regime means *the dependence of the coefficients of the first oblique derivative on time. Its characteristic means the direction of the first oblique derivative along the critical characteristic of the equation. The correctness criterion consists of necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions the boundary regime with the initial conditions and the equation.*

The purpose of the article is to derive a Hadamard's correctness criterion for this problem in the set of smooth solutions.

Material and methods. *The material of the work is a mixed problem for the simplest inhomogeneous vibration equation of a semi-bounded string with a characteristic first oblique derivative with time-dependent coefficients. The study of correctness in the sense of Hadamard (existence, uniqueness and stability) in the set of smooth solutions was carried out using the concept of the criterial value of the highest derivatives of the right-hand side of the equation and generalization of the study of its correctness by F.E. Lomovtsev in a variety of classical solutions, which represents a new modification of the characteristic method.*

Findings and their discussion. *In the set of smooth solutions, a correctness criterion of the mixed problem is obtained for the simplest inhomogeneous vibration equation of a semi-bounded string with a non-stationary characteristic first oblique derivative in the boundary regime. The correctness criterion consists of necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions for the right-hand side of the equation, initial data, and boundary data for its unique and everywhere stable solvability in smooth solutions. The formula for a smooth solution coincides with the well-known formula for a classical solution. The stability of a smooth solution with respect to the right-hand side of the equation, initial data, and boundary data is derived from an explicit formula for a smooth solution. The results obtained provide a complete and final study of its correctness. We need them to derive a correctness criterion for a similar mixed problem for a bounded string.*

Conclusion. *For smooth solutions, a correctness criterion in the Hadamard's sense is found for a mixed problem with a characteristic first oblique derivative and time-dependent coefficients in the boundary mode.*

Key words: *the mixed problem, the non-stationary boundary condition, the characteristic oblique derivative, the smooth solution, the correctness criterion, the smoothness requirement, the matching condition.*

В настоящем исследовании установлен критерий корректности (по Адамару: существование, единственность и устойчивость решения) смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной (зависящей от времени) характеристической первой косой производной в граничном режиме. Характеристичность первой косой производной в граничном режиме означает ее направление вдоль критической характеристики уравнения. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования исходных данных (правой части уравнения, начальных данных и граничного данного) этой смешанной задачи. Он гарантирует однозначную и устойчивую везде разрешимость искомой смешанной задачи во множестве гладких решений. Данный критерий корректности для гладких решений, т.е. решений любой целой, два и более гладкости, получен обобщением новых методов впервые реализованного вывода критерия корректности этой смешанной задачи для классических решений, т.е. дважды непрерывно дифференцируемых решений, из [1]. Явные формулы гладкого решения этой характеристической смешанной задачи естественно совпадают с явными формулами ее классического решения из [1]. Весьма частному случаю характеристического граничного режима этой задачи посвящена статья [2]. Установленный критерий корректности для гладких решений потребуется нам при нахождении критерия корректности для классических решений аналогичной характеристической смешанной задачи для ограниченной струны методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [3]. Дело в том, что в случае характеристических смешанных задач для ограниченной струны с увеличением времени колебаний струны растет гладкость исходных данных таких смешанных задач и, тем самым, нужен критерий корректности для гладких решений. Этот факт подтверждает, например, теорема 2 статьи [4], в которой обоснованы достаточные требования гладкости и условия согласования, гарантирующие существование единственного и устойчивого классического решения смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных характеристических первых косых производных в граничных режимах лишь в нечетных прямоугольниках. Ранее в [5] найдены классическое решение и критерий корректности такой смешанной задачи, но с нехарактеристическими первыми косыми производными в граничных режимах. И более полный перечень литературы по истории данного вопроса приведен в [5].

Материал и методы. На множестве $\dot{G}_\infty = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ исследуется смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ a>0,\ (x,t)\in\dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x),\ x>0, \tag{2}$$

$$\left[\alpha(t)u_t(x,t)+\beta(t)u_x(x,t)+\gamma(t)u(x,t)\right]\Big|_{x=0}=\mu(t),\ t>0, \tag{3}$$

где коэффициенты $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – заданные функции переменной t, исходные данные $f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu$ – заданные функции своих переменных x и t. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным в индексах переменным. Пусть в граничном режиме (3) первая косая производная является характеристической [6], т.е. $a\alpha(t)=\beta(t),\quad \gamma(t)\neq 0$, $t\in R_+=[0,+\infty)$. Требуется найти гладкие решения $u\in C^m(G_\infty)$, $G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty),\ \ m\geq 2,$ и критерий корректности (необходимые и достаточные условия, налагаемые на исходные данные f,φ,ψ,μ) для однозначной и устойчивой везде разрешимости характеристической смешанной задачи (1)–(3). Символом $C^k(\Omega)$ мы обозначаем множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega\subset R^2$ и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ – множество всех непрерывных функций на Ω.

Определение 1. *Гладким решением смешанной задачи (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *называется функция* $u\in C^m(G_\infty),\ G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty),\ \ m\geq 2,$ *удовлетворяющая уравнению (1) на* $\dot{G}_\infty$ *в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от ее значений* $u(\dot{x},\dot{t})$ *во внутренних точках* $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{G}_\infty$ *для всех указанных граничных точек* (x,t).

Известно, что при $m=2$ оно служит определением классических решений этой задачи (1)–(3).

Определение 2. *Характеристика* $x=at$, *где коэффициент* $a>0,$ *называется критической для уравнения (1) в первой четверти плоскости* $G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ [4].

Уравнение (1) в плоскости R^2 имеет два различных семейства характеристик $x-at=C_1,$ $x+at=C_2,\ C_1,C_2\in R,\ \ R=(-\infty,+\infty).$ Первая четверть плоскости G_∞ разбивается критической характеристикой $x=at$ на два множества $G_-=\{(x,t)\in G_\infty:\ x>at>0\}$ и $G_+=\{(x,t)\in G_\infty:\ 0\leq x\leq at\}$.

Согласно статьям [1; 7] справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть в граничном режиме (3) с характеристической первой косой производной коэффициенты* $\beta,\ \ \gamma\in C^2(R_+),\ \ \gamma(t)\neq 0,\ \ t\in R_+=[0,+\infty).$ *Смешанная задача (1)–(3) имеет единственное и устойчивое классическое решение* $u\in C^2(G_\infty)$: *на множестве* G_- *решение*

$$u_-(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau,\quad (x,t)\in G_-, \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi\in C^2(R_+),\psi\in C^1(R_+),\quad f\in C(G_-),\ \int\limits_0^t f\left(x\pm a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_-), \tag{5}$$

и на множестве G_+ *решение*

$$u_+(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(|s|,\tau)dsd\tau+$$

$$+\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\left\{a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-a\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\varphi'(at-x)-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\psi(at-x)-\right.$$

$$\left.-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-x/a}f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau\right\}-\frac{1}{a}\int\limits_0^{t-x/a}\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t)\in G_+, \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi \in C^2(R_+), \psi \in C^1(R_+),\ \ \mu \in C^2(R_+), \quad f \in C(G_\infty), \ \ \int_0^t f(|x \pm a(t-\tau)|, \tau)d\tau \in C^1(G_+), \tag{7}$$

$$\Phi(\mathrm{t}) \equiv \beta(t)\varphi''(at), \quad \Psi(t) \equiv \beta(t)\psi'(at), \quad \mathfrak{F}(t) \equiv \beta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t f\left(a(t-\tau),\tau\right)d\tau\right) \in C^1(R_+) \tag{8}$$

и три условия согласования

$$S_0 \equiv \beta(0)[a\varphi'(0)+\psi(0)] + a\gamma(0)\varphi(0) = a\mu(0)\,, \tag{9}$$

$$S_1 \equiv \beta'(0)\left[a\varphi'(0)+\psi(0)\right] + \beta(0)\left[a^2\varphi''(0)+a\psi'(0)+f(0,0)\right] + a[\gamma'(0)\varphi(0)+\gamma(0)\psi(0)] = a\mu'(0), \tag{10}$$

$$S_2 \equiv \beta''(0)[a\varphi'(0)+\psi(0)] + 2\beta'(0)[a^2\varphi''(0)+a\psi'(0)+f(0,0)] +$$

$$+a^2\left[\Phi'(0)-\beta'(0)\varphi''(0)\right] + a\left[\Psi'(0)-\beta'(0)\psi'(0)\right] +$$

$$+\sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\,\partial f(0,0)/\partial\vec{v} + a\gamma''(0)\varphi(0) + 2a\gamma'(0)\psi(0) + a\gamma(0)[a^2\varphi''(0)+f(0,0)] = a\mu''(0), \tag{11}$$

где $\partial f(0,0)/\partial\vec{v}$ *– значение производной вдоль вектора* $\vec{v}=\{a,1\}$ *от функции* f *при* $x=0$ *и* $t=0.$

Отметим, что условия согласования (9)–(11) равносильны соответственно условиям согласования (4), (5), (12) из [1], умноженным на коэффициент a. Причем в (12) из [1] вместо произведения $\sqrt{a^2+1}$ на значение производной $\partial f(0,0)/\partial\vec{v}$ по вектору $\vec{v}=\{a,1\}$ в начале координат написано его значение как скалярное произведение вектора градиента от f в начале координат и неединичного вектора $\vec{\mathrm{v}}$. Относительно записи формул (6), (8)–(11) см. в конце статьи замечание 1 при $m=2$.

Нам требуется вывести аналог теоремы 1 с критерием корректности по Адамару смешанной задачи (1)–(3) для ее $m \ge 2$ раз непрерывно дифференцируемого решения $u \in C^m(G_\infty)$. Полученные результаты нужны нам для вывода критерия корректности во множестве гладких решений аналогичной характеристической смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний ограниченной струны.

Результаты и их обсуждение. Сначала выведем некоторые условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) для более гладких на единицу решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, $m \ge 2$, смешанной задачи (1)–(3). Эти условия согласования будут *необходимыми*, так как мы выведем их не из явного решения задачи, а из ее постановки и определения более гладких на единицу решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$. Ниже в теореме 2 мы увидим, что для менее гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \ge 2$, аналог последнего из них также будет необходимым условием согласования, так как оно также будет выводиться из постановки смешанной задачи и определения ее гладкого решения $u \in C^m(G_\infty)$ предельным переходом по более гладким решениям $u \in C^{m+1}(G_\infty)$.

Лемма 1. *Пусть в граничном режиме (3) с характеристической первой косой производной коэффициенты* β, $\gamma \in C^m(R_+)$, $m \ge 2$, $\gamma(t) \ne 0$, $t \in R_+ = [0,+\infty)$, *и исходные данные* $\varphi \in C^{m+1}(R_+), \psi \in C^m(R_+)$, $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\mu \in C^m(R_+)$. *Если существует гладкое решение* $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, $m \ge 2$, *смешанной задачи (1)–(3), то выполняются условия согласования (9), (10) и*

$$S_l \equiv \sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{j!(l-j)!}\left\{\beta^{(l-j)}(0)\left[aP_j'(0)+P_{j+1}(0)\right] + a\gamma^{(l-j)}(0)P_j(0)\right\} = a\mu^{(l)}(0),\ \ l=\overline{2,m}, \tag{12}$$

где функции

$$P_0(x)=\varphi(x),\ P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-2)/2} a^{2m}\left.\frac{\partial^{q-2} f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\right|_{t=0}+a^q\varphi^{(q)}(x),\ \text{если}\ q-\text{четное},\ q\ge 2,$$

$$P_1(x)=\psi(x),\quad P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-3)/2} a^{2m}\left.\frac{\partial^{q-2} f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\right|_{t=0}+a^{q-1}\psi^{(q-1)}(x),\ \text{если}\ q-\text{нечетное},\ q\ge 3, \tag{13}$$

$P_q'(0)$ – *значения первой производной по* x *от функций* P_q *при* $x=0$ *и*

$\beta^{(l-j)}(0),\ \gamma^{(l-j)}(0),\ \mu^{(l)}(0)$ – *значения соответственно производных по* t *порядков* $l-j$ *и* l *от функций* β, γ, μ *при* $t=0$.

Доказательство леммы 1. Исходя из гладкости коэффициентов $\beta(t),\ \gamma(t),$ граничного данного $\mu(t)$ и функции $u\in C^{m+1}(G_\infty)$ в предположениях леммы 1, дифференцируем l раз по t левую и правую части равенства (3) при $a\alpha(t)=\beta(t)$ для $l=\overline{0,m}$. В результате этого дифференцирования по формуле Лейбница имеем $m+1$ равенств

$$\left.\sum_{j=0}^{l} C_l^j\left(\beta^{(l-j)}(t)\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial^{j+1}u(x,t)}{\partial t^{j+1}}+\frac{\partial^{j+1}u(x,t)}{\partial t^j\partial x}\right\}+\gamma^{(l-j)}(t)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}\right)\right|_{x=0}=\mu^{(l)}(t),\ t\ge 0,\ l=\overline{0,m}, \tag{14}$$

где биномиальные коэффициенты $C_l^j=l!/\,j!(l-j)!$ – число сочетаний из l по j элементов.

Докажем, что значения производных $\partial^j u/\partial t^j$ при четных $j=2k,\ k=\overline{0,[l/2]},$ равняются

$$\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial t^{2k}}=\sum_{i=0}^{k-1}a^{2i}\frac{\partial^{2k-2}f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-2-2i}}+a^{2k}\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial x^{2k}},\quad (x,t)\in G_\infty. \tag{15}$$

Здесь квадратные скобки $[p]$ числа p обозначают его целую часть.

Для обоснования этих равенств применим метод математической индукции. При $k=0$ получаем очевидное тождество $u(x,t)=u(x,t)$ на G_∞, а при $k=1$ имеем уравнение колебаний струны (1). Пусть равенства (15) верны при $j=2k$ и убедимся в их справедливости при $j=2(k+1)$.

Дифференцируем дважды по t равенства (15) и получаем

$$\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial t^{2k+2}}=\sum_{i=0}^{k-1}a^{2i}\frac{\partial^{2k} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-2i}}+a^{2k}\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial x^{2k}\partial t^2},\quad (x,t)\in G_\infty. \tag{16}$$

Используя уравнение колебаний струны (1) в последнем слагаемом этого равенства (16), находим

$$\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial t^{2k+2}}=\sum_{i=0}^{k}a^{2i}\frac{\partial^{2k} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-2i}}+a^{2k+2}\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial x^{2k+2}},\quad (x,t)\in G_\infty,$$

что подтверждает справедливость равенств (15) при $j=2(k+1)$.

Для значений производных $\partial^j u/\partial t^j$ нечетных порядков $j=2k+1,\ k=\overline{0,[l/2]},$ точно также методом математической индукции выводятся равенства

$$\frac{\partial^{2k+1}u(x,t)}{\partial t^{2k+1}}=\sum_{i=0}^{k-1}a^{2i}\frac{\partial^{2k-1}f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-1-2i}}+a^{2k}\frac{\partial^{2k+1}u(x,t)}{\partial x^{2k}\partial t},\quad (x,t)\in G_\infty. \tag{17}$$

Принимая во внимание начальные условия (2) и сделав замену $q = 2k,$ из равенств (15) и (17) получаем для значений производных равенства

$$\left.\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial t^q}\right|_{t=0} = P_q(x) \tag{18}$$

соответственно для четных $q \geq 0$ и нечетных $q \geq 1$ значений функций $P_q(x)$ из (13). Эти равенства (18) для четных $q \geq 0$ мы дифференцируем один раз по x и в силу перестановочности производной по x и следа при $t = 0$ имеем равенства

$$\left.\frac{\partial^q u_x(x,t)}{\partial t^q}\right|_{t=0} = P_q'(x), \ q = 0, 2, 4, ..., 2k. \tag{19}$$

В равенствах (14) полагаем $t = 0,$ применяем полученные формулы (18) и (19) при $x = 0$ и приходим к условиям согласования (9), (10) и (12) для $l \geq 2.$ Лемма 1 доказана.

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$f \in C^{m-2}(G_\infty), \ \varphi \in C^m(R_+), \ \psi \in C^{m-1}(R_+), \ \mu \in C^{m-1}(R_+), \ m \geq 2, \tag{20}$$

где $R_+ = [0, \infty).$ Ниже мы укажем дополнительные требования гладкости на исходные данные $\varphi, \psi, f, \mu,$ которые для большинства из них окажутся менее жесткими, чем указаны в лемме 1.

Преобразуем условие согласования (12) при $l = m$ из леммы 1:

$$\begin{gathered} S_m \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!} \left\{ \beta^{(m-j)}(0)\left[aP_j'(0) + P_{j+1}(0)\right] + a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0) \right\} + \\ +\beta(0)\left[aP_m'(0) + P_{m+1}(0)\right] + a\gamma(0)P_m(0) = a\mu^{(m)}(0), \ m \geq 2. \end{gathered} \tag{21}$$

Если m – четное или нечетное, то ввиду (13) функция $\beta(0)\left[aP_m'(x) + P_{m+1}(x)\right]$ соответственно равна

$$\beta(0)\left[\sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i+1} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i+1}\partial t^{m-2-2i}}\right|_{t=0} + a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{m-1-2i}}\right|_{t=0} + a^m\psi^{(m)}(x)\right], \ m \geq 2, \tag{22}$$

$$\beta(0)\left[\sum_{i=0}^{(m-3)/2} a^{2i+1} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i+1}\partial t^{m-2-2i}}\right|_{t=0} + a^m\psi^{(m)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-1)/2} a^{2i} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{m-1-2i}}\right|_{t=0} + a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(x)\right], \ m \geq 3. \tag{23}$$

Непосредственным сравнением слагаемых убеждаемся в совпадении всех частных производных от f соответственно в суммах (22) и (23) с одной и той же суммой

$$K_m(x) \equiv \beta(0)\sum_{j=0}^{m-1} a^j \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^j \partial t^{m-1-j}}\right|_{t=0}, \quad m \geq 2, \tag{24}$$

для четных и нечетных $m \geq 2.$ Справедливость этих равенств вытекает из деления максимально возможного индекса суммирования на 2 в (22) и (23), удвоения в них индекса суммирования i и одинакового количества слагаемых m.

Можно заметить, что для более гладких на единицу исходных данных φ и ψ, чем в требованиях (5) и (20), аналогично сумме (14) в суммах (12) и (13) для четных и нечетных m также совпадают слагаемые с производными от начальных данных φ и ψ:

$$a^m[a\beta(0)\varphi^{(m+1)}(x)\ +\beta(0)\,\psi^{(m)}(x)],\ \ x\ge 0,\ \ m\ge 2. \tag{25}$$

Итак, в лемме 1 все частные производные от $f\in C^{m-1}(G_\infty)$ в суммах (22) и (23) равны сумме (24).

В настоящей работе нашей модификацией известного метода характеристик из [8] доказывается

Теорема 2. *Пусть в граничном режиме (3) с характеристической первой косой производной коэффициенты* $\beta,\ \gamma\in C^m(R_+),\ m\ge 2,\ t\in R_+=[0,+\infty)$. *Смешанная задача (1)–(3) в* $\dot G_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* f,φ,ψ,μ *гладкое решение* $u\in C^m(G_\infty),\ m\ge 2,$ *тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (20),* $\mu\in C^m(R_+)$,

$$F_p\left(x,t\right)\equiv\int_0^t f\left(\left|x+(-1)^p a\left(t-\tau\right)\right|,\tau\right)d\tau\in C^{m-1}\left(G_\infty\right),\ \ p=1,2, \tag{26}$$

$$\Phi_m(t)\equiv\beta(t)\varphi^{(m)}(at),\ \ \Psi_{m-1}(t)\equiv\beta(t)\psi^{(m-1)}(at)\in C^1(R_+),$$

$$\mathfrak{F}_{m-1}(t)\equiv\beta(t)\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\left(\int_0^t f\left(a(t-\tau),\tau\right)d\tau\right)\right]\in C^1(R_+) \tag{27}$$

и условия согласования (9), (10), (12) при $l=\overline{0,m-1},\ \ m\ge 2,$ *и*

$$S_m\equiv\sum_{j=0}^{m-1}\frac{m!}{j!\,(m-j)!}\left\{\beta^{(m-j)}(0)\left[aP_j'(0)+P_{j+1}(0)\right]+a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0)\right\}+K_m(0)\ +$$

$$+a^m\left[(\Phi_m)'(0)-\beta'(0)\varphi^{(m)}(0)\right]+a^{m-1}\left[(\Psi_{m-1})'(0)-\beta'(0)\psi^{(m-1)}(0)\right]+a\gamma(0)P_m(0)=a\,\mu^{(m)}(0), \tag{28}$$

из которого критериальное значение $K_m(0)$ *указано в доказательстве теоремы 2.*

Этим гладким решением смешанной задачи (1)–(3) на $\dot G_\infty$ *является функция (4) в* G_- *и (6) в* G_+.

Доказательство. Достаточность на G_-. Гладкое решение смешанной задачи (1)–(3) на множестве $\dot G_\infty$ совпадает на множестве G_- с решением задачи Коши (1), (2), которое единственно и выражается уже известной обобщенной формулой Эйлера–Даламбера (4) из теоремы 1. Убедимся в достаточности требований гладкости (20), (26) для того, чтобы функция $u_-\in C^m(G_-)$. Действительно, гладкость начальных данных $\varphi\in C^m(R_+),\ \psi\in C^{m-1}(R_+)$ из (20) обеспечивает m раз непрерывную дифференцируемость первых двух слагаемых в формуле (4). Благодаря гладкости (26) m раз непрерывная дифференцируемость на G_- последнего слагаемого формулы (4), которое мы обозначим символом $F_0(x,t)$, вытекает из следующих равенств и включений

$$\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2a}\left[F_2(x,t)-F_1(x,t)\right]\in C^{m-1}(G_-),\ \ \frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[F_2(x,t)+F_1(x,t)\right]\in C^{m-1}(G_-), \tag{29}$$

где функции $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$ в (26) являются производными соответственно вдоль характеристик $x+at=C_2$ и $x-at=C_1$ от этого частного решения $F_0(x,t)$ неоднородного уравнения (1) [9].

При любом $T>0$ непосредственно из формулы (4) легко выводится непрерывная зависимость (устойчивость по правой части и начальным данным) решения u_- в банаховом пространстве $C^m(G_T^-)$ от исходных данных $\varphi,\ \psi,\ f$ в декартовом произведении банаховых пространств $C^m(R_+)\times C^{m-1}(R_+)\times$ $\times\hat{C}^{m-1}(G_T^-)$, где $G_T^-=G_T\bigcap G_-$, $G_T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x<+\infty,\ 0\le t\le T\}$, соответственно с нормами

$$\|u\|_{C^m(G_T^-)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\sum_{0\le i+j\le m}\left|\partial_x^i\partial_t^j u(x,t)\right|,\ \partial_x^i\partial_t^j=\frac{\partial^{i+j}}{\partial_x^i\partial_t^j},$$

$$\|\varphi\|_{C^m(R_+)}=\sup_{0\le x<+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|,\ \ \|\psi\|_{C^{m-1}(R_+)}=\sup_{0\le x<+\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\psi^{(k)}(x)\right|,$$

$$\|f\|_{\hat{C}^{m-1}(G_T^-)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\left(\sum_{0\le i+j\le m-2}\left|\partial_x^i\partial_t^j f(x,t)\right|+\sum_{p=0}^{1}\sum_{0\le i+j\le m-1}\left|\partial_x^i\partial_t^j F_p(x,t)\right|\right).$$

Необходимость на G_-. Необходимость требований гладкости на f,φ,ψ из (20) установлена выше до формулировки теоремы 2. Методом корректировки так же, как в теоремах 1–3 работы [9], доказывается гладкость частного решения $F_0(x,t)\in C^m(G_\infty)$ уравнения (1). Поэтому необходимость гладкости функций $F_p(x,t),\ p=1,2,$ в (26) вытекает из производных вдоль характеристик от $F_0(x,t)$:

$$F_1(x,t)=\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}-a\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}\in C^{m-1}(G_\infty),\quad F_2(x,t)=\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}\in C^{m-1}(G_\infty).\tag{30}$$

Достаточность на G_+. Гладким решением смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_+ является выражение (6) из теоремы 1, как решение задачи Пикара для уравнения (1) на G_+ с равенством $u_+(x,t)=u_-(x,t)$ на характеристике $x=at$ и с граничным режимом (3). Покажем достаточность предположений теоремы 2 для того, чтобы в (6) функция $u_+\in C^m(G_+)$. Такая гладкость первых двух слагаемых в (6) обеспечивается гладкостью начальных данных $\varphi\in C^m(R_+),\ \psi\in C^{m-1}(R_+)$ из (20). Гладкость $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ из (20) гарантирует непрерывность частных производных до порядка $m-1$ включительно от $F_0(x,t)$ на G_+. Поэтому в (6) непрерывность частных производных порядка m от третьего слагаемого $F_0(x,t)$ на G_+ вытекает из равенств вида (29) в силу предположений гладкости (26) на $F_p(x,t),\ p=1,2.$ Непрерывность частных производных до порядка m включительно на G_+ от всех оставшихся слагаемых, кроме последнего, в формуле (6) вытекает из гладкости $\mu\in C^m(R_+)$, интегральных требований гладкости (26) при $x=0$ и гладкости (27) благодаря гладкости коэффициентов $\beta,\gamma\in C^m(R_+)$ и тому, что $\gamma(t)\ne 0,\ t\in R_+$. В частности, для $\beta\in C^m(R_+)$ и $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ непрерывность частных производных до порядка m включительно на G_+ от произведения

$$\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_0^{t-x/a}f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau=\beta\left(\tilde{t}\right)\int_0^{\tilde{t}}f\left(a(\tilde{t}-\tau),\tau\right)d\tau,\quad \tilde{t}=t-\frac{x}{a},$$

следует из требования гладкости (27), линейности замены $\tilde{t}=t-x/a$ и требований (26) при $x=0$. В (6) для m раз непрерывной дифференцируемости на G_+ последнего слагаемого вида двойного повторного интеграла $F^{(0)}$ достаточно гладкости $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ и интегральной гладкости (26) при $x=0$:

$$\frac{\partial F^{(0)}(x,t)}{\partial t}=-a\frac{\partial F^{(0)}(x,t)}{\partial x}=a\int_0^{t-x/a}f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau=a\int_0^{\tilde{t}}f\left(a(\tilde{t}-\tau),\tau\right)d\tau\in C^{m-1}(G_+),\ \ \tilde{t}=t-\frac{x}{a}.$$

Можно показать, что этот интеграл $F^{(0)}$ является гладким решением однородного уравнения (1).

Н е о б х о д и м о с т ь н а G_+, вообще говоря, доказывается так же, как в [1].

Необходимость гладкости функций $F_p(x,t),\ p=1,2,$ на G_∞ и, в частности, на G_+ из (26) вытекает выше из равенств и включений (30) и того, что $F_0(x,t)\in C^m(G_\infty)$ [9].

Необходимость m условий согласования (9), (10) и (12) при $l=\overline{0,m-1}$ граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) установлена нами в лемме 1 перед формулировкой теоремы 2. Обоснуем необходимость требования гладкости $\mu\in C^m(R_+)$ из теоремы 2 вместо $\mu\in C^{m-1}(R_+)$ из необходимых требований гладкости (20), необходимость требований гладкости (27) на начальные данные φ,ψ и необходимость условия согласования (28) вместо условия согласования (12) при $l=m$ из леммы 1.

Нам известен общий интеграл гладких решений уравнения (1) из [1]:

$$u(x,t)=g(x+at)+h(x-at)+F_0(x,t),\quad F_0(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(|s|,\tau)dsd\tau, \tag{31}$$

где g,h – любые m раз непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и $F_0(x,t)\in C^m(G_\infty)$ – частное гладкое решение неоднородного уравнения (1). Согласно определению 1 гладкие решения (31) должны сохранять свою гладкость при подстановке как в уравнение (1), так и в граничный режим (3) и, в частности, при функциях $g=0,\ \ f=0$ и любой $h\in C^m\left(R_+\right)$. Поэтому гладкие решения $u_1\left(x,t\right)=h\left(x-at\right)$ однородного уравнения (1) должны сохранять свою гладкость при подстановке в характеристический граничный режим (3) [1]:

$$\left[-a\alpha(t)h'(x-at)+\beta(t)h'(x-at)+\gamma(t)h(x-at)\right]\Big|_{x=0}=\gamma(t)h(-at)=\mu(t).$$

Отсюда заключаем, что граничное данное $\mu\in C^m(R_+),$ потому что функции $\gamma,h\in C^m\left(R_+\right)$.

Подставив в (3) гладкие решения $u_2(x,t)=\varphi(x+at),$ которые получаются из (31) при $g=\varphi,\ \ h=0,$ $f=0,$ так как $\varphi\in C^m(R_+)$ согласно необходимым условиям (20), мы приходим к равенствам [1]:

$$a\alpha(t)\varphi'(at)+\beta(t)\varphi'(at)+\gamma(t)\varphi(at)=2\beta(t)\varphi'(at)+\gamma(t)\varphi(at)=\mu(t),\,t\ge 0.$$

Тогда $\beta(t)\varphi'(at)=\left[\mu(t)-\gamma(t)\varphi(at)\right]/\,2\in C^m\left(R_+\right)$, так как коэффициент $\gamma\in C^m(R_+)$ и уже доказана необходимость гладкости данных $\varphi,\,\mu\in C^m(R_+)$. На основании формулы Лейбница производной порядка m от произведения функций $\beta(t)\varphi'(at)$ отсюда следует первое включение $\Phi_m(t)\in C^1(R_+)$ из (27), так как коэффициент $\beta\in C^m(R_+)$ и уже показана необходимость гладкости граничного данного $\mu\in C^m(R_+)$.

В общем интеграле (31) полагаем $g(y)=\int\limits_0^y\psi(s)ds$, $h\left(z\right)=\int\limits_z^0\psi(s)ds$, $f=0$ и в силу необходимости $\psi\in C^{m-1}(R_+)$ из (20) имеем гладкие решения $u_3\left(x,t\right)=\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi\left(s\right)ds\in C^m(G_+)$ однородного уравнения (1) из [1]. Подставляя их в характеристический граничный режим (3), приходим к равенствам:

$$\left\{a\alpha(t)\left[\psi(x+at)-\psi(at-x)\right]+\beta(t)\left[\psi(x+at)+\psi(at-x)\right]+\gamma(t)\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds\right\}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=2\beta(t)\psi(at)=\mu(t)\in C^m\left(R_+\right).$$

На основании формулы Лейбница производной порядка m от произведения функций $\beta(t)\psi(at)$ отсюда следует второе включение $\Psi_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ из (27), потому что $\beta\in C^m(R_+)$ и уже необходимо $\mu\in C^m(R_+)$.

Подставляя из (31) при $g=h=0$ частное гладкое решение $u_2(x,t)=F_0(x,t)\in C^m\left(G_\infty\right)$ неоднородного уравнения (1) в граничный режим (3) и используя снова равенство $a\alpha(t)=\beta(t), t\in[0,\infty)$, имеем [1]:

$$\left[\alpha(t)\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}+\beta(t)\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}+\gamma(t)F_0(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{2a}\Big\{a\alpha(t)\left[F_2\,(0,t)+F_1\,(0,t)\right]+$$

$$+\beta(t)\left[F_2\,(0,t)-F_1\,(0,t)\right]\Big\}+\gamma(t)F_0(0,t)=\left(\beta(t)/a\right)F_2\,(0,t)+\gamma(t)F_0(0,t)=\mu(t).$$

Это указывает на то, что $\beta(t)\left(\partial^{m-1}F_2\,(0,t)/\partial t^{m-1}\right)\in C^1(R_+)$, так как коэффициенты $\beta,\ \gamma\in C^m(R_+)$ и необходима гладкость функций $\mu,\ F_0(0,t)\in C^m(R_+)$, т.е. на необходимость гладкости $\mathfrak{F}_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ в (27).

Определение 3 [10]. *Критериальным значением* суммы *старших частных производных порядка* $m-1$ *от правой части* f *уравнения (1) для целых* $m\geq 2$ *называется конечное значение* $K_m(0)$ *функции (24) при* $f(x,t)=f_0(x,t)$ и $x=0$ *для пределов*

$$f_0(x,t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty),\quad f_n(x,t)\in C^m(G_\infty),$$

которые сходятся по норме из (33) банахова пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ *к функциям* $f_0(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty)$, *удовлетворяющим требованиям гладкости* $F_p(x,t)\in C^{m-1}(G_\infty),\quad p=1,2,$ *из (26) и требованию гладкости* $\mathfrak{F}_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ *из (27).*

Покажем необходимость существования конечного критериального значения $K_m(0)$ старших производных порядка $m-1$ от правой части f уравнения (1) в определении 3. Для любой более гладкой функции $f\in C^m(G_\infty)$ при $t\geq 0$ первая производная $\mathfrak{F}'_{m-1}(t)$ равна сумме двух слагаемых

$$\beta^{(i)}(t)\frac{\partial^{m-i}}{\partial t^{m-i}}\left(\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)\,d\tau\right)=\beta^{(i)}(t)\left[\sum_{j=0}^{m-i-1}a^j\,\frac{\partial^{m-i-1}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-i-1-j}}\Bigg|_{x=0}+a^{m-i}\int_0^t\frac{\partial^{m-i}f(x,\tau)}{\partial x^{m-i}}\Bigg|_{x=a(t-\tau)}d\tau\right],\ i=0,1.$$

Из этих двух тождеств, в частности, при $t=0$ мы имеем равенство

$$\mathfrak{F}'_{m-1}(0)-\beta'(0)\sum_{j=0}^{m-2}a^j\,\frac{\partial^{m-2}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-2-j}}\Bigg|_{x=0}\Bigg|_{t=0}=\beta(0)\sum_{j=0}^{m-1}a^j\,\frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-1-j}}\Bigg|_{x=0}\Bigg|_{t=0}=K_m(0)\in R,\tag{32}$$

которое предельным переходом по f в указанной ниже норме пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ из (33) распространяется с функций $f\in C^m(G_\infty)$ на все функции $f\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие интегральным требованиям гладкости (26), (27).

Поэтому сначала в необходимом (по способу вывода) равенстве (12) при $l=m$ из леммы 1 для данных φ,ψ с необходимой гладкостью из (20), $\mu\in C^m(R_+)$ и более гладкой правой части $f\in C^m(G_\infty)$ мы используем обоснованную необходимость гладкости $\Phi_m(t),\ \Psi_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ из (27). Затем распространяем полученное равенство вида (12) предельным переходом по f в норме (33) пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ с функций $f\in C^m(G_\infty)$ на функции $f\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие интегральным требованиям гладкости (26), и в силу необходимости существования конечного предела (32), благодаря установленной выше необходимости требования $\mathfrak{F}_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ в (27), имеем необходимое условие согласования (28).

Из формулы (6) при любом $T>0$ легко выводится непрерывная зависимость найденного решения u_+ в банаховом пространстве $C^m(G_T^+)$ от исходных данных $\varphi,\ \psi,\ \mu,\ f$ в декартовом произведении банаховых пространств $\hat{C}^m[0,X_a]\times \hat{C}^{m-1}[0,X_a]\times C^m[0,T]\times \hat{C}^{m-2}(G^T)$, в которых множества $G_T^+=G^T\bigcap G_+$, $G^T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x+at\le X_a,\ 0\le t\le T\}$ и постоянная $X_a=2aT,$ соответственно с нормами:

$$\|u\|_{C^m(G_T^+)}=\max_{(x,t)\in G_T^+}\sum_{0\le i+j\le m}\left|\partial_x^i\partial_t^j u(x,t)\right|,\ \ \|\varphi\|_{\hat{C}^m[0,X_a]}=\max_{0\le x\le X_a}\sum_{k=0}^{m}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|+\max_{0\le t\le T}\left(\left|(\Phi_m)'(t)\right|+\left|\Phi_m(t)\right|\right),$$

$$\|\psi\|_{\hat{C}^{m-1}[0,X_a]}=\max_{0\le x\le X_a}\sum_{k=1}^{m-1}\left|\psi^{(k)}(x)\right|+\max_{0\le t\le T}\left(\left|(\Psi_{m-1})'(t)\right|+\left|\Psi_{m-1}(t)\right|\right),\ \ \|\mu\|_{C^m[0,T]}=\max_{0\le t\le T}\left(\sum_{k=0}^{m}\left|\mu^{(k)}(x)\right|\right),$$

$$\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+-u_-]\right)\|f\|_{\hat{C}^{m-2}(G^T)}=\max_{(x,t)\in G^T}\left(\sum_{0\le i+j\le m-2}\left|\partial_x^i\partial_t^j f(x,t)\right|+\sum_{p=0}^{1}\sum_{0\le i+j\le m-1}\left|\partial_x^i\partial_t^j F_p(x,t)\right|\right)+$$

$$+\max_{0\le t\le T}\left(\left|(\mathfrak{F}_{m-1})'(t)\right|+\left|\mathfrak{F}_{m-1}(t)\right|\right).\qquad(33)$$

Функции u_+ и u_- должны быть m раз непрерывно дифференцируемыми, как соответственно на G_+ и замыкании $\overline{G_-}$ множества G_-, так и на общей характеристике $x=at.$ Необходимость этого факта следует из нашего определения 1 гладкого решения $u\in C^m(G_\infty)$. Необходимость условий согласования (9), (10), (12) при $l=\overline{0,m-1}$ и (28) при $l=m$ обоснована нами выше, с использованием постановки задачи. Убедимся в их достаточности, т.е. в том, что m раз непрерывная дифференцируемость функций u_+ и u_- на характеристике $x=at$ обеспечивается условиями согласования (9), (10), (12) при $l=\overline{0,m-1}$ и (28) при $l=m,$ с использованием явных формул (4) и (6) решения, гладкого уже в G_+ и G_-.

Лемма 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 2. Разность функций u_+, u_- и разность их всех частных производных до порядка m включительно на характеристике $x=at$ равна*

$$\left.\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+-u_-]\right)\right|_{x=at}=\frac{(-1)^k}{a^{k+l}}\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}(0)\left[a\mu^{(k+l-i)}(0)-S_{k+l-i}\right],\qquad(34)$$

$$0\le i+j\le m,\ m\ge 2.$$

где вспомогательной функцией является $g(t)=1/\gamma(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость равенств (34) при $m=0,1,2$ обоснована в лемме 1, с учетом совпадения частных производных от f в суммах (22) для четных $m\ge 2$ и в (23) для нечетных $m\ge 3$ с суммой равенства (24) и также совпадения слагаемых в суммах (22) и (23) с производными от начальных данных φ и ψ для четных и нечетных $m\ge 2$ с суммой (25).

Докажем равенства (34) при $m=3,4,...,m-1$. Их справедливость вытекает из непосредственного вычисления частных производных этих порядков от разности решений

$$u_+(x,t)-u_-(x,t)=\frac{-\varphi(at-x)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_{at-x}^{x-at}\psi(s)ds+\int_0^{t-x/a}\int_{x-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)-x}f(s,\tau)dsd\tau\right)+$$

$$+\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\left(a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-a\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\varphi'(at-x)-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\psi(at-x)\right)-$$

$$-\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_0^{t-x/a} f(a(t-\tau)-x,\tau)d\tau-\frac{1}{a}\int_0^{t-x/a}\int_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau.$$

После вычисления частных производных высших порядков получаем

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+(x,t)-u_-(x,t)]=-\frac{1}{2}a^l\left[(-1)^k\varphi^{(k+l)}(at-x)+(-1)^l\varphi^{(k+l)}(x-at)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}a^{l-1}\left[(-1)^{k+1}\psi^{(k+l-1)}(at-x)+(-1)^l\psi^{(k+l-1)}(x-at)\right]+$$
$$+\frac{1}{2a}\left\langle(-1)^{k+1}a^{-k}\left[\sum_{i=0}^{k+l-2}a^{k+l-i-1}f^{(k+l-i-2,i)}(0,t-x/a)+a^{k+l}\int_0^{t-\frac{x}{a}}f^{(k+l-1,0)}\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)\mathrm{d}\tau\right]+\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i a^{-i}f^{(k-i-1,i+l-1)}(0,t-x/a)+\sum_{i=0}^{l-2}(-1)^{i+1}a^{i+1}f^{(i+k,l-i-2)}(0,t-x/a)+$$
$$\left.+(-1)^l a^l\int_o^t f^{(k+l-1,0)}(-at+a\tau+x,\tau)\mathrm{d}\tau+(-1)^{l+1}a^l\int_{t-x/a}^t f^{(k+l-1,0)}(-at+a\tau+x,\tau)\mathrm{d}\tau\right\rangle+$$
$$+(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}(t-x/a)\left\{\mu^{(k+l-i)}(t-x/a)-\right.$$
$$-\sum_{j=0}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\beta^{(k+l-i-j)}(t-x/a)\left[a^{j-1}\left(a\varphi^{(j+1)}(at-x)+\psi^{(j)}(at-x)\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{r=0}^{j-1}a^{j-r-2}f^{(j-r-1,r)}(0,t-x/a)+a^{j-1}\int_0^{t-x/a}f^{(j,0)}\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)\mathrm{d}\tau\right]\right\}.$$

Рассмотрим значения этих частных производных разности на характеристике $x=at$:

$$\left.\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+(x,t)-u_-(x,t)]\right|_{x=at}=\frac{(-1)^{k+1}+(-1)^{l+1}}{2}a^l\varphi^{(k+l)}(0)+$$
$$+\frac{(-1)^{k+1}+(-1)^l}{2}a^{l-1}\psi^{(k+l-1)}(0)-\frac{1}{2a}\left\langle(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}a^{k+l-i-1}f^{(k+l-i-2,i)}(0,0)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{k-1}(-a)^{-i}f^{(k-i-1,l+i-1)}(0,0)-\sum_{i=0}^{l-2}(-a)^{i+1}f^{(i+k,l-i-2)}(0,0)\right\rangle+$$
$$+(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}(0)\left\{\mu^{(k+l-i)}(0)-\sum_{j=0}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\beta^{(k+l-i-j)}(0)\left[a^{j-1}\left(a\varphi^{(j+1)}(0)+\psi^{(j)}(0)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{r=0}^{j-1}a^{j-r-2}f^{(j-r-1,r)}(0,0)\right]\right\},\ 3\le k+l\le 4,\dots,m-1. \tag{35}$$

Суммы вида $\sum_{i=i_1}^{i_2}p(i)$, где $i_2<i_1$ принимаем равными 0. Для преобразования выражения (35) нам понадобятся следующие формулы. Заменой индекса суммирования $s=j-r-1$ находим равенства

$$\sum_{r=0}^{j-1}a^{j-r-2}f^{(j-r-1;r)}(0,0)=\sum_{s=0}^{j-1}a^{s-1}f^{(s;j-s-1)}(0,0),\ j\ge 1. \tag{36}$$

Если из трех нижеприведенных сумм в (35) две последние записать через одну, а затем объединить с третьей, то выражение существенно упрощается:

$$\left(-a\right)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}a^{k+l-i-1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)-\sum_{i=0}^{l-2}(-a)^{i+1}f^{(k+i;l-i-2)}(0,0)-$$
$$-\sum_{i=0}^{k-1}\left(-a\right)^{-i}f^{(k-i-1;l+i-1)}(0,0)=(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}(a^{i+1}-(-a)^{i+1})f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)=$$
$$=(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}(1-(-1)^{i+1})a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0). \qquad (37)$$

Если формулы частных производных (22) и (23) объединить в одну, то получим

$$S_\nu\equiv\left\langle\beta^{(\nu)}(0)\left[\psi(0)+a\varphi'(0)\right]+a\gamma^{(\nu)}(0)\varphi(0)\right\rangle+$$
$$+\nu\left\{\beta^{(\nu-1)}(0)\left\langle a\left[\psi'(0)+a\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+a\gamma^{(\nu-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$
$$+\sum_{i=2}^{\nu}C_\nu^i\left\{\beta^{(\nu-i)}(0)\left\langle a^i\left[\psi^{(i)}(0)+a\varphi^{(i+1)}(0)\right]+\sum_{j=0}^{i-1}a^j f^{(j;i-j-1)}(0,0)\right\rangle+\right.$$
$$+a\gamma^{(\nu-i)}(0)\left\langle a^{i-1}\frac{1-(-1)^{i-1}}{2}\left[\psi^{(i-1)}(0)+a\varphi^{(i)}(0)\right]+\sum_{k=0}^{i-2}a^k\frac{1-(-1)^{k+1}}{2}f^{(k;i-k-2)}(0,0)+\right.$$
$$\left.\left.+(-a)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right\rangle\right\}=a\mu^{(\nu)}(0),\ \ \nu=0,1,\ldots,m-1, \qquad (38)$$
$$S_m\equiv\left\langle\beta^{(m)}(0)\left[\psi(0)+a\varphi'(0)\right]+a\gamma^{(m)}(0)\varphi(0)\right\rangle+$$
$$+m\left\{\beta^{(m-1)}(0)\left\langle a\left[\psi'(0)+a\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+a\gamma^{(m-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$
$$+\sum_{i=2}^{m}C_m^i\left\{\beta^{(m-i)}(0)\left\langle a^i\left[\psi^{(i)}(0)+a\varphi^{(i+1)}(0)\right]+K_m(0)\right\rangle+\right.$$
$$+a\gamma^{(m-i)}(0)\left\langle a^{i-1}\frac{1-(-1)^{i-1}}{2}\left[\psi^{(i-1)}(0)+a\varphi^{(i)}(0)\right]+\sum_{k=0}^{i-2}a^k\frac{1-(-1)^{k+1}}{2}f^{(k;i-k-2)}(0,0)+\right.$$
$$\left.\left.+(-a)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right\rangle\right\}=a\mu^{(m)}(0).$$

Теперь к разностям (34) прибавляем и отнимаем значения величин S_{k+l-i} для $\nu=3,4,\ldots,m-1$ из (38) и применяем формулы (36), (37)

$$\frac{(-1)^k}{a^{k+1}}\left\{\frac{-1+\left(-1\right)^{k+l+1}}{2}a^{k+l+1}\varphi^{(k+l)}\left(0\right)+\frac{-1+\left(-1\right)^{k+l}}{2}a^{k+l}\psi^{(k+l-1)}\left(0\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k+l-2}(1-(-1)^{i+1})a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)+\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}\left(0\right)\left\{a\mu^{(k+l-i)}\left(0\right)-S_{k+l-i}\right\}+\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}\left(0\right)\left[S_{k+l-i}-\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{j=0}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\beta^{(k+l-i-j)}\left(0\right)\left\langle a^j\left(a\varphi^{(j+1)}\left(0\right)+\psi^{(j)}\left(0\right)\right)+\sum_{s=0}^{j-1}a^s f^{(s;j-s-1)}(0,0)\right\rangle\right]\right\}, \qquad (39)$$

где

$$S_{k+l-i}=\left\langle\beta^{(k+l-i)}(0)\left[\psi(0)+a\varphi'(0)\right]+a\gamma^{(k+l-i)}(0)\varphi(0)\right\rangle+$$
$$+(k+l-i)\left\{\beta^{(k+l-i-1)}(0)\left\langle a\left[\psi'(0)+a\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+a\gamma^{(k+l-i-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$
$$+\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\left\{\beta^{(k+l-i-j)}(0)\left\langle a^j\left[\psi^{(j)}(0)+a\varphi^{(j+1)}(0)\right]+\sum_{s=0}^{j-1}a^s f^{(s;j-s-1)}(0,0)\right\rangle+\right.$$
$$+a\gamma^{(k+l-i-j)}(0)\left\langle a^{j-1}\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}\left[\psi^{(j-1)}(0)+a\varphi^{(j)}(0)\right]+\sum_{r=0}^{j-2}a^r\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}f^{(r;j-r-2)}(0,0)+\right.$$
$$\left.\left.+(-a)^{j-1}\psi^{(j-1)}(0)\right\rangle\right\}.$$

Одинаковые слагаемые в (38) и (39) сразу сокращаются и получаем следующие выражения:

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\left\{a\mu^{(k+l-i)}(0)-S_{k+l-i}\right\}+$$
$$+\frac{-1+(-1)^{l-k+1}}{2}a^{k+l+1}\varphi^{(k+l)}(0)+\frac{-1+(-1)^{l}}{2}a^{k+l}\psi^{(k+l-1)}(0)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k+l-2}(1-(-1)^{i+1})a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)+$$
$$+\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\Big[a\gamma^{(k+l-i)}(0)\varphi(0)+(k+l-i)\,a\gamma^{(k+l-i-1)}(0)\psi(0)+\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^{j}\gamma^{(k+l-i-j)}(0)\times$$
$$\times\left\langle a^{j}\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}\left(\psi^{(j-1)}(0)+a\varphi^{(j)}(0)\right)+\sum_{r=0}^{j-2}a^{r+1}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}f^{(r;j-r-2)}(0,0)+(-a)^{j-1}a\psi^{(j-1)}(0)\right\rangle\Big].$$

Наконец, докажем, что оставшиеся слагаемые также обращаются в нуль. Ввиду формулы Лейбница производных от произведения двух функций, равного единице, верны очевидные равенства

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i)}(0)\varphi(0)=(g(t)\gamma(t))^{(k+l)}\Big|_{t=0}=\left(\gamma(t)\frac{1}{\gamma(t)}\right)^{(k+l)}\Bigg|_{t=0}=0,$$
$$\sum_{i=0}^{k+l}(k+l-i)\,C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i-1)}(0)\psi(0)=(k+l)\sum_{i=0}^{k+l-1}C_{k+l-1}^{i}g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i-1)}(0)=$$
$$=(k+l)(g(t)\gamma(t))^{(k+l-1)}\Big|_{t=0}=0.$$

Перегруппируя слагаемые, также приходим к равенствам

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^{j}\gamma^{(k+l-i-j)}(0)\sum_{r=0}^{j-2}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}a^{r+1}f^{(r;j-r-2)}(0,0)-\sum_{i=0}^{k+l-2}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)=$$
$$=\sum_{j=2}^{k+l}C_{k+l}^{j}\sum_{r=0}^{j-2}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}a^{r+1}f^{(r;j-r-2)}(0,0)\sum_{i=0}^{k+l-j}C_{k+l-j}^{i}g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-j-i)}(0)-\sum_{i=0}^{k+l-2}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)=$$
$$=\sum_{j=2}^{k+l-1}C_{k+l}^{j}\sum_{r=0}^{j-2}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}a^{r}f^{(r;j-r-2)}(0,0)(g(t)\gamma(t))^{(k+l-j)}\Big|_{t=0}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k+l-2}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)(g(t)\gamma(t)-1)=0.$$

Учитывая справедливость следующей формулы

$$a^{j}\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}\left(\psi^{(j-1)}(0)+a\varphi^{(j)}(0)\right)-(-a)^{j}\psi^{(j-1)}(0)=a^{j}\left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}\psi^{(j-1)}(0)+\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}a\varphi^{(j)}(0)\right),$$

получаем равенства

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^{j}\gamma^{(k+l-i-j)}(0)a^{j}\left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}\psi^{(j-1)}(0)+\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}a\varphi^{(j)}(0)\right)+$$
$$+\frac{-1+(-1)^{k+l+1}}{2}a^{k+l+1}\varphi^{(k+l)}(0)+\frac{-1+(-1)^{k+l}}{2}a^{k+l}\psi^{(k+l-1)}(0)=$$
$$=\sum_{j=0}^{k+l-1}C_{k+l}^{j}a^{j}\left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}\psi^{(j-1)}(0)+\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}a\varphi^{(j)}(0)\right)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{k+l-j}C_{k+l-j}^{i}g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i-j)}(0)+a^{k+l}\left(\frac{-1+(-1)^{k+l}}{2}\psi^{(k+l-1)}(0)+\frac{-1-(-1)^{k+l}}{2}a\varphi^{(k+l)}(0)\right)=$$

$$= \sum_{j=0}^{k+l-1} C_{k+l}^{j} a^{j} \left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2} \psi^{(j-1)}(0) + \frac{1-(-1)^{j-1}}{2} a\varphi^{(j)}(0) \right) (g(t)\gamma(t))^{(k+l-j)} \Big|_{t=0} +$$

$$+ a^{k+l} \left(\frac{1+(-1)^{k+l-1}}{2} \psi^{(k+l-1)}(0) + \frac{1-(-1)^{k+l-1}}{2} a\varphi^{(k+l)}(0) \right) (g(0)\gamma(0)-1) = 0.$$

Итак, мы показали обращение в нуль оставшихся слагаемых и справедливость (34) при $\nu < m$.

Теперь докажем равенства (34) при $\nu = m$. Для более гладких функций $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(R_+)$, $\psi \in C^m(R_+)$ формула (34) при $\nu = m$ выводится аналогично предыдущим случаям $\nu < m$. Затем полученное равенство (34) при $\nu = m$ предельным переходом по f, φ, ψ распространяется с этих более гладких функций на функции f, φ, ψ меньшей гладкости из (20), но с дополнительной гладкостью (26), (27). Тем самым лемма 2 доказана.

В силу условий согласования (9), (10), (12), (28) для решений u_+ и u_- на критической характеристике $x = at$ равны нулю их разности и разности их всех частных производных до порядка $m \ge 2$ включительно:

$$(u_+ - u_-)\big|_{x=at} = \frac{a\mu(0) - S_0}{a\gamma(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_+}{\partial t} - \frac{\partial u_-}{\partial t} \right)\Bigg|_{x=at} = \frac{a\mu'(0) - S_1}{a\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)\big(S_0 - a\mu(0)\big)}{a\gamma^2(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_+}{\partial x} - \frac{\partial u_-}{\partial x} \right)\Bigg|_{x=at} = \frac{-a\mu'(0) + S_1}{a^2\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)\big(a\mu(0) - S_0\big)}{a^2\gamma^2(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} \right)\Bigg|_{x=at} = \frac{a\mu''(0) - S_2}{a\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)\big(S_1 - a\mu'(0)\big)}{a\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2\gamma'^2(0)}{a\gamma^3(0)}\big(S_0 - a\mu(0)\big) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} \right)\Bigg|_{x=at} = \frac{a\mu''(0) - S_2}{a^3\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)\big(S_1 - a\mu'(0)\big)}{a^3\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2\gamma'^2(0)}{a^3\gamma^3(0)}\big(S_0 - a\mu(0)\big) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t} \right)\Bigg|_{x=at} = \frac{S_2 - a\mu''(0)}{a^2\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)\big(a\mu'(0) - S_1\big)}{a^2\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2\gamma'^2(0)}{a^2\gamma^3(0)}\big(a\mu(0) - S_0\big) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^{i+j} u_+}{\partial x^i \partial t^j} - \frac{\partial^{i+j} u_-}{\partial x^i \partial t^j} \right)\Bigg|_{x=at} = \frac{(-1)^i}{a^{i+1}} \sum_{k=0}^{i+j} C_{i+j}^{k} (a\mu^{(i+j-k)}(0) - S_{i+j-k})(\gamma^{-1}(0))^{(k)} = 0,\ 0 \le i + j \le m.$$

Единственность гладкого решения u_+ на G_+ объясняется единственностью решения u_- задачи Коши (1), (2) на G_- и тем, что среди сужений всех гладких решений (31) уравнения (1) на G_+ это единственное решение u_+, удовлетворяющее двум граничным режимам решенной выше задачи Пикара.

Таким образом, мы доказали существование, единственность и устойчивость гладкого решения $u \in C^m(G_\infty)$, которое выражается формулой (4) на G_- и формулой (6) на G_+. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *При характеристической первой косой производной в (3) не следует выносить общий множитель $\beta(t - x/a)$ за скобки в классическом решении (6) из-за требований гладкости (27) для всех $m \ge 2$. В условиях согласования (9), (10), (12) можно выносить общий множитель $\beta(0)$*

за скобки только при $l=\overline{0,m-1},\ m\geq 2.$ *Слагаемые из суммы (25) с завышенной на единицу гладкостью начальных данных* φ и ψ *явно отсутствуют в условии согласования (28), так как по предположениям теоремы 2 не существуют производные* $\varphi^{(m+1)}$ и $\psi^{(m)}$ *для* $m\geq 2.$ *Доказательство теоремы 2 упрощается при* $\gamma(t)\equiv 1,\ t\in R_+.$ *Для этого характеристическое граничное условие (3) приводится к соответствующему эквивалентному граничному условию делением его на* $\gamma(t)\neq 0,\ t\in R_+.$ *Но если коэффициент* $\beta(t)\neq const\times\gamma(t),\ t\in R_+,$ *то после деления граничного условия* (3) на $\gamma(t)\neq 0,\ t\in R_+,$ *эквивалентное характеристическое граничное условие тоже не допускает разделения переменных* x и t *при решении соответствующей эквивалентной смешанной задачи методом Фурье. Таким образом, в общем случае характеристическая смешанная задача (1)–(3) как для полуограниченной струны на* G_∞, *так и для ограниченной струны на* $G=[0,d]\times R_+$ *явно не решается методом Фурье, т.е. методом периодических продолжений (отражений) по* $x\in[0,d]$ *начальных данных* $\varphi,\ \psi$ *и правой части* f.

Так же, как в работе [1] и диссертации [5], доказываются

Следствие 1. *Если правая часть* f *уравнения (1) зависит только от* x *или* t *и* $f\in C^{m-2}(R_+)$ *по* x *или* t, *то утверждение теоремы 2 верно без интегральных требований гладкости (26) на* f.

В случае зависимости правой части уравнения (1) только от x или только от t интегральные требования гладкости (26) на правую часть всегда выполняются и поэтому эти интегральные требования гладкости (26) отсутствуют в формулировке следствия 1.

Следствие 2. *Для исходных данных* $f\in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi\in C^{m+1}(R_+),\ \psi\in C^m(R_+),\ \mu\in C^m(R_+)$ *теорема 2 дает достаточные условия корректности задачи (1)–(3) без требований гладкости (26), (27).*

Для исходных данных $f\in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi\in C^{m+1}(R_+),\ \psi\in C^m(R_+)$ с завышенной на единицу гладкостью по сравнению с (20) требования гладкости (26), (27) заведомо имеют место.

Следствие 3. *Из теоремы 2 при* $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ *имеем формулу решения и критерий корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) в классе гладких решений* $u\in C^m(G_\infty),\ m\geq 2.$

Когда $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ и $\gamma\neq 0,$ тогда граничное условие (3) становится условием $u(0,t)=\mu(t)/\gamma(t), t>0.$

Замечание 2. *Можно показать [5], что для смешанной задачи (1)–(3) указанная в требованиях (26) принадлежность интегралов множеству* $C^{m-1}(G_\infty)$ *от функции* $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ *эквивалентна их принадлежности множествам* $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ *или* $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$. *Здесь* $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$ *– соответственно множества непрерывно дифференцируемых* $m-1$ *раз по* x *или непрерывных по* t *и непрерывных по* t *или непрерывно дифференцируемых* $m-1$ *раз по* x *функций на* G_∞.

Замечание 3. *В определении 3 для всех четных* m *критериальными значениями являются [4]:*

$$K_m(0)\equiv\beta(0)\sum_{j=0}^{m-1}a^j f^{(j,m-1-j)}(0,t)\big|_{t=0}=\sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\frac{\partial}{\partial\vec{\mathrm{v}}}\left(\sum_{s=0}^{(m-2)/2}a^{2s}f^{(2s,m-2-2s)}(0,0)\right),\ m=2,4,6,..., \tag{40}$$

где символом $\partial\left(\sum\ \right)/\partial\vec{\mathrm{v}}$ *обозначено значение производной по вектору* $\vec{\mathrm{v}}=\{a,1\}$ *при* $x=0$ *и* $t=0$ *от указанной в (40) суммы частных производных порядка* $m-2$ *от функции* $f\in C^{m-2}(G_\infty)$.

Заключение. В данной работе представлены формулы единственного и устойчивого гладкого решения смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме с характеристической первой косой производной. Для однозначной и устойчивой везде разрешимости этой характеристической смешанной задачи во множестве гладких решений впервые выведен полный критерий корректности: необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и условия согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф.Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
2. Шлапакова, Т.С. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т.С. Шлапакова, Н.И. Юрчук // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2013. – № 2. – С. 84–90.
3. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Международная математическая конференция «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
4. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
5. Новиков, Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Е.Н. Новиков; Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.
6. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
7. Юрчук, Н.И. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны / Н.И. Юрчук, Е.Н. Новиков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 116–120.
8. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
9. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
10. Ломовцев, Ф.Е. Гладкие решения начально-граничной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Воронежс. зимн. матем. школа: материалы междунар. конф., Воронеж, 28 янв. – 2 февр. 2021 г. / Воронежс. гос. ун-т; под общ. ред. Б.С. Кашина, Д.А. Ендовицкого, П.А. Бородина. – Воронеж, 2021. – С. 195–198.

REFERENCES

1. Lomovtsev F.E. Vestsi NAN Belarusi Ser. fiz.-mat. navuk [Journal of the NAS of Belarus. Physical and Mathematical Sciences], 2016, 1, pp. 21–27.
2. Shlapakova T.S., Yurchuk N.I. Vestnik BGU. Ser. 1 [Journal of BSU. Ser. 1], 2013, 2, pp. 84–90.
3. Lomovtsev F.E. Mezhdunarodbnaya matematicheskaya konferentsiaya “Shestiye Bogdanovskiye chteniya po obuknovennym differentsialnym uravneniyam”: materialy mezhdunar. nauch. konf., Minsk, 7–10 dek. 2015 g.: v 2 ch. Belorus. gos. un-t [International Mathematical Conference “The 6th Bogdanov Readings on Conventional Differential Equations”: Proceedings of the International Scientific Conference, Minsk, December 7–10, 2015: in 2 Parts, Belarusian State University], Minsk, 2015, 2, pp. 74–75.
4. Lomovtsev F.E., Tochko T.S. Vesnik Grodzernskaga dziarzhaunaga universiteta imia Yanki Kupaly. Ser. 2, Matematika. Fizika. Infarmatyka, vylichalnaya tekhnika i kiravanne [Journal of Yanka Kupala State University of Grodno. Ser. 2, Mathematics. Physics. Information Science, Calculation Machines and Management], 2019, 9(2), pp. 56–75.
5. Novikov E.N. Smeshanniye zadachi dlia uravnenii vynuzhdennykh kolebani ogranichennoi struny pri nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh s pervoi i vtoroi kosoi proizvodnymi: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Mixed Problems for the Equation of induced Vibrations of a Limited String under Non-Stationary Boundary Conditions with the First and the Second Oblique Derivatives: PhD (Pysics and Mathematics) Dissertation Summary], Institut matematiki NAN Belarusi, Minsk, 2017, 25 p.
6. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. Differents. Uravneniya [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
7. Yurchuk N.I., Novikov E.N. Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk [Journal of the NAS of Belarus. Physical and Mathematical Sciences], 2016, 4, pp. 116–120.
8. Tikhonov A.N., Samarski A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics], M.: Nauka, 2004, 798 p.
9. Lomovtsev F.E. Zhurn. Belorus. gos. un-ta. Matematika. Informatika [Journal of Belarusian State University. Mathematics. Information Science], 2017, 3, pp. 38–52.
10. Lomovtsev F.E., Tochko T.S. Sovremenniye metody teorii funktsii i smezhniye problemy: Voronezh. zimn. matem. shkola: materialy mezhdunar. konf., Voronezh, 28 yanv. – 2 fevr. 2021 g. Voronezh. gos. un-t [Contemporary Methods of the Theory of Functions and Boundary Problems: Voronezh Winter Mathematical School: Proceedings of the International Scientific Conference, Voronezh, January 28 – February 2, 2021. Voronezh State University], Voronezh, 2021, pp. 195–198.

Поступила в редакцию 04.04.2022

***Адрес для корреспонденции*:** e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.

БІЯЛОГІЯ

УДК 574.42(476.7)+598.2

ДИНАМИКА ОБИЛИЯ ВИДОВ ПТИЦ В ХОДЕ СУКЦЕССИИ ЧЕРНООЛЬХОВЫХ ЛЕСОВ В ЮГО-ЗАПАДНОЙ БЕЛАРУСИ

И.В. Абрамова
Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Нарушенные лесные экосистемы характеризуются значительными пространственно-временными изменениями. Виды птиц, зависящие от фитоценозов, находящихся на разных стадиях вторичной сукцессии, подвержены сильному влиянию динамических факторов среды. В рамках изучения орнитокомплексов прослежены изменения обилия птиц в процессе восстановительной сукцессии на месте вырубки черноольховых лесов в юго-западной части Беларуси.

Цель статьи – определение межгодовой динамики обилия видов птиц и оценка изменчивости обилия отдельных видов в ходе восстановительной сукцессии черноольховых лесов.

Материал и методы. *Сбор материала проводился в 2000–2017 гг. Для проведения учетов птиц в экосистемах, находящихся на разных стадиях сукцессионного ряда, были заложены маршруты. Применяли общепринятые методы статистической обработки материала.*

Результаты и их обсуждение. *Установлено, что в ходе сукцессии черноольховых лесов (6 стадий, возраст от 1 до 80 лет) видовое разнообразие птиц увеличивается от 15 до 73 видов. Определены обилие видов (особей/км²) и межгодовая изменчивость в течение 10 сезонов. Коэффициент вариации (CV) наиболее высокий (50,0–126,7%) у видов, обилие которых не превышает 10,0 особей/км². Среднее обилие видов варьирует в значительных пределах, например, на стадии возраста 70–80 лет – от 0,3 особей/км² (малый подорлик) до 170,4 особей/км² (зяблик).*

Заключение. *Количество видов птиц, их обилие, коэффициент вариации обилия на разных стадиях сукцессии черноольховых лесов изменяются в широких пределах. Наиболее высокие показатели разнообразия сообщества и стабильности обилия отдельных видов птиц наблюдаются на пятой и шестой стадиях сукцессии.*

Ключевые слова: *сукцессия, население птиц, черноольховые леса, Беларусь.*

DYNAMICS OF BIRD SPECIES ABUNDANCE DURING THE SUCCESSION OF ALDER FORESTS IN SOUTHWESTERN BELARUS

I.V. Abramova
Education Establishment "Brest State A.S. Pushkin University"

Disturbed forest ecosystems are characterized by significant spatial and temporal changes. Bird species that depend on phytocenoses at different stages of secondary succession are strongly influenced by dynamic environmental factors. As a part of the study of bird communities, changes in bird abundance during of secondary succession of cleared alder forest in the southwestern Belarus was conducted.

The purpose of the work is to determine inter-annual dynamics of bird species abundance and assess the variability of individual species abundance during of secondary succession of cleared alder forest.

Material and methods. *Material was collected in 2000–2017. Line transect were laid to conduct bird counts in ecosystems at different stages of succession. Generally accepted methods of statistical processing of the material was used.*

Findings and their discussion. *The species diversity of birds has been found to increase from 15 to 73 species during the succession (6 stages, age from 1 to 80 years). The abundance of species (birds/km²) and inter-annual variability during 10 seasons were established. The coefficient of variation (CV) is highest (50,0–126,7%) for species whose abundance does not exceed 10,0 birds/km². The average abundance of species varies considerably, e.g., at the 70–80 year-old stage, from 0,5 birds/km² (Little Spotted Eagle) to 170,4 birds/km² (Chaffinch).*

Conclusion. *The number of bird species, their abundance, coefficient of variation of abundance at different stages of black-alder forest succession vary within a wide range. The highest values of community diversity and stability of the abundance of individual bird species are observed during the fifth and sixth stages of succession.*

Key words: *succession, bird communities, alder forests, Belarus.*

Нарушенные лесные экосистемы характеризуются значительными пространственно-временными изменениями. По мере того как после сплошной рубки или пожара развивается растительность и изменяется пространственная структура фитоценозов, численность отдельных видов птиц значительно изменяется. Проблеме изменения видового состава и параметров населения птиц по ходу восстановительной сукцессии лесных экосистем умеренного пояса Северного полушария посвящен ряд публикаций [1–5] и др. Однако данные работы, как правило, не содержат сведений о количестве сезонов и учетов, проведенных при изучении сукцессий, не выполнена статистическая обработка материала. Сведения об изменениях населения птиц в ходе восстановительной сукцессии черноольховых лесов в юго-западной Беларуси представлены в публикации [6].

Цель статьи – определение межгодовой динамики обилия видов птиц и оценка изменчивости обилия отдельных видов в ходе восстановительной сукцессии черноольховых лесов.

Материал и методы. Сбор материалов для данной работы проводился в 2000–2017 гг. в юго-западной Беларуси в Брестском (Томашовское, Меднянское и Домачевское лесничества), Малоритском (Пожеженское и Малоритское лесничества) и Ивацевичском (Ивацевичское и Бронногорское лесничество) лесхозах. При изучении орнитокомплексов на разных стадиях сукцессии ольсов на месте вырубок применяли общепринятые методы учета птиц [7; 8]. Учет птиц проводили на маршрутах, которые были заложены в экосистемах, находящихся на разных стадиях сукцессионного ряда, в максимально однородных местообитаниях. Первые три стадии сукцессии прослежены на одних и тех же площадках, более поздние – на площадках с однотипными условиями, но отличающихся возрастом фитоценозов. Маршруты прокладывали по центру местообитаний, чтобы по возможности устранить опушечный эффект. В ряде случаев по причине небольших размеров исследованных участков леса придерживаться этого принципа было невозможно, чем можно объяснить встречи в ряде сообществ видов птиц, характерных для других формаций. Общая протяженность пройденных маршрутов составила более 400 км.

Учет птиц в каждом из сообществ сукцессионного ряда осуществляли ежегодно с 15.05 по 15.06, когда орнитокомплексы наиболее стабильны и птицы проявляют максимальное предпочтение местообитания, в ясную погоду в утреннее (спустя 1 час после восхода) и вечернее (прекращался за 1–2 часа до захода солнца) время. Пересчет обилия птиц (количество особей на 1 км²) велся раздельно по средним дальностям обнаружения (по голосу, визуально) [7]. Данные по обилию видов птиц подвергались статистической обработке [9]. При описании численности и распределения видов птиц по биотопам пользовались балльной шкалой численности и доминирования, предложенной А.П. Кузякиным [10]: доминирующий вид – составляющий более 10% от суммарного обилия, фоновый – более 1 ос./км², редкий – от 0,1 до 0,9 ос./км². Из анализа были исключены те виды, которые регистрировались в ходе учетов менее чем в 1/2 сезонов. Некоторые орнитологи (O. Järvinen, J. Lokki) [цит. по: 8] полагают, что эффективность учета всех видов птиц за одно посещение составляет немногим более 50%. Латинские названия птиц приведены по сводке *Clements checklist of birds of the world* [11].

В сборе материалов существенную помощь оказали студенты и преподаватели биологического и географического факультетов БрГУ имени А.С. Пушкина, за что автор выражает им искреннюю признательность.

Результаты и их обсуждение. Виды, которые были зарегистрированы нами на разных стадиях восстановительной сукцессии черноольховых лесов (табл.), по обилию можно разделить на четыре группы:

1) виды с высоким обилием – 50,0 ос./км² и более (зяблик, три вида пеночек); 2) виды со средним обилием – 10,0–49,9 ос./км² (зарянка, лесной и луговой коньки, луговой чекан, желтая трясогузка, серая и черноголовая славки, большая и хохлатая синицы, мухоловка-пеструшка, певчий и черный

дрозды, крапивник и др.); 3) виды с невысоким обилием – 1,0–9,9 ос./км² (рябинник, ястребиная и садовая славки, обыкновенная иволга, обыкновенный ремез, обыкновенная кукушка, пестрый дятел и др.); 4) редкие виды, обилие которых менее 1,0 ос./км² (серый журавль, коростель, чеглок, черный коршун, филин, ушастая и болотная совы, садовая и ястребиная славки и др.).

На свежей вырубке нами зарегистрировано 15 видов птиц. Доминирующими по обилию являются луговой чекан *Saxicola rubetra* (13,6 ± 2,09 ос./км²), луговой конек *Anthus pratensis* (12,1 ± 1,14 ос./км²), желтая трясогузка *Motacilla flava* (11,0 ± 1,23 ос./км²), серая славка *Sylvia communis* (10,5 ± 0,90 ос./км²) и лесной конек *Anthus trivialis* (10,1 ± 1,15 ос./км²). Изменчивость обилия у видов этой группы более 25%, наименее стабильна численность лугового чекана (CV = 46,10%). У обитающих на этой стадии сукцессии фоновых видов (обыкновенная *Emberiza citrinella* и тростниковая овсянки *E. schoeniclus*, болотная камышевка *Acrocephalus palustris* и др.) отмечен более высокий уровень вариации обилия (CV от 30,45% до 72,00%).

На стадии молодых культур и кустарников (4–9 лет) орнитокомплекс пополняется одиннадцатью видами, среди которых обитатели кустарников и зарослей: варакушка *Luscinia svecica,* садовая *Sylvia borin*, ястребиная *S. nisoria* и черноголовая славки *S. atricapilla* (табл.). По сравнению с предыдущей стадией у ряда видов (луговой конек, камышевка-барсучок *Acrocephalus schoenobenus*, коростель *Crex crex*) на этой стадии наблюдается снижение обилия, у других (луговой чекан, обыкновенная и тростниковая овсянки, болотная камышевка и др.) – увеличение. У ряда видов (жулан *Lanius collurio*, желтая трясогузка) обилие сохранилось на уровне предыдущей стадии. Обилие видов варьирует в значительных пределах (от 27,42 до 98,00%). Более стабильно обилие у тростниковой овсянки (CV = 30,94%) и серой славки (CV = 27,42%), крайне высокий уровень вариации показателя (более 70%) отмечен у четырех видов: чирок-трескунок *Anas querquedula,* черныш *Tringa ochropus,* болотная сова *Asio flammeus* и коростель.

На третьей стадии (10–20 лет) зарегистрировано семь новых дендрофильных видов (крапивник *Troglodytes troglodytes,* обыкновенный соловей *Luscinia luscinia,* зяблик *Fringilla coelebs,* большая синица *Parus major,* пеночки: весничка *Phylloscopus trochilus,* теньковка *Ph. collybita* и трещотка *Ph. sibilatrix*). Из орнитокомплекса выпадает два вида (луговой чекан и луговой конек), связанных своей жизнедеятельностью с открытыми территориями. Обилие семи видов (обыкновенная и тростниковая овсянки, желтая трясогузка, лесной конек и др.) значительно снизилось по сравнению с предыдущей стадией. Доминирующим видом является зяблик (54,4 ± 4,21 ос./км², CV = 23,23%), в группу видов со средним обилием входят шесть видов: черный дрозд *Turdus merula* (22,0 ± 1,61 ос./км², CV = 21,91%), обыкновенный соловей (18,8 ± 2,08 ос./км², CV = 33,14%), пеночка-весничка (18,3 ± 1,73 ос./км², CV = 28,36%) и др. Высокая изменчивость обилия характерна для видов с невысокой численностью, обилие которых не превышает 10 ос./км². Наиболее высокие значения коэффициента вариации (более 80,0%) наблюдаются у редких видов (обилие ниже 1,0 ос./км²), наиболее низкие (менее 25,0%) – у черного дрозда и зяблика (табл.).

На стадии лесных культур (30–40 лет) состав орнитокомплекса претерпевает существенные изменения. Птицы открытых территорий (желтая трясогузка, коростель, тростниковая овсянка и др.) здесь уже не встречаются, сообщество птиц обогащается двадцатью двумя новыми видами: обыкновенная пищуха *Certhia familiaris*, обыкновенный поползень *Sitta europaea*, обыкновенный скворец *Sturnus vulgaris*, хохлатая синица *Lophophanes cristatus*, серая мухоловка *Muscicapa striata*, мухоловка-пеструшка *Ficedula hypoleuca* и др. В орнитокомплексе господствуют дендрофильные виды: пеночка-теньковка (80,5 ± 3,57 ос./км², CV = 13,29%), пеночка-весничка (60,2 ± 3,98 ос./км², CV = 19,83%), пеночка-трещотка (50,0 ± 3,84 ос./км², CV = 23,06%) др., по численности доминирует зяблик (128,5 ± 4,35 ос./км², CV = 10,16%). Чем меньше обилие, тем большую роль играют стохастические вариации (случайные колебания), так, у видов с обилием менее 2 ос./км² CV изменяется от 55,0% до 114,0%.

На стадии высокоствольного черноольхового леса (50–60 лет) отмечено 73 вида птиц, которые заселяют все ярусы. В структуре орнитокомплекса увеличивается количество видов птиц-дуплогнездников (растет разнообразие синицевых, мухоловковых, дятловых). Как и на предыдущей стадии, к числу доминирующих по обилию относится один вид – зяблик (160,6 ± 5,18 ос./км²), численность которого на этой стадии отличается высоким уровнем стабильности (CV = 9,69%). Высокое обилие выявлено у трех видов пеночек: теньковки (90,4 ± 3,75 ос./км², CV = 12,46%), веснички (70,4 ± 3,93 ос./км², CV = 16,76%), трещотки (62,5 ± 3,49 ос./км², CV = 16,77%). Коэффициент вариации обилия многочисленных видов (более 50 ос./км²) не превышает 25%. Группу видов с невысокой численностью (менее 10 ос./км²) образуют 52 вида, для большинства из них характерны высокие показатели изменчивости обилия (CV до 126,67%). Значителен этот показатель (более 68,57%) для редких видов.

Таблица

Параметры населения птиц черноольховых лесов на разных стадиях восстановительной сукцессии

Вид	1–3 года		4–9 лет		10–20 лет		30–40 лет		50–60 лет		70–80 лет	
	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV
Motacilla flava	11,0 ± 1,23	33,64	10,4 ± 1,18	33,94	3,2 ± 0,57	53,75	–	–	–	–	–	–
Anthus trivialis	10,1 ± 1,15	34,06	12,4 ± 1,34	32,34	5,4 ± 0,71	39,44	3,0 ± 0,59	59,00	16,7 ± 2,23	40,12	18,0 ± 2,03	33,89
Anthus pratensis	12,1 ± 1,14	31,49	8,4 ± 1,21	43,21	–	–	–	–	–	–	–	–
Saxicola rubetra	13,6 ± 2,09	46,10	16,3 ± 2,20	40,49	–	–	–	–	–	–	–	–
Anas platyrhynchos	2,0 ± 0,48	72,00	3,5 ± 0,68	51,14	3,0 ± 0,56	50,00	3,2 ± 0,44	41,25	2,0 ± 0,47	71,00	2,2 ± 0,45	61,82
Anas crecca	–	–	2,0 ± 0,36	54,50	1,5 ± 0,28	55,33	1,1 ± 0,26	71,82	0,8 ± 0,24	90,00	0,7 ± 0,22	92,86
*Anas querquedula**	–	–	1,0 ± 0,26	78,00	0,8 ± 0,22	83,75	0,5 ± 0,19	114,00	0,6 ± 0,23	113,33	0,6 ± 0,19	93,83
Lanius collurio	3,4 ± 0,58	51,47	3,8 ± 0,72	56,84	5,2 ± 0,65	37,50	2,0 ± 0,37	55,00	1,4 ± 0,27	57,14	0,6 ± 0,20	100,00
Emberiza citrinella	8,8 ± 1,23	30,45	14,6 ± 1,76	36,09	10,5 ± 1,23	35,23	5,2 ± 0,60	34,61	7,2 ± 1,09	45,58	8,6 ± 1,08	37,79
Emberiza schoeniclus	8,4 ± 1,15	41,19	14,5 ± 1,62	30,94	5,4 ± 0,66	36,67	–	–	–	–	–	–
Acrocephalus schoenobenus	5,6 ± 0,66	35,36	4,2 ± 0,56	39,05	1,0 ± 0,26	78,00	–	–	–	–	–	–
Acrocephalus palustris	10,0 ± 1,21	36,40	16,1 ± 1,67	31,18	14,0 ± 1,47	31,42	6,0 ± 0,80	39,83	–	–	–	–
Erithacus rubecula	–	–	4,7 ± 0,74	47,23	8,5 ± 1,00	35,18	29,0 ± 2,30	23,83	32,5 ± 1,93	17,78	36,3 ± 2,05	16,97
Turdus philomelos	–	–	3,8 ± 0,72	56,84	6,7 ± 0,76	33,88	28,6 ± 2,35	18,34	36,5 ± 2,15	17,67	38,0 ± 1,82	14,34
Prunella modularis	–	–	–	–	–	–	0,8 ± 0,25	95,00	1,5 ± 0,35	69,33	1,8 ± 0,34	56,67
Locustella fluviatilis	1,2 ± 0,27	67,50	3,4 ± 0,58	49,12	5,6 ± 0,56	30,18	1,2 ± 0,27	68,33	–	–	–	–
Luscinia luscinia	–	–	–	–	18,8 ± 2,08	33,14	21,0 ± 2,19	31,38	21,5 ± 2,09	29,12	32,0 ± 2,16	20,27
Luscinia svecica	–	–	2,2 ± 0,45	61,82	2,5 ± 0,49	59,30	1,2 ± 0,28	69,17	–	–	–	–
Turdus merula	–	–	1,0 ± 0,21	63,00	22,0 ± 1,61	21,91	21,2 ± 1,58	22,31	36,0 ± 2,22	18,56	38,6 ± 2,14	16,66
Turdus pilaris	–	–	–	–	–	–	2,0 ± 0,47	71,00	3,0 ± 0,52	52,00	2,5 ± 0,52	62,40
Sylvia communis	10,5 ± 0,90	25,62	12,4 ± 1,16	27,42	3,2 ± 0,52	48,43	6,5 ± 0,75	34,61	34,2 ± 2,13	18,68	35,6 ± 2,26	19,04
Sylvia nisoria	–	–	1,8 ± 0,33	54,44	2,0 ± 0,50	75,00	2,4 ± 0,49	61,67	2,0 ± 0,47	70,50	2,4 ± 0,46	57,08
Sylvia atricapilla	–	–	1,2 ± 0,27	67,50	5,2 ± 0,69	39,40	26,8 ± 1,58	17,61	33,2 ± 1,87	16,93	35,4 ± 2,39	20,28
Sylvia borin	–	–	4,2 ± 0,51	34,57	5,0 ± 0,55	32,80	2,0 ± 0,45	67,00	3,6 ± 0,61	50,80	3,2 ± 0,56	52,18
Certhia familiaris	–	–	–	–	–	–	3,2 ± 0,46	42,81	4,5 ± 0,53	35,03	5,6 ± 0,72	38,57
Sitta europaea	–	–	–	–	–	–	4,0 ± 0,62	46,25	8,2 ± 0,16	42,56	14,7 ± 1,57	30,95
Sturnus vulgaris	–	–	–	–	–	–	10,0 ± 1,19	35,82	16,4 ± 1,65	30,18	28,0 ± 2,49	26,00
Fringilla coelebs	–	–	–	–	54,4 ± 4,21	23,23	128,5 ± 4,35	10,16	160,6 ± 5,18	9,69	170,4 ± 5,76	10,14
Coccothraustes coccothraustes	–	–	–	–	–	–	7,8 ± 1,20	46,02	12,6 ± 1,45	34,60	14,7 ± 1,52	31,37

Продолжение табл.

Вид	1–3 года		4–9 лет		10–20 лет		30–40 лет		50–60 лет		70–80 лет	
	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV
Pyrrhula pyrrhula	–	–	–	–	–	–	8,6 ± 1,30	45,58	12,8 ± 1,54	36,02	16,3 ± 1,75	32,15
Carpodacus erythrinus	2,8 ± 0,42	45,36	3,5 ± 0,50	43,14	1,2 ± 0,28	69,17	–	–	–	–	–	–
Parus major	–	–	–	–	5,6 ± 0,71	37,85	22,0 ± 1,62	22,09	42,5 ± 2,46	17,53	46,4 ± 2,75	17,76
Lophophanes cristatus	–	–	–	–	–	–	28,0 ± 2,32	24,78	24,3 ± 2,32	28,60	26,9 ± 2,33	25,98
Poecile montanus	–	–	–	–	–	–	13,2 ± 1,12	25,45	16,7 ± 1,54	27,72	18,6 ± 1,47	23,71
*Parus cyanus**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,6 ± 0,19	95,00	0,6 ± 0,18	91,70
Parus caeruleus	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5 ± 0,28	55,33	2,4 ± 0,43	56,67
Poecile palustris	–	–	–	–	–	–	–	–	18,5 ± 0,90	15,35	16,6 ± 1,05	18,92
Aegithalos caudatus	–	–	–	–	–	–	–	–	3,2 ± 0,48	44,69	5,0 ± 0604	38,20
Phylloscopus trochilus	–	–	–	–	18,3 ± 1,73	28,36	60,2 ± 3,98	19,83	70,4 ± 3,93	16,76	70,2 ± 3,41	14,59
Phylloscopus collybita	–	–	–	–	2,2 ± 0,45	61,36	80,5 ± 3,57	13,29	90,4 ± 3,75	12,46	98,6 ± 4,15	12,62
Phylloscopus sibilatrix	–	–	–	–	3,4 ± 0,66	58,36	50,0 ± 3,84	23,06	62,5 ± 3,49	16,77	62,4 ± 3,28	15,77
Muscicapa striata	–	–	–	–	–	–	36,5 ± 2,51	20,66	38,0 ± 2,52	19,92	40,5 ± 2,59	19,15
*Ficedula albicollis**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5 ± 0,16	98,00	1,0 ± 0,25	76,00
Ficedula hypoleuca	–	–	–	–	–	–	23,0 ± 1,76	22,91	28,6 ± 2,02	21,05	30,5 ± 2,05	20,20
Ficedula parva	–	–	–	–	–	–	–	–	1,8 ± 0,34	56,67	2,0 ± 0,47	70,00
Oriolus oriolus	–	–	–	–	–	–	2,0 ± 0,50	74,50	6,4 ± 0,78	36,72	6,6 ± 0,96	43,63
Remiz pendulinus	–	–	–	–	–	–	5,8 ± 0,67	34,48	6,4 ± 0,83	38,98	7,5 ± 0,91	36,40
Troglodytes troglodytes	–	–	–	–	15,0 ± 1,84	36,80	23,0 ± 2,10	27,43	33,7 ± 2,49	22,20	38,6 ± 2,46	19,15
Hippolais icterina	–	–	–	–	–	–	–	–	0,6 ± 0,19	93,33	1,0 ± 0,31	92,00
Garrulus glandarius	–	–	–	–	–	–	0,6 ± 0,20	98,33	1,4 ± 0,25	54,29	2,5 ± 0,44	53,20
Corvus corone	–	–	–	–	–	–	–	–	0,6 ± 0,19	95,00	1,2 ± 0,25	63,33
Pica pica	–	–	–	–	–	–	0,6 ± 0,19	93,33	1,2 ± 0,24	59,17	2,0 ± 0,36	57,50
Corvus corax	–	–	–	–	–	–	–	–	0,7 ± 0,19	81,43	1,0 ± 0,30	89,00
Columba oenas	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5 ± 0,18	110,00	1,3 ± 0,25	57,69
Streptopelia turtur	–	–	–	–	–	–	–	–	1,0 ± 0,29	86,00	1,4 ± 0,24	50,71
Columba palumbus	–	–	–	–	–	–	3,8 ± 0,66	51,84	4,5 ± 0,57	34,67	6,2 ± 0,77	37,05
Apus apus	–	–	–	–	–	–	9,2 ± 1,10	35,87	10,0 ± 0,95	28,50	20,5 ± 1,72	25,07
Picus canus	–	–	–	–	–	–	–	–	0,3 ± 0,13	126,67	0,5 ± 0,18	108,00

Окончание табл.

Вид	1–3 года		4–9 лет		10–20 лет		30–40 лет		50–60 лет		70–80 лет	
	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV	$\bar{x} \pm x$	CV
*Dendrocopos medius**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,8 ± 0,23	86,75	1,2 ± 0,23	56,67
Dendrocopos major	–	–	–	–	–	–	2,7 ± 0,58	64,81	6,0 ± 0,57	38,67	8,0 ± 1,16	43,50
*Picus viridis**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,3 ± 0,11	110,00	0,4 ± 0,14	105,00
Dryobates minor	–	–	–	–	–	–	–	–	2,6 ± 0,51	58,46	2,8 ± 0,44	49,64
*Dendrocopos leucotos**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5 ± 0,11	116,00	1,0 ± 0,40	78,60
Dryocopus martius	–	–	–	–	–	–	–	–	2,8 ± 0,54	58,21	3,2 ± 0,31	48,12
Jynx torquilla	–	–	–	–	–	–	–	–	4,0 ± 0,63	47,00	4,2 ± 0,65	46,43
Scolopax rusticola	–	–	–	–	–	–	–	–	1,2 ± 0,28	70,00	2,0 ± 0,48	72,00
Tringa ochropus	–	–	2,0 ± 0,49	73,00	1,2 ± 0,29	71,67	5,0 ± 0,57	34,20	4,8 ± 0,56	35,00	5,3 ± 0,61	34,34
Bonasa bonasia	–	–	–	–	–	–	–	–	5,8 ± 0,72	37,07	5,5 ± 0,61	33,45
Cuculus canorus	–	–	–	–	–	–	3,0 ± 0,59	59,67	4,8 ± 0,51	36,67	5,6 ± 0,53	28,41
*Crex crex**	1,2 ± 0,28	70,00	0,5 ± 0,16	98,00	0,4 ± 0,14	102,50	–	–	–	–	–	–
*Grus grus**	0,4 ± 0,14	105,00	1,2 ± 0,27	67,50	1,5 ± 0,32	68,00	2,0 ± 0,41	61,50	1,2 ± 0,27	68,30	1,3 ± 0,27	63,00
*Ciconia nigra**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,6 ± 0,16	78,37	0,8 ± 0,20	75,00
Buteo buteo	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5 ± 0,31	62,00	2,3 ± 0,34	44,35
Accipiter gentilis	–	–	–	–	–	–	–	–	1,2 ± 0,27	64,17	1,5 ± 0,31	62,67
Accipiter nisus	–	–	–	–	–	–	–	–	1,2 ± 0,27	65,50	1,4 ± 0,28	59,29
*Clanga pomarina**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,3 ± 0,13	126,67	0,3 ± 0,10	113,33
*Falco subbuteo**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,2 ± 0,07	110,00	0,3 ± 0,09	96,73
*Milvus migrans**	–	–	–	–	–	–	0,3 ± 0,11	16,67	0,4 ± 0,11	85,00	0,8 ± 0,22	83,75
*Haliaeetus albicilla**	–	–	–	–	–	–	0,4 ± 0,11	85,00	0,5 ± 0,14	82,00	0,6 ± 0,16	80,00
*Bubo bubo**	–	–	–	–	–	–	–	–	0,3 ± 0,09	93,33	0,5 ± 0,12	72,00
Asio otus	–	–	–	–	–	–	–	–	0,2 ± 0,08	120,00	0,5 ± 0,12	74,00
*Asio flammeus**	–	–	0,5 ± 0,12	72,00	0,4 ± 0,10	80,00	0,3 ± 0,12	72,00	0,5 ± 0,13	78,00	0,3 ± 0,12	116,67
Strix aluco	–	–	–	–	–	–	0,5 ± 0,12	70,00	0,7 ± 0,16	68,57	1,0 ± 0,19	56,00
Количество видов	15		26		31		48		73		73	

Примечание: * – виды, включенные в Красную книгу Республики Беларусь [12].

На стадии спелого леса (70–80 лет) видовой состав птиц такой же, как и на предыдущей стадии. Количество видов с обилием менее 10,0 ос./км² несколько уменьшилось (50), изменчивость численности этой группы птиц велика, как и на предыдущей стадии (например, у жулана *Lanius collurio*, седого *Picus canus* и зеленого дятлов *Picus viridis*, малого подорлика *Clanga pomarina* и болотной совы *Asio flammeus* коэффициент вариации более 100%). Наиболее стабильно население зяблика (CV = 10,14%) и пеночки-теньковки (CV = 12,62%). Все четырнадцать видов птиц (черный аист *Ciconia nigra*, малый подорлик, филин *Bubo bubo*, серый журавль *Grus grus*, белоспинный дятел *Dendrocopos leucotos*, зеленый дятел, мухоловка-белошейка *Ficedula albicollis*, белая лазоревка *Parus cyanus* и др.), включенных в Красную книгу Беларуси [11], на последних двух стадиях имеют обилие не более 1,5 ос./км², коэффициент вариации численности этих видов изменяется от 56,67 до 126,67%.

Заключение. Количество видов птиц, их обилие, коэффициент вариации обилия в процессе сукцессии черноольховых лесов изменяются в широких пределах. Количество видов возрастает по мере сукцессии от 15 на первой стадии до 73 видов на шестой. Наиболее высокая изменчивость обилия (CV от 50,00 до 126,67%) характерна для видов, обилие которых не превышает 10,0 ос./км². У дендрофильных видов со средним обилием на трех последних стадиях сукцессии значения коэффициента вариации изменяются в пределах 14,34–29,12% (только в трех случаях больше 30,00%). Наиболее высокая стабильность обилия у зяблика (CV на пятой стадии составил 9,69%, на четвертой и шестой – 10,16% и 10,14% соответственно).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Данилов, Н.Н. Изменения в орнитофауне зарастающих вырубок на Среднем Урале / Н.Н. Данилов // Зоол. журнал. – 1958. – Т. 37, вып. 12. – С. 1898–1903.
2. Преображенская, Е.С. Смены птичьего населения в ходе зарастания различных типов вырубок Приветлужья / Е.С. Преображенская, Б.И. Борисов // Влияние антропогенного ландшафта на население наземных позвоночных животных: тез. Всесоюз. сов.: в 2 ч. / редкол.: О.В. Бурский [и др.]. – М.: ВТО АН СССР, 1987. – Ч. 2. – С. 157–158.
3. Гриднева, В.В. Динамика населения птиц в ходе сукцессионных изменений после рубок различного типа в Восточном Верхневолжье / В.В. Гриднева, В.Н. Мельников // Вестник ТГУ. – 2013. – Т. 18, вып. 6. – С. 3227–3230.
4. Głowaciński, Z. Stability in bird communities during the secondary succession of a forest ecosystem / Z. Głowaciński // Ecol. Pol. – 1981. – Vol. 29, № 1. – P. 73–95.
5. Helle, P. Annual fluctuations of land bird communities in different successional stages of boreal forest / P. Helle, M. Monkkonen // Ann. Zool. Fennici. – 1986. – Vol. 23. – P. 269–280.
6. Абрамова, И.В. Сукцессия населения птиц в ходе восстановительной смены черноольховых лесов в юго-западной Беларуси / И.В. Абрамова // Известия ГГУ имени Ф. Скорины: Естественные науки. – 2018. – № 3(108). – С. 5–11.
7. Равкин, Ю.С. К методике учета птиц лесных ландшафтов / Ю.С. Равкин // Природа очагов клещевого энцефалита на Алтае. – Новосибирск, 1967. – С. 66–75.
8. Järvinen, O. Finnish line transect censuses / O. Järvinen, R. Väisänen // Ornis fenn. – 1976. – Vol. 53, № 4. – P. 115–118.
9. Рокицкий, П.Ф. Биологическая статистика / П.Ф. Рокицкий. – Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 320 с.
10. Кузякин, А.П. Зоогеография СССР / А.П. Кузякин // Учен. зап. Моск. обл. пед. ин-та им. Н.К. Крупской. – 1962. – Т. 109. – С. 3–182.
11. The eBird/Clements checklist of birds of the world: v2019 [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.birds.cornell.edu/clementschecklist/. – Date of access: 15.06.2021.
12. Красная книга Республики Беларусь. Животные: редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды диких животных / гл. редкол.: И.М. Качановский (предс.), М.Е. Никифоров, В.И. Парфенов [и др.]. – 4-е изд. – Минск: Беларус. Энцыкл. імя П. Броўкі, 2015. – 320 с.

R E F E R E N C E S

1. Danilov N.N. Zool. zhurnal [Journal of Zoology], 1958, 37(12), pp. 1898–1903.
2. Preobrazhenskaya E.S., Borisov B.I. Vliyanie antropogennoi transformatsii landshafta na naselenie nazemnykh pozvonochnykh zhivotnykh: tezisy vsesoyuznogo soveshchaniya [Influence of Anthropogenic Transformation on the Population of Land Vertebrates: Abstracts of the All-Union Meeting], Moscow, 1987, 2, pp. 157–158.
3. Gridneva V.V., Melnikov V.N. Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta [Journal of Tomsk State University], 2013, 18(6), pp. 3227–3230.
4. Głowaciński Z. Stability in bird communities during the secondary succession of a forest ecosystem. Ecol. Pol, 1981, Vol. 29, № 1. P. 73–95.
5. Helle P., Monkkonen M. Annual fluctuations of land bird communities in different successional stages of boreal forest. Ann. Zool. Fennici, 1986, Vol. 23. P. 269–280.
6. Abramova I.V. Izvestiya GGU im. F. Skoriny. Yestestvenniye nauki [Journal of Francisk Scorina Gomel State University: Natural sciences], 2018, 3(108), pp. 5–11.
7. Ravkin Yu.S. Priroda ochagov kleshchevogo entsefalita na Altaye [Nature of Foci of Tick-Borne Encephalitis in the Altai], Novosibirsk, 1967, pp. 66–75.
8. Järvinen O., Väisänen R. Finnish line transect censuses. Ornis fenn, 1976, Vol. 53, № 4. P. 115–118.
9. Rokitsky P.F. Biologicheskaya statistika [Biological Statistics], Minsk, 1973, 320 p.
10. Kuzyakin A.P. Uchen. zap. Mosk. obl. ped. in-ta im. N.K. Krupskoi [Journal of N.K. Krupskaya Moscow Region Pedagogical Institute], Moscow, 1962, 109, pp. 3–182.
11. The eBird/Clements checklist of birds of the world: v2019. https://www.birds.cornell.edu/clementschecklist.
12. Krasnaya kniga Respubliki Belarus. Zhivotniye: redkiye i nakhodiashchiyesia pod ugrozoi ischeznoveniya vidy dikikh zhivotnykh [Red Book of the Republic of Belarus. Animals; Rare and Threatened with Extinction Wild Animal Species], Minsk, 2015, 320 p.

Поступила в редакцию 29.04.2021
Адрес для корреспонденции: e-mail: iva.abramova@gmail.com – Абрамова И.В.

УДК 576.54:57.085.23+615.37:616-006.6

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АЛЛОГЕННЫХ ДЕНДРИТНЫХ КЛЕТОК И Т-ЛИМФОЦИТОВ В УСЛОВИЯХ *IN VITRO*

О.В. Тимохина, Я.С. Минич, Н.Г. Антоневич, А.Е. Гончаров
Институт биофизики и клеточной инженерии НАН Беларуси

Способность дендритных клеток (ДК) стимулировать иммунный ответ и ингибировать Т-клеточную активность лежит в основе их применения в иммунотерапии онкологических и аутоиммунных заболеваний. Так как эффективность иммунотерапии зачастую ограничена количеством аутологичных (аутоДК), перспективным направлением является возможность применения аллогенных ДК (аллДК).

Цель: определить эффективность взаимодействия аллДК и Т-лимфоцитов в условиях in vitro для научного обоснования необходимости подбора донорских клеток.

***Материал и методы.** Материалом послужили ДК и моноциты периферической крови (МПК). В работе использованы иммунологические, культуральные, статистические методы исследования.*

***Результаты и их обсуждение.** Проведено сокультивирование МПК с незрелыми, зрелыми и толерогенными, аутологичными и аллогенными ДК. На 7-е сутки сокультивирования методом проточной цитофлуориметрии в общей фракции МПК определено количество (%) пролиферирующих Т-лимфоцитов.*

***Заключение.** Показано, что CD4+ Т-лимфоциты отвечают пролиферацией на стимуляцию зрелыми и незрелыми аллДК, однако при стимулировании толерогенными аллДК достоверных различий в сравнении с толерогенными аутоДК не выявлено. CD8+ Т-лимфоциты также реагируют на зрелые аллДК, но не обнаружено различий после стимулирования незрелыми и толерогенными аллДК. Для подтверждения полученных результатов и изучения механизмов такого реагирования необходимы дальнейшие исследования, в том числе для подбора пары «донор–реципиент».*

***Ключевые слова:** дендритные клетки, аллогенные дендритные клетки, толерогенные дендритные клетки, Т-лимфоциты.*

THE EFFECTIVENESS OF THE INTERACTION OF ALLOGENEIC DENDRITIC CELLS AND T-LYMPHOCYTES *IN VITRO*

O.V. Timokhina, Ya.S. Minich, N.G. Antonevich, A.Ye. Goncharov
Institute of Biophysics and Cell Engineering of the NAS of Belarus

The ability of dendritic cells (DC) to stimulate the immune response and inhibit T-cell activity underlies their use in the immunotherapy of oncological and autoimmune diseases. Since the effectiveness of immunotherapy is often limited by the number of autologous DC (autoDC), a promising direction is the possibility of using allogeneic DC (allDC).

The research purpose is to determine the effectiveness of the interaction of allDC and T-lymphocytes in vitro in order to scientifically substantiate the need to select donor cells.

***Material and methods.** The research material is DC and peripheral blood monocytes (PBMC). The work used immunological, cultural, statistical research methods.*

***Findings and their discussion.** Co-cultivation of PBMC with immature, mature and tolerogenic, autologous and allogeneic DC was carried out. On the 7th day of co-cultivation by flow cytometry the number (%) of proliferating T-lymphocytes was determined in the total PBMC fraction.*

***Conclusion.** Proliferation response of CD4+ T-lymphocytes to stimulation by mature and immature allDC was demonstrated; however, no significant differences when stimulated with tolerogenic allDC in comparison with tolerogenic autoDC were identified. CD8+ T-lymphocytes also respond to mature allDC; however, no differences were found after stimulation with immature and tolerogenic allDC. To confirm the results obtained and to study the mechanisms of such response, further studies are needed, including the need to select a donor–recipient pair.*

***Key words:** dendritic cells, allogeneic dendritic cells, tolerogenic dendritic cells, T-lymphocytes.*

Дендритные клетки (ДК) – профессиональные антигенпрезентирующие клетки, главной функцией которых являются интернализация антигенов, их процессинг и представление наивным Т-лимфоцитам для инициации адаптивного иммунного ответа [1]. Способность ДК стимулировать антиген-специфический иммунный ответ лежит в основе их применения в иммунотерапии онкозаболеваний и хронических инфекций.

Для усиления иммунного ответа у онкопациентов используют в основном аутологичные ДК (аутоДК), получаемые из моноцитов периферической крови [2]. Известно, что содержание моноцитов крови у пациентов существенно отличается, при этом оно довольно лабильно и зависит от состояния макроорганизма и сопутствующего лечения. Важно отметить, что, несмотря на хорошие результаты, достигнутые при применении аутоДК в лечении опухолей самой разной локализации, эффективность зачастую ограничена количеством ДК, которые можно получить для лечебных целей. Одним из решений данной проблемы является возможность применения аллогенных ДК (аллДК) [3; 4]. Преимуществами такого подхода являются получение клеток в большем количестве, хранение криоконсервированных клеток с возможностью их восстановления при первой необходимости. Однако в настоящее время неизвестно, является ли необходимым для клинического применения аллДК подбор пары «донор–реципиент» с учетом HLA-совместимости. Для этого следует оценить эффективность взаимодействия аллДК и Т-лимфоцитов.

ДК обладают способностью как к активации, так и к торможению специфического иммунного ответа. Толерогенные ДК (толДК), полученные из моноцитов, являются перспективным кандидатом на клеточную терапию при аутоиммунных заболеваниях благодаря их способности ингибировать Т-клеточную активность [5]. Именно поэтому данное исследование также нацелено на изучение проявления толДК своих свойств в отношении аллогенных Т-клеток.

Цель: определить эффективность взаимодействия аллДК и Т-лимфоцитов в условиях *in vitro* для научного обоснования необходимости подбора донорских клеток.

Материал и методы. *Выделение моноцитов периферической крови (МПК) и получение незрелых ДК.* МПК выделяли путем центрифугирования образца крови на градиенте плотности фиколл-пака с плотностью 1077 г/л. Моноциты получали из фракции МПК методом адгезии с последующим культивированием в течение 5 суток в питательной среде AIM-V, содержавшей 1,5% АВ0-сыворотку и рекомбинантные человеческие цитокины (100 нг/мл ГМ-КСФ и 50 нг/мл ИЛ-4), в увлажненной атмосфере с 5% CO_2 при 37 ºС.

Индукция созревания ДК. На 5-е сутки в питательную среду к незрелым ДК добавляли 50 нг/мл ГМ-КСФ, 25 нг/мл ИЛ-4, 50 нг/мл ФНО-α и 50 мкг/мл дб-цАМФ. ДК культивировали 1 сутки в увлажненной атмосфере с 5% CO_2 при 37 ºС.

Получение толДК, индуцированных мезенхимальными стволовыми клетками обонятельной выстилки (МСК ОВ). Предварительно за 1 сутки до сокультивирования культуры МСК ОВ высевали в питательную среду МЕМ с добавлением 10% FBS (полная ростовая среда) на 12-луночную планшету в концентрации 60–65 тыс. кл/см^2. На 3-и сутки культивирования незрелые ДК высевали на лунки с МСК ОВ (соотношение 2:1), предварительно удаляя ростовую среду. Сокультивирование проводили 3-е суток в питательной среде AIM-V, содержащей 1,5% АВ0-сыворотку, в увлажненной атмосфере с 5% CO_2 при 37 ºС.

Фенотипирование ДК. На 6-е сутки перед проведением сокультивирования определяли фенотип незрелых, зрелых и толерогенных ДК. В пробирку для цитофлуориметра отбирали 100 мкл суспензии клеток. В пробирку добавляли необходимые антитела (CD14-APC-Cy7, CD83-PE, CD209-APC, CD273-PE, CD274-APC, HLA-DR-FITC), ресуспендировали. Инкубировали 20 мин при комнатной температуре в темноте, после чего клетки отмывали от несвязавшихся антител центрифугированием раствором DPBS в течение 5 мин при 300×g, добавляли свежий буфер и регистрировали результат на проточном цитофлуориметре.

Окрашивание МПК Tag-it Violet. МПК инкубировали с 1,2 мкг красителя Tag-it Violet в 1 мл раствора DPBS при 37 ºС в темноте в течение 20 мин. Клетки отмывали центрифугированием в 15 мл питательной среды AIM-V в течение 15 мин при 300×g.

Сокультивирование МПК. Незрелые, зрелые и толерогенные ДК рассевали на лунки 24-луночной планшеты с добавлением питательной среды AIM-V, содержавшей 1,5% АВ0-сыворотку.

Свежевыделенные МПК, окрашенные Tag-it Violet, добавляли на лунки к ДК (соотношение МПК:ДК = 4:1). Условия сокультивирования: 1 – МПК отрицательный контроль; 2 – МПК положительный контроль (добавление 50 нг/мл ФГА); 3 – МПК с незрелыми аутоДК; 4 – МПК со зрелыми аутоДК; 5 – МПК с толерогенными аутоДК; 6 – МПК с незрелыми аллДК; 7 – МПК со зрелыми аллДК; 8 – МПК с толерогенными аллДК. Клетки инкубировали в увлажненной атмосфере с 5% CO_2 при 37 ºС в течение 7-ми суток.

Определение пролиферирующих Т-лимфоцитов. На 7-е сутки сокультивирования клетки снимали с лунок, отмывали от среды центрифугированием в течение 5 мин при 300×g. К осадку добавляли необходимые антитела (CD3-APC, CD4-PacificOrange), ресуспендировали. Инкубировали 20 мин при комнатной температуре в темноте, после этого клетки отмывали от несвязавшихся антител центрифугированием раствором DPBS в течение 5 мин при 300×g, добавляли свежий буфер и регистрировали результат на проточном цитофлуориметре. Фенотип цитотоксических Т-лимфоцитов определяли как $CD3^{+}CD4^{-}$, а Т-хелперов – как $CD3^{+}CD4^{+}$.

Статистический анализ. Статистическую обработку полученных данных проводили с использованием программ Statistica версии 12 (StatSoft, США). Значения показателей представлены в виде Me (25–75), где Me – медиана, а 25 и 75 – интерквартильный размах в виде 25-й и 75-й процентилей. Нормальность распределения величин оценивали с использованием W-критерия Шапиро–Уилка. Учитывая отсутствие в большинстве исследованных выборок нормального распределения, для сравнения групп данных и изучения корреляционных взаимосвязей применяли непараметрические методы. Для сравнения двух независимых выборок использовали U-критерий Манна–Уитни. В качестве критерия достоверности различий показателей принимали уровень значимости $p < 0,05$.

Результаты и их обсуждение. Для определения эффективности взаимодействия аллДК и Т-лимфоцитов в условиях *in vitro* у здоровых доноров (n=7) был проведен забор крови: 1) для получения моноцитарных ДК; 2) для получения общей фракции МПК и постановки сокультивирования. Сокультивировали МПК (n=7) с аутоДК (n=7) и с аллДК (n=15 комбинаций).

Перед проведением сокультивирования определяли фенотип незрелых, зрелых и толерогенных ДК (n=7). Контроль дифференцировки в ДК осуществляли по экспрессии клетками менее 5% молекулы CD14. Незрелые ДК характеризовались экспрессией молекул HLA-DR более 98%, CD209 более 97%, CD274 более 95% и отсутствием экспрессии маркеров CD83 и CD273. Зрелые ДК экспрессировали молекулы HLA-DR более 98%, CD83 (маркер зрелых клеток) более 50%, CD209 более 97%, CD273 менее 5% и CD274 более 95%. В то время как толДК характеризовались экспрессией CD209 более 97%, CD274 более 95%, CD273 менее 5%, уменьшением экспрессии HLA-DR и отсутствием экспрессии CD83.

Проведено сокультивирование МПК, окрашенных Tag-it Violet, с незрелыми, зрелыми и толерогенными, аутологичными и аллогенными ДК. На 6-е сутки сокультивирования получены микрофотографии культур клеток, на которых визуально наблюдали увеличение микроколоний при добавлении к МПК аллДК по сравнению с добавлением аутоДК (рис. 1). На 7-е сутки сокультивирования методом проточной цитофлуориметрии в общей фракции МПК определено количество (%) пролиферирующих $CD4^{+}$ и $CD8^{+}$ Т-лимфоцитов (рис. 2).

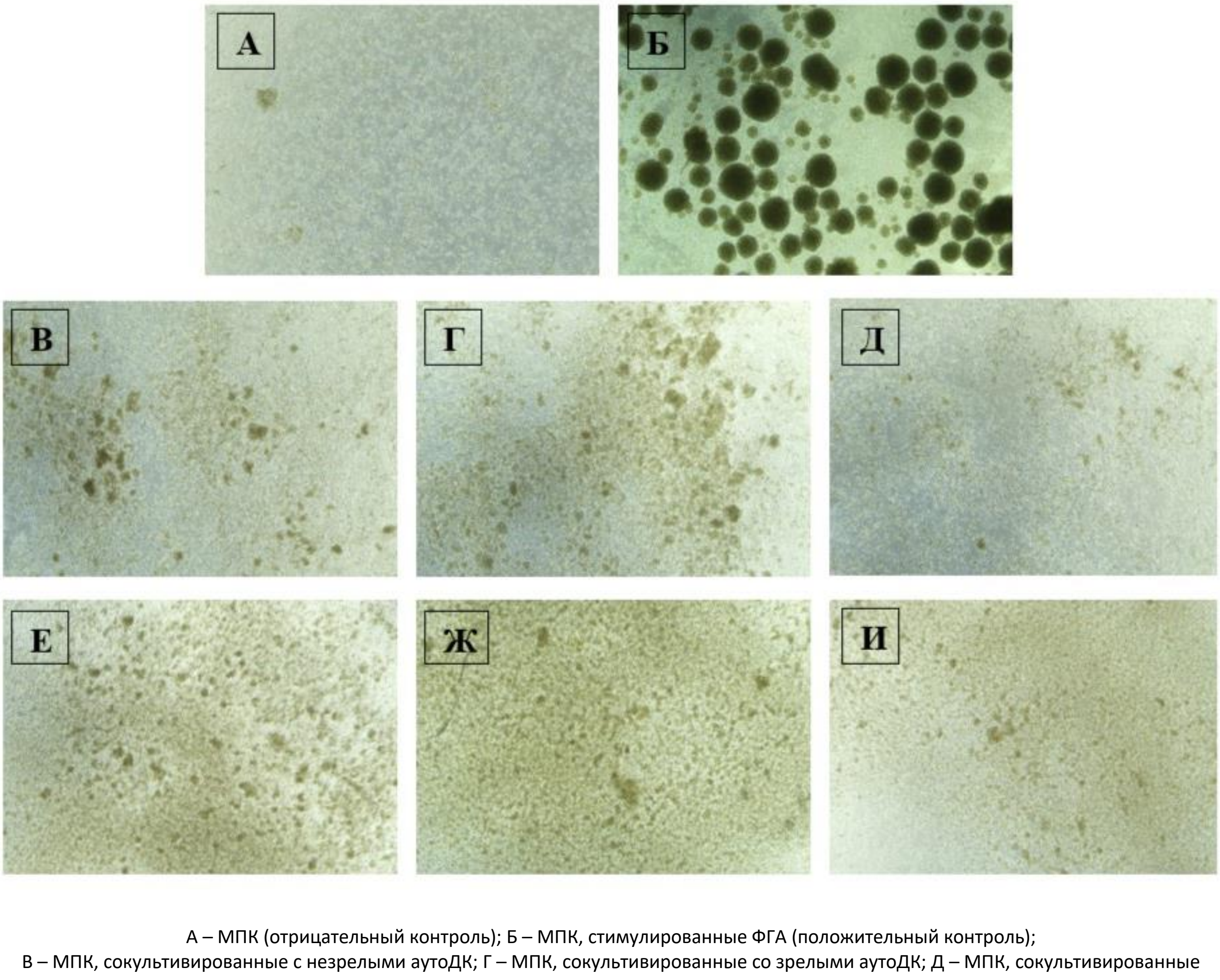
Оценка влияния аутологичных и аллогенных незрелых, зрелых и толерогенных ДК на пролиферацию Т-лимфоцитов показала, что добавление к МПК каждого из 6-ти разновидностей ДК приводило к усилению пролиферативной активности как $CD4^{+}$, так и $CD8^{+}$ Т-лимфоцитов по сравнению с контролем ($p<0,05$, табл.).

Достоверных различий не установлено при сравнении относительного количества пролиферирующих $CD4^{+}$ Т-лимфоцитов в группах после стимулирования незрелыми (2), зрелыми (3) и толерогенными (4) аутоДК ($p>0,05$). Однако относительное количество пролиферирующих $CD4^{+}$ Т-лимфоцитов в группе со зрелыми аллДК (6) было достоверно выше при сравнении с группой, стимулированной незрелыми аллДК (5) ($p<0,05$); количество пролиферирующих $CD4^{+}$ Т-лимфоцитов в группе с толерогенными аллДК (7) было достоверно ниже при сравнении с группой, стимулированной как незрелыми аллДК (5), так и зрелыми аллДК (6) ($p<0,05$).

В то же время количество пролиферирующих $CD4^{+}$ Т-лимфоцитов в группе с незрелыми аллДК (5) было достоверно выше при сравнении с группой, стимулированной незрелыми аутоДК (2) ($p<0,05$); зрелые аллДК (6) также вызывали больший пролиферативный ответ по сравнению со зрелыми аутоДК (3) ($p<0,05$); достоверных различий не выявлено ($p>0,05$) в группах после стимулирования толерогенными аутоДК (4) и аллДК (7), но при этом наблюдалась тенденция увеличения количества пролиферирующих $CD4^+$ Т-лимфоцитов (табл.).

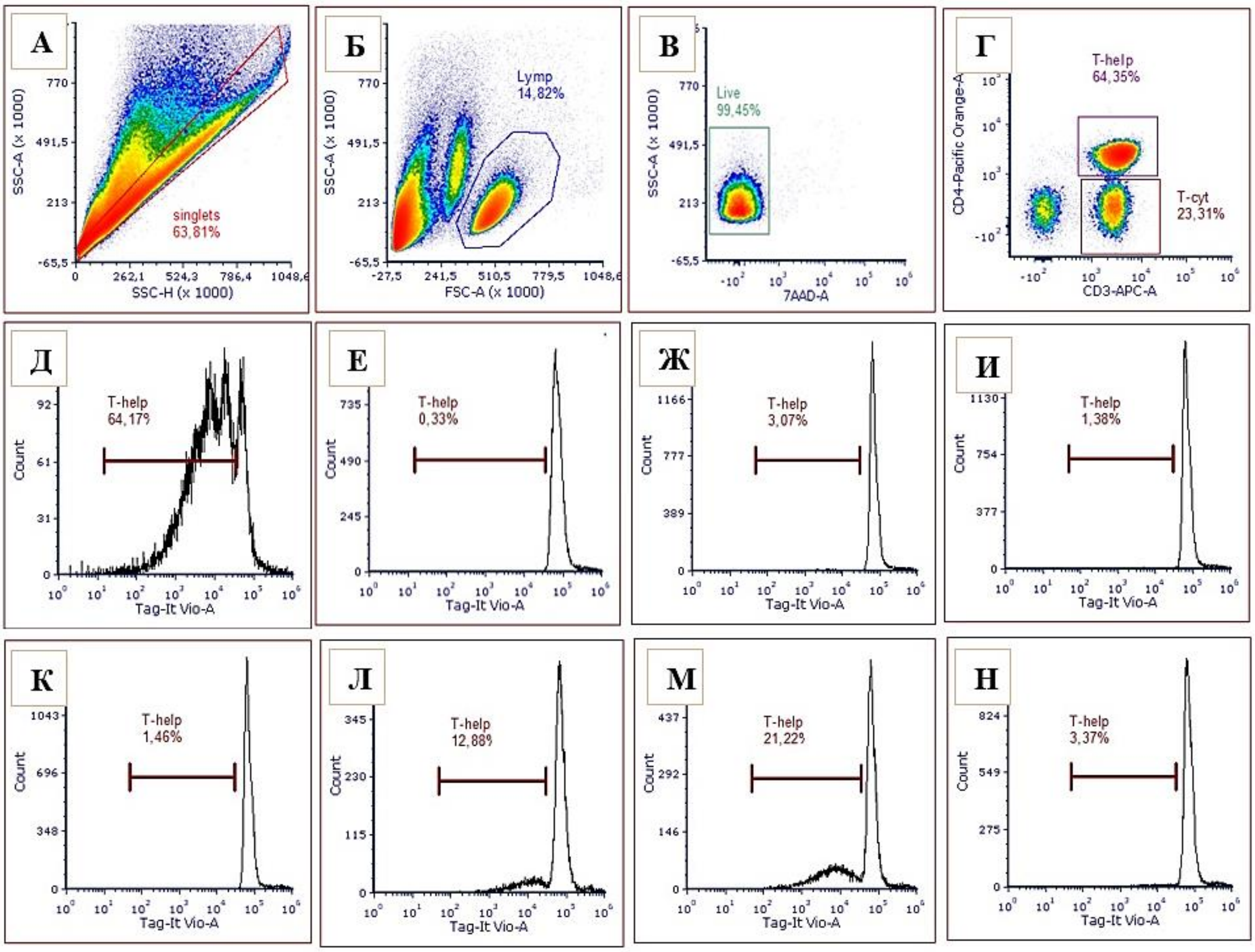
При сравнении количества пролиферирующих $CD8^+$ Т-лимфоцитов в группах после стимулирования незрелыми (2), зрелыми (3) и толерогенными (4) аутоДК достоверных различий не выявлено ($p>0,05$). Однако относительное количество пролиферирующих $CD8^+$ Т-лимфоцитов в группе со зрелыми аллДК (6) было достоверно выше при сравнении с группой, стимулированной незрелыми аллДК (5) ($p<0,05$); количество пролиферирующих $CD8^+$ Т-лимфоцитов в группе с толерогенными аллДК (7) было достоверно ниже при сравнении с группой, стимулированной как незрелыми аллДК (5), так и зрелыми аллДК (6) ($p<0,05$). Количество пролиферирующих $CD8^+$ Т-лимфоцитов в группе со зрелыми аллДК (6) было достоверно выше ($p<0,05$) при сравнении с группой, стимулированной зрелыми аутоДК (3).

В то же время достоверных различий не выявлено ($p>0,05$) в группах после стимулирования незрелыми аутоДК (2) и аллДК (5), а также в группах после стимулирования толерогенными аутоДК (4) и аллДК (7), но при этом наблюдалась тенденция увеличения количества пролиферирующих $CD8^+$ Т-лимфоцитов (табл.).



А – МПК (отрицательный контроль); Б – МПК, стимулированные ФГА (положительный контроль);
В – МПК, сокультивированные с незрелыми аутоДК; Г – МПК, сокультивированные со зрелыми аутоДК; Д – МПК, сокультивированные с толерогенными аутоДК; Е – МПК, сокультивированные с незрелыми аллДК; Ж – МПК, сокультивированные со зрелыми аллДК;
И – МПК, сокультивированные с толерогенными аллДК; увеличение 40×

Рис. 1. **Микрофотографии культур клеток на 6-е сутки сокультивирования МПК с незрелыми, зрелыми и толерогенными аутологичными и аллогенными ДК**



А–Г – гейтирование CD4+ Т-лимфоцитов; Д – МПК, стимулированные ФГА (положительный контроль);
Е – МПК (отрицательный контроль); Ж – МПК, сокультивированные с незрелыми аутоДК;
И – МПК, сокультивированные со зрелыми аутоДК; К – МПК, сокультивированные с толерогенными аутоДК; Л – МПК, сокультивированные с незрелыми аллДК; М – МПК, сокультивированные со зрелыми аллДК; Н – МПК, сокультивированные с толерогенными аллДК

Рис. 2. **Определение CD4+ пролиферирующих Т-лимфоцитов после сокультивирования МПК с незрелыми, зрелыми и толерогенными аутологичными и аллогенными ДК**

Таблица

Пролиферативная активность $CD4^+$ и $CD8^+$ Т-лимфоцитов, стимулированных незрелыми, зрелыми и толерогенными аутологичными и аллогенными ДК

№ группы сравнения	Условие сокультивирования (7 суток)	Me(25–75)% (аутоДК (n=7), аллДК (n=15))	Достоверность различий (U-тест Манна–Уитни)
$CD4^+$ Т-лимфоциты			
1	МПК контроль	0,3 (0,2–0,6)	$p_{1-2,\ 1-3,\ 1-4,\ 1-5,\ 1-6,\ 1-7}<0,05$
2	МПК с незрелыми аутоДК	6,5 (3,2–12,1)	$p_{2-3}=0,655$; $p_{2-4}=0,277$; $p_{3-4}=0,565$; $p_{5-6}=\underline{0,007}$; $p_{5-7}=\underline{0,002}$; $p_{6-7}=\underline{0,00003}$; $p_{2-5}=\underline{0,007}$; $p_{3-6}=\underline{0,0003}$; $p_{4-7}=0,217$
3	МПК со зрелыми аутоДК	5,7 (1,7–7,3)	
4	МПК с толерогенными аутоДК	4,3 (1,6–7,1)	
5	МПК с незрелыми аллДК	15,0 (11,0–12,1)	
6	МПК со зрелыми аллДК	25,6 (19,6–27,9)	
7	МПК с толерогенными аллДК	5,4 (4,7–11,8)	

Окончание табл.

CD8$^+$ Т-лимфоциты			
1	МПК контроль	0,5 (0,3–1,4)	$p_{1-2,\ 1-3,\ 1-4,\ 1-5,\ 1-6,\ 1-7}<0{,}05$
2	МПК с незрелыми аутоДК	11,5 (5,1–30,4)	$p_{2-3}=0{,}482$; $p_{2-4}=0{,}565$; $p_{3-4}=0{,}750$; $p_{5-6}=\underline{0{,}029}$; $p_{5-7}=\underline{0{,}008}$; $p_{6-7}=\underline{0{,}0004}$; $p_{2-5}=0{,}275$; $p_{3-6}=\underline{0{,}001}$; $p_{4-7}=0{,}916$
3	МПК со зрелыми аутоДК	8,0 (4,3–16,7)	
4	МПК с толерогенными аутоДК	5,9 (2,6–15,2)	
5	МПК с незрелыми аллДК	18,3 (12,1–25,7)	
6	МПК со зрелыми аллДК	25,0 (19,1–28,0)	
7	МПК с толерогенными аллДК	7,5 (4,8–12,8)	

Заключение. Результаты исследований показали, что CD4$^+$ Т-лимфоциты отвечают пролиферацией на стимуляцию зрелыми и незрелыми аллДК, однако при стимулировании толерогенными аллДК достоверных различий в сравнении с толерогенными аутоДК не выявлено. CD8$^+$ Т-лимфоциты также реагируют на зрелые аллДК, но не обнаружено различий после стимулирования незрелыми и толерогенными аллДК.

Для подтверждения полученных результатов и изучения механизмов такого реагирования необходимы дальнейшие исследования, в том числе для целесообразности установления параметров подбора пары «донор–реципиент» с учетом HLA-совместимости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Schadendorf, D. Autologous dendritic cells for treatment of advanced cancer – an update / D. Schadendorf, F.O. Nestle // Recent Results Cancer Res. – 2001. – Vol. 158. – P. 236–248.
2. Tomasicchio, M. An autologous dendritic cell vaccine polarizes a Th-1 response which is tumoricidal to patient-derived breast cancer cells / M. Tomasicchio [et al.] // Cancer Immunol. Immunother. – 2019. – Vol. 68, № 1. – P. 71–83.
3. Flörcken, A. Allogeneic partially HLA-matched dendritic cells pulsed with autologous tumor cell lysate as a vaccine in metastatic renal cell cancer: a clinical phase I/II study / A. Flörcken [et al.] // Hum. Vaccin. Immunother. – 2013. – Vol. 9, № 6. – P. 1217–1227.
4. Saite, S. Safety and tolerability of allogeneic dendritic cell vaccination with induction of Wilms tumor 1-specific T cells in a pediatric donor and pediatric patient with relapsed leukemia: a case report and review of the literature / S. Saite [et al.] // Cytotherapy. – 2015. – Vol. 17, № 3. – P. 330–335.
5. Романова, И.В. Иммунофенотипическая характеристика дендритных клеток, культивированных в толерогенном направлении / И.В. Романова, А.Е. Гончаров, Л.П. Титов // Современные проблемы инфекционной патологии человека: сб. науч. ст. – Минск, 2013. – № 6. – С. 240–245.

R E F E R E N C E S

1. Schadendorf, D. Autologous dendritic cells for treatment of advanced cancer – an update / D. Schadendorf, F.O. Nestle // Recent Results Cancer Res. – 2001. – Vol. 158. – P. 236–248.
2. Tomasicchio, M. An autologous dendritic cell vaccine polarizes a Th-1 response which is tumoricidal to patient-derived breast cancer cells / M. Tomasicchio [et al.] // Cancer Immunol. Immunother. – 2019. – Vol. 68, № 1. – P. 71–83.
3. Flörcken, A. Allogeneic partially HLA-matched dendritic cells pulsed with autologous tumor cell lysate as a vaccine in metastatic renal cell cancer: a clinical phase I/II study / A. Flörcken [et al.] // Hum. Vaccin. Immunother. – 2013. – Vol. 9, № 6. – P. 1217–1227.
4. Saite, S. Safety and tolerability of allogeneic dendritic cell vaccination with induction of Wilms tumor 1-specific T cells in a pediatric donor and pediatric patient with relapsed leukemia: a case report and review of the literature / S. Saite [et al.] // Cytotherapy. – 2015. – Vol. 17, № 3. – P. 330–335.
5. Romanova I.V., Goncharov A.E., Titov L.P. *Sovremenniye problemy infektsionnoi patologii cheloveka: sb. nauch. st.* [Contempporary Issues of Human Infection Pathology: A Collection of Scientific Papers], Minsk, 2013, 6, pp. 240–245.

Поступила в редакцию 06.04.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: oksanabuschik@gmail.com – Тимохина О.В.

УДК 796.012:612

ПОСТУРАЛЬНЫЙ БАЛАНС И ТЕКУЩАЯ ВЕГЕТАТИВНАЯ РЕГУЛЯЦИЯ СЕРДЕЧНОГО РИТМА У ФУТБОЛИСТОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕСТА РОМБЕРГА

Н.А. Тишутин

Учреждение образования «Белорусский государственный университет физической культуры»

Актуальность изучения особенностей поддержания постурального баланса совместно с уровнем текущей вегетативной регуляции сердечного ритма обусловлена важной ролью вегетативного регуляторного звена для функционирования постуральной системы человека. Спортивная деятельность футболистов предъявляет специфические требования к особенностям функционирования как постуральной системы, так и вегетативной нервной системы, что также указывает на целесообразность их совместного исследования с целью определения оптимальных уровней, которые будут способствовать наибольшей игровой эффективности.

Цель статьи – выявление особенностей поддержания постурального баланса и текущей вегетативной регуляции сердечного ритма у футболистов при выполнении теста Ромберга.

Материал и методы. *Обследовано 100 студентов Белорусского государственного университета физической культуры, из которых 50 спортсменов-футболистов, играющих за различные команды в чемпионате Беларуси по футболу, и 50 студентов-сверстников, не занимающихся спортом. Проводилась синхронная регистрация текущей вариабельности сердечного ритма и колебаний центра давления на стабилоплатформе при выполнении теста Ромберга.*

Результаты и их обсуждение. *Обследованная группа футболистов характеризовалась меньшей скоростью и площадью перемещений центра давления по сравнению со студентами, которые не занимаются спортом, причем в усложненной стойке с отсутствием зрительного контроля эти различия были более значительными. Уровень текущей вегетативной регуляции сердечного ритма у группы футболистов характеризовался меньшей текущей активностью центрального контура в управлении ритмом сердца независимо от включения в постуральный контроль зрительной сенсорной системы.*

Заключение. *Выявленные особенности поддержания постурального баланса при выполнении теста Ромберга и текущей вегетативной регуляции ритма сердца у футболистов можно рассматривать как необходимое условие, позволяющее футболистам эффективно поддерживать позу и достигать высоких спортивных результатов.*

Ключевые слова: *постуральный баланс, вегетативная регуляция сердечного ритма, стабилометрическая платформа, футболисты, зрительный контроль.*

POSTURAL BALANCE AND CURRENT AUTONOMIC REGULATION OF FOOTBALL PLAYERS' HEART RATE WHEN THEY PERFORM THE ROMBERG TEST

N.A. Tishutin

Education Establishment "Belarusian State University of Physical Education"

The relevance of studying the features of maintaining postural balance together with the level of current vegetative regulation of the heart rate is due to the important role of the vegetative regulatory link for the functioning of the human postural system. The sports activity of football players imposes specific requirements on the functioning of both the postural system and the autonomic nervous system, which also indicates the feasibility of their joint study in order to determine the optimal levels that will contribute to the greatest playing efficiency.

The purpose of the article is to study the features of maintaining postural balance and the current autonomic regulation of football players' heart rate when they perform the Romberg test.

Material and methods. *100 students of Belarusian State University of Physical Education were studied, of which 50 football players who play for various teams in the Belarusian Football Championship, and 50 peer students who do not go in for sports. Synchronous recording of the current heart rate variability and fluctuations of the center of pressure on the stabilometric platform was carried out during the Romberg test.*

Findings and their discussion. *The surveyed group of football players was characterized by a lower speed and area of movement of the center of pressure compared to students who do not play sports, and in a complicated stance with no visual control, these differences were more significant. The level of the current vegetative regulation of the heart rate in the group of football players was characterized by a lower current activity of the central circuit in the control of the heart rhythm, regardless of the inclusion of the visual sensory system in the postural control.*

Conclusion. *The identified features of maintaining postural balance during the Romberg test and the current autonomic regulation of football players' heart rhythm can be considered as a necessary condition that allows football players to effectively maintain their posture and achieve high sports results.*

Key words: *postural balance, autonomic regulation of heart rate, stabilometric platform, football players, visual control.*

Для поддержания постурального баланса (ПБ) в организме человека функционирует сложная многоуровневая система, деятельность которой связана с большим количеством компонентов и зависит от условий, в которых необходимо поддерживать ПБ [1]. В этой системе выделяются различные компоненты, которые можно подразделить в зависимости от реализуемых функций: центральная нервная система (ЦНС), опорно-двигательный аппарат и сенсорные системы [2]. Задействование опорно-двигательного аппарата с его большим количеством звеньев обеспечивает реализацию основных механизмов управления системой поддержания ПБ, которые представлены рефлексами, синергиями, а также стратегиями [3]. Сенсорные системы, в свою очередь, предоставляют афферентную информацию в ЦНС, на основании которой реализуются позные корректировки. В качестве основных сенсорных систем, необходимых для поддержания ПБ, выделяют зрительную, вестибулярную и двигательную сенсорные системы [4]. Иерархически выстроенные уровни ЦНС функционируют на основе поступающей от данных сенсорных систем информации, что реализуется в формировании корковых и подкорковых двигательных ответов, которые активируют деятельность опорно-двигательного аппарата и соответствующую реализацию позных коррекций. Таким образом, в организме человека формируется функциональная система, направленная на достижение полезного приспособительного результата в виде поддержания ПБ.

В научной литературе имеются сведения, что поддержание ПБ является важной координационной способностью, высокий уровень развития которой необходим для эффективного выполнения двигательных действий и технических элементов, которые составляют основу любой спортивной деятельности [5]. Отмечается, что способность к поддержанию ПБ у спортсменов имеет более высокий уровень развития по сравнению лицами, не занимающимися спортом, однако данные различия зачастую выявляются только в усложненных условиях поддержания позы и отсутствуют в простых стойках [6].

Игровые виды спорта отличаются высокими требованиями к уровню поддержания ПБ, причем, значимость этих требований возрастает при усложнении игровых ситуаций. Одним из наиболее популярных и близко характеризующих специфику игровых видов спорта является футбол. Исследователь Д.Ф. Лекомцев (2018) отмечает, что высокий уровень поддержания ПБ необходим футболистам для нормального функционирования всех физиологических систем организма, оптимального распределения мышечных усилий и амплитуды движений и, как следствие этого, повышения экономичности и эффективности двигательных действий [7]. Вместе с тем все виды спорта, включая футбол, для эффективного поддержания ПБ предъявляют специфические требования к функционированию постуральной системы, отдавая приоритет тем источникам афферентной информации, которые являются наиболее целесообразными для данного вида спорта. Процесс перераспределения приоритета афферентной информации между различными сенсорными модальностями для наиболее эффективного поддержания позы в специфических условиях спортивной деятельности называют «адаптивным постуральным контролем» [8]. Наличие данных адаптационных перестроек в работе постуральной системы в совокупности со сведениями, указывающими на выявление различий между спортсменами и лицами, не занимающимися спортом, только в более сложных условиях поддержания позы, указывает на актуальность исследования особенностей постурального контроля у футболистов в усложненных условиях.

Другой важной системой, необходимой для выполнения любого двигательного действия, а также для обеспечения ПБ, является вегетативная нервная система (ВНС). Особенности функционирования ВНС в настоящее время наиболее часто исследуются с использованием методов вариабельности сердечного ритма (ВСР) [9], следовательно, при использовании данных методов правомерно говорить об изучении вегетативной регуляции сердечного ритма (ВРСР). Вегетативная регуляция обеспечивает реализацию эрготропной и трофотропной функций, которые необходимы для деятельности мышц, органов и структур, входящих в постуральную систему. Помимо этого, надсегментарные отделы ВНС обеспечивают реализацию интегративных функций при осуществлении целесообразной адаптивной деятельности [10, с. 16]. Следовательно, оптимальный уровень вегетативной регуляции является важным компонентом для поддержания любой позы человека, а также для реализации всех видов спортивной деятельности. В научной литературе в настоящее время имеются многочисленные исследования постуральной системы, а также ВНС у спортсменов в отдельности, однако малочисленны работы, рассматривающие данные системы комплексно [5], что ограничивает действительное понимание особенностей их функционирования во взаимодействии друг с другом. В этой связи актуальными являются исследования, связанные с изучением особенностей поддержания ПБ совместно с текущей ВРСР у футболистов в усложненных постуральных условиях.

Цель статьи – выявление особенностей поддержания постурального баланса и текущей вегетативной регуляции сердечного ритма у футболистов при выполнении теста Ромберга.

Материал и методы. Обследовано 100 студентов Белорусского государственного университета физической культуры. Все студенты мужского пола в возрасте от 18 до 20 лет. Из них 50 студентов являлись действующими футболистами, которые выступают за различные клубы в чемпионате Беларуси по футболу, а также имеют I спортивный разряд или II спортивный разряд со стажем занятий футболом более 10 лет (основная группа). Группу контроля составили 50 студентов-сверстников, не занимающихся спортом и не имеющих спортивных разрядов. Все участники обследованы во временном интервале 9.00–11.00.

До проведения исследования на стабилоплатформе у всех испытуемых фиксировались следующие антропометрические показатели: длина тела, масса тела, длина стопы. Массу тела (кг) определяли с применением медицинских электронных весов ВЭМ-150 (ОАО «Зенит-БелОМО», Республика Беларусь). Длина тела (см) измерялась стоя с использованием медицинского ростомера. Для определения длины стопы (см) применялась измерительная линейка для ног.

Изучение особенностей поддержания ПБ в усложненных условиях осуществлялось посредством выполнения теста Ромберга на стабилоплатформе. Тест предполагал поддержание ПБ в вертикальной стойке в течение 54 секунд с открытыми глазами (ОГ) и закрытыми глазами (ЗГ). Тест проводился с использованием стабилометрической платформы «ST-150» с программным обеспечением STPL (ООО Мера-ТСП, г. Москва).

При выполнении теста на стабилоплатформе производилась параллельная регистрация кардиоинтервалограммы, с последующим автоматическим расчетом показателей ВСР. Для регистрации кардиоинтервалограммы применяли электрокардиограф «Полиспектр-8» фирмы «Нейрософт» (г. Иваново).

В работе использовались стандартные статистические методы из пакета программ Microsoft Excel 2010, Statistica 12. На нормальность распределения полученные данные проверялись с применением критерия Шапиро–Уилка. Статистические данные с нормальным распределением представлены в виде Хср. ± Sст.откл, а с ненормальным – в виде медианы (Ме) и центилей (25%, 75%). Уровень достоверности различий между независимыми группами определялся с использованием U-критерия Манна–Уитни. Достоверность внутригрупповых различий устанавливали при помощи W-критерия Уилкоксона. Различия по обоим критериям считались статистически значимыми при $p<0,05$.

Результаты и их обсуждение. Тест Ромберга в настоящем исследовании рассматривался как способ создания усложненных постуральных условий, позволяющих изучить особенности функционирования постуральной системы и текущего уровня ВРСР у футболистов. Отключение зрительного контроля сопровождается срочными адаптационными перестройками в функционировании постуральной системы. В этих условиях позные корректировки, по большей части, основываются на афферентной информации от сохранных двигательной и вестибулярной сенсорных систем, что создает дополнительные трудности для обеспечения постурального контроля.

Перед анализом результатов теста Ромберга проведен сравнительный анализ значений антропометрических показателей у основной группы и группы контроля (табл. 1). Необходимость данного анализа обусловлена тем, что при прочих равных условиях человеку с большей длиной тела будет труднее эффективно поддерживать ПБ по сравнению с человеком, имеющим меньшую длину тела. Данная зависимость объясняется тем, что большая длина тела обуславливает более высокое расположение его центра тяжести, что снижает устойчивость тела [11]. Обратная тенденция наблюдается с показателем длины стопы, увеличение значений которого будет создавать большую поверхность опоры и, соответственно, давать некоторое преимущество для эффективного поддержания позы.

Таблица 1

Данные антропометрических показателей в двух исследуемых группах

Показатель	Основная группа	Группа контроля	Достоверность различий
Длина тела, (см)	180 [175; 184]	182 [176; 186]	p_u>0,05
Длина стопы, (см)	27 [27; 28]	28 [27; 28]	p_u>0,05
Масса тела, (кг)	72,2 [68; 79]	71,6 [67; 78]	p_u>0,05

Примечание: p_u – достоверность различий по U-критерию Манна–Уитни между антропометрическими показателями.

Проведение сравнительного анализа значений трех антропометрических показателей у представителей основной группы и группы контроля не выявило достоверных различий. Показатели длины тела, массы тела, а также длины стопы имели схожие значения у представителей обеих групп, а степень их различий была незначительной и не превышала 3%. Следовательно, в данном исследовании антропометрический фактор не мог оказывать существенного влияния на различия, наблюдаемые при поддержании ПБ между двумя исследуемыми группами.

В табл. 2 представлены значения стабилометрических показателей, характеризующих особенности поддержания ПБ при выполнении теста Ромберга у представителей основной группы и группы контроля. Показатель ОФР, который указывает на эффективность выполнения данного теста, у основной группы имел значения на 16% более высокие (p<0,01), чем в группе контроля. Данные соотношения показателя ОФР свидетельствуют, что у футболистов результаты выполнения теста Ромберга значительно выше, чем у студентов, не занимающихся спортом.

При поддержании ПБ в вертикальной стойке с ОГ показатель скорости колебаний центра давления (ЦД) характеризовался значительными различиями между исследуемыми группами: основная группа – 6,4 мм/с, группа контроля – 7,5 мм/с (p<0,05). Переход к стойке с ЗГ сопровождался значительным увеличением скорости колебаний ЦД у представителей обеих групп. В основной группе значения показателя V увеличились на 2,9 мм/с (p<0,01), а в группы контроля – на 3,4 мм/с (p<0,01). Скорость колебаний ЦД в условиях с ЗГ у представителей группы контроля оказалась выше на 17% (p<0,05) по сравнению с основной группой. Таким образом, усложнение условий поддержания ПБ за счет отключения зрительного контроля сопровождалось повышением напряжения функционирования постуральной системы в обеих изучаемых группах, однако у футболистов в это напряжение было менее выраженным.

Показатель площади статокинезиограммы является произведением степени колебаний ЦД во фронтальном и сагиттальном направлениях и отражает эффективность поддержания ПБ. При поддержании позы в вертикальной стойке с ОГ значения показателя S в группе контроля были выше на 23% по сравнению с основной группой, однако достоверность различий не достигла критического уровня значимости. При отключении зрительного контроля отмечается достоверное увеличение значений площади девиаций ЦД в обеих исследуемых группах.

Так, в основной группе значения площади перемещений ЦД увеличились на 43% (p<0,01), а в группе контроля прирост составил 49% (p<0,01). В итоге при поддержании ПБ в вертикальной стойке с ЗГ у представителей группы контроля значения S оказались на 28% (p<0,05) выше по сравнению с таковыми у лиц основной группы. Данные значения площади колебаний ЦД говорят о более эффективном поддержании позы у футболистов по сравнению со студентами-сверстниками, которые не занимаются спортом. Вместе с тем отмечается отсутствие статистически значимых различий по показателю S между футболистами и студентами, не имеющими отношения к занятиям спортом, в простой стойке с включением в постуральный контроль зрительной сенсорной системы.

Таблица 2

Стабилометрические показатели при выполнении теста Ромберга у основной группы и группы сравнения

Показатель	Основная группа		Группа контроля		Достоверность различий	
	открытые глаза	закрытые глаза	открытые глаза	закрытые глаза	ОГ–ОГ	ЗГ–ЗГ
ОФР – оценка функции равновесия (баллы)	126 [101; 150]		109 [93; 121]		p_u<0,01	
V – скорость (мм/с)	6,4 [5,1; 8,1]	**9,3 [7,5; 12,2]	7,5 [6,2; 8,9]	**10,9 [8,5; 14,8]	p_u<0,05	p_u<0,05
S – площадь статокинезиограммы 95% доверительным интервалом (мм^2)	83 [54; 135]	**119 [71; 188]	102 [65; 184]	**152 [102; 274]	p_u>0,05	p_u<0,05
MaxX – амплитуда колебаний ЦД относительно X (мм)	6 [4,3; 7,9]	*7,4 [4,9; 9,5]	6,8 [5,5; 8,3]	**9,5 [6,9; 12,4]	p_u>0,05	p_u<0,01
MaxY – амплитуда колебаний ЦД относительно Y (мм)	10,3 [7,6; 13,6]	**11,9 [8,9; 15,6]	10 [8,4; 12,3]	**12,7 [10,4; 16,8]	p_u>0,05	p_u>0,05

Примечание: p_u – достоверность межгрупповых различий по U-критерию Манна–Уитни в стойках с открытыми и закрытыми глазами; * – достоверность внутригрупповых различий в стойках с открытыми и закрытыми глазами (* – p<0,05, ** – p<0,01).

Рассматривая особенности колебаний ЦД во фронтальной и сагиттальной плоскостях, отмечаем имеющиеся различия в исследуемых группах по показателям MaxX и MaxY. Так, в основной группе при поддержании ПБ в стойке с ОГ зафиксированы следующие значения показателей амплитуды колебаний ЦД: MaxX – 6 мм, MaxY – 10,3 мм. Переход к стойке с ЗГ у представителей основной группы сопровождался повышением значений MaxX и MaxY на 23% (p>0,05) и 16% (p>0,01) соответственно. В группе контроля при поддержании ПБ в стойке с ОГ значения данных показателей были следующими: MaxX – 6,8 мм, MaxY – 10 мм. При депривации зрительного анализатора в группе контроля отмечалась схожая с основной группой тенденция, которая выражалась в достоверном увеличении значений MaxX (на 40%; p>0,01) и MaxY (на 27%; p>0,01). Таким образом, сравнивая значения показателей амплитуды колебаний ЦД во фронтальной и сагиттальной плоскостях, обращаем внимание на отсутствие достоверных различий между исследуемыми группами при поддержании ПБ в простой стойке с ОГ. Отключение зрительного контроля вызывало значительное увеличение значений показателей MaxX, MaxY в обеих группах, однако степень прироста у представителей группы контроля была более высокой, чем в группе футболистов. В результате амплитуда колебаний ЦД во фронтальной плоскости в стойке с ЗГ у представителей основной группы ниже на 28% (p<0,05) по сравнению с таковой в группе контроля. Следовательно, при поддержании позы в стойке с ОГ у футболистов и студентов, которые не занимаются спортом, отсутствовали значительные различия в амплитуде колебаний ЦД во фронтальной и сагиттальной плоскостях. Вместе с этим переход к поддержанию ПБ в стойке с ЗГ выявил у футболистов более высокий уровень устойчивости во фронтальной плоскости.

Таким образом, стабилометрические результаты теста Ромберга указывают на более высокий уровень ПБ у футболистов в усложненных отсутствием зрительной афферентной информации условиях. У футболистов по сравнению со студентами, не занимающимися спортом, наблюдаются меньшая площадь и скорость девиаций ЦД, а также амплитуда колебаний ЦД во фронтальной плоскости. В то же время по некоторым показателям статистически значимые различия наблюдаются только в усложненных отсутствием зрительной информации условиях и отсутствуют в простой стойке с ОГ. Следовательно, результаты настоящего исследования подтверждают данные А.С. Назаренко и соавт. (2018) о том, что различия в уровне поддержания ПБ у лиц, которые не имеют отношения к занятиям спортом, и спортсменов могут быть зафиксированы только в усложненных постуральных условиях [12]. Эти же авторы показали, что в стойке с ЗГ эффективность поддержания ПБ у спортсменов характеризуется меньшей степенью снижения по сравнению с лицами, которые не занимаются спортом [13]. Данная тенденция подтверждается и результатами настоящего исследования, поскольку у футболистов отмечался меньший прирост площади перемещений ЦД, а также амплитуды колебаний ЦД во фронтальной и сагиттальной плоскостях по сравнению с таковыми у студентов, не занимающихся спортом.

Для спортивной деятельности футболистов является важным высокий уровень развития способности к поддержанию различных поз, в том числе и в усложненных условиях, что позволяет им более успешно выполнять двигательные действия и технические элементы. Высокие требования, предъявляемые к данной координационной способности в футболе, а также направленность их учебно-тренировочного процесса, обуславливают долговременные перестройки в функционировании постуральной системы футболистов. Как следствие, футболисты высокой квалификации обладают более развитой чувствительностью основных сенсорных систем, а также более совершенными механизмами восприятия и обработки поступающей афферентной информации, что помогает им своевременно осуществлять позные корректировки с целью эффективного поддержания ПБ.

Текущая ВРСР характеризует тот уровень энергометаболических запросов, который необходим для нормального функционирования органов и физиологических систем сегодня. Поскольку в настоящей работе перед участниками исследования ставилась задача неподвижного поддержания вертикального положения тела в условиях с ОГ и ЗГ, то регистрация текущей ВСР позволяет установить тот уровень ВРСР, который требуется для решения данной задачи.

Частота сердечных сокращений при поддержании позы в стойке с ОГ у представителей группы контроля была на 16% выше ($p<0,01$) по сравнению с основной группой. Переход к стойке с ЗГ, который по данным стабилометрических показателей сопровождался напряжением функционирования постуральной системы, также вызывал достоверное увеличение значений ЧСС на 7% ($p<0,01$) и 6% ($p<0,01$) в основной группе и группе контроля соответственно. Поддержание ПБ в вертикальной стойке с ЗГ у лиц основной группы сопровождалось на 13% ($p<0,01$) меньшей ЧСС по сравнению с группой контроля. Таким образом, обеспечение постурального контроля как в стойке с ОГ, так и с ЗГ сопровождалось более высоким уровнем функционирования сердечно-сосудистой системы (ССС) у студентов, которые не занимаются спортом, по сравнению с футболистами. Отключение зрительного контроля приводило к значительному повышению уровня функционирования ССС у представителей обеих групп, однако более низкий уровень и, соответственно, более экономный, был зафиксирован у футболистов.

Активность центрального контура в управлении сердечным ритмом, которую отражают значения индекса напряжения (ИН), имела различия в двух исследуемых группах. Так, при включении в постуральный контроль зрительной сенсорной системы значения ИН в основной группе оказались на 44% ($p<0,01$) ниже, чем в группе контроля. Отключение зрительного контроля сопровождалось повышением значений ИН на 62% ($p<0,01$) и 35% ($p<0,05$) от таковых в стойке с ОГ у представителей основной группы и группы контроля соответственно. Несмотря на более высокий процентный прирост значения ИН в основной группе, при поддержании ПБ в стойке с ЗГ у представителей данной группы значения ИН были ниже на 32% ($p<0,05$), чем у группы контроля. Следовательно, при депривации зрительного анализатора в обеих исследуемых группах отмечалось повышение активности центрального контура управления ритмом сердцем, однако независимо от включения в постуральный контроль зрительной сенсорной системы эта активность у футболистов была значительно ниже, чем у студентов, которые не занимаются спортом.

Показатель RMSSD, являющийся маркером активности парасимпатического отдела ВНС [9, с. 36], характеризовался достоверными различиями в значениях при выполнении теста Ромберга между основной группой и группой контроля. Значения показателя RMSSD были выше у представителей основной группы на 45% ($p<0,05$) и 50% ($p<0,05$) соответственно в условиях поддержания ПБ с открытыми и закрытыми глазами. Направленность и степень изменения значений RMSSD при отключении зрительного контроля выражалась в их уменьшении на 6% (p<0,01) и 9% (p<0,01) по сравнению со стойкой с ОГ у основной группы и группы контроля соответственно. То есть в процессе срочной адаптации к усложненным постуральным условиям, обусловленным отсутствием афферентной информации от зрительной сенсорной системы, в обеих исследуемых группах наблюдается снижение активности парасимпатического отдела ВНС. Однако независимо от того, поступает афферентная информация от зрительной сенсорной системы или нет, парасимпатическая активность у футболистов была значительно выше, чем у студентов, не занимающихся спортом, что указывает на более экономный уровень ВРСР у спортсменов.

Таблица 3

Показатели вариабельности сердечного ритма при выполнении теста Ромберга

Показатель	Основная группа		Группа контроля		Достоверность различий	
	открытые глаза	закрытые глаза	открытые глаза	закрытые глаза	ОГ–ОГ	ЗГ–ЗГ
ЧСС – частота сердечных сокращений (уд/мин)	77 [71; 94]	**82 [73; 98]	89 [78; 99]	**94 [82; 101]	p_u<0,01	p_u<0,05
ИН – индекс напряжения (у.е.)	122 [61; 308]	**198 [79; 378]	216 [131; 349]	*291 [160; 576]	p_u<0,01	p_u<0,05
RMSSD – кв. корень из суммы разностей ряда кардиоинтер. (мс)	32 [18; 58]	**30 [14; 51]	22 [14; 31]	**20 [13; 28]	p_u<0,05	p_u<0,05
Total – общий спектр мощности (мс^2)	2458 [1332; 3921]	*1848 [1102; 2874]	1914 [1018; 3291]	*1384 [716; 2693]	p_u>0,05	p_u>0,05
VLF – очень низкочастотные волны (мс^2)	679 [284; 854]	311 [126; 790]	469 [209; 872]	291 [129; 604]	p_u>0,05	p_u>0,05
LF – низкочастотные волны (мс^2)	812 [555; 1734]	780 [261; 1314]	716 [456; 1645]	651 [298; 1425]	p_u>0,05	p_u>0,05
HF – высокочастотные волны (мс^2)	544 [219; 1403]	*391 [121; 1012]	254 [139; 662]	252 [112; 437]	p_u<0,05	p_u>0,05

Примечание: p_u – достоверность межгрупповых различий по U-критерию Манна–Уитни между показателями вариабельности сердечного ритма; * – достоверность внутригрупповых различий (* – p<0,05, ** – p<0,01).

Большинство рассматриваемых показателей спектрального анализа сердечного ритма при выполнении теста Ромберга не имело достоверных различий в значениях между двумя исследуемыми группами. Для обеих групп было характерно преобладание в спектре низкочастотных и очень низкочастотных компонентов (VLF, LF), что говорит о напряженном функционировании их вегетативных регуляторных механизмов. Однако более благоприятная тенденция отмечается у представителей основной группы, поскольку значения показателей Total и HF в стойке с ОГ у них были выше на 28% (p<0,05) и 114% (p<0,05) соответственно по сравнению с таковыми у представителей группы контроля. В совокупности со стабилометрическими результатами теста Ромберга это свидетельствует о более экономном уровне функционирования вегетативного регуляторного звена, который сопровождается более эффективным поддержанием ПБ. Отключение зрительного контроля в обеих группах приводило к снижению мощности волн различных частот, однако достоверные различия в изменении их значений выявлены лишь по показателю HF в основной группе (снижение на 28%; p<0,05). Вместе с этим следует отметить, что значения показателя LF у представителей основной группы при переходе к стойке с ЗГ снижались лишь на 4%. Напротив, у представителей группы контроля практически не наблюдалось изменений в значениях показателя HF, что указывает на сохранение относительно высокой активности парасимпатического звена ВНС по данным спектрального анализа у этой группы при переходе к стойке с ЗГ. Таким образом, учитывая, что футболисты характеризовались лучшими результатами в тесте Ромберга, можно предположить, что для обеспечения эффективного поддержания ПБ в усложненных условиях необходимо сохранение высокой активности симпатического отдела ВНС и, напротив, снижение парасимпатических влияний, которые были выявлены у футболистов.

Важно отметить, что текущий уровень ВРСР, который зафиксирован в основной группе и группе контроля при выполнении теста Ромберга, связан не только с выполняемой деятельностью, но во многом зависит от исходного типа ВРСР. Следовательно, одним из актуальных направлений дальнейших исследований является изучение особенностей поддержания позы у спортсменов конкретного вида спорта с различными исходными типами ВРСР.

По результатам анализа показателей ВСР можно заключить, что у футболистов отмечается более оптимальный, с позиции экономизации, уровень ВРСР как в простой стойке с ОГ, так и в усложненных отсутствием зрительной информации условиях. Несмотря на то, что в обеих группах преобладают низкочастотные и очень низкочастотные компоненты модуляции сердечного ритма, у футболистов выявлена более высокая активность парасимпатического отдела ВНС, а также меньшая централизация в управлении ритмом сердца. Переход к поддержанию ПБ в усложненных условиях у футболистов, по данным спектрального анализа ритма сердца, сопровождался значительным снижением парасимпатических влияний и, напротив, сохранением активности симпатического звена ВНС, что, вероятно, отражает более оптимальный уровень вегетативной регуляции, который способствует эффективному поддержанию ПБ. Такие особенности ВРСР, по-видимому, являются проявлением долговременных адаптационных перестроек, обусловленных спецификой спортивной деятельности футболистов, и направлены на максимально эффективное функционирование их организма.

Заключение. Таким образом, проведен анализ стабилометрических показателей, а также текущего уровня ВРСР при выполнении теста Ромберга у футболистов по сравнению со студентами-сверстниками, которые не занимаются спортом. В результате у футболистов определен более высокий уровень поддержания ПБ при выполнении теста Ромберга. Этот более высокий уровень у футболистов проявляется в меньшей скорости и площади перемещений ЦД, причем как в стойке с открытыми глазами, так и с закрытыми, а также в лучшей устойчивости во фронтальной плоскости, которая была выявлена при отключении зрительного контроля. По данным показателя площади перемещений ЦД у футболистов отмечается меньшее снижение эффективности поддержания ПБ в усложненных отсутствием зрительной афферентной информации условиях, чем у студентов, не занимающихся спортом.

Уровень текущей ВРСР у футболистов характеризовался меньшей текущей активностью центрального контура в управлении ритмом сердца независимо от включения в постуральный контроль зрительной сенсорной системы по сравнению со студентами, которые не занимаются спортом. Депривация зрительного анализатора в обеих исследуемых группах сопровождалась повышением централизации в регуляции сердечным ритмом. По данным спектрального анализа сердечного ритма установлено, что при отключении зрительного контроля у футболистов наблюдается сохранение высокой симпатической активности и, напротив, значительное снижение активности парасимпатического отдела ВНС. Подобную направленность изменений в текущей ВРСР у спортсменов, вероятно, можно рассматривать как необходимое условие, играющее важную роль для эффективного постурального контроля в усложненных условиях поддержания позы.

Полученные в настоящей работе данные предоставляют новую информацию об особенностях функционирования постуральной системы у спортсменов-футболистов, а также о важной роли в этом процессе вегетативного регуляторного звена, которое участвует в обеспечении срочной адаптации при усложнении условий поддержания позы. Результаты исследования могут быть полезны для оценки уровня поддержания ПБ у футболистов, а также при разработке методик, направленных на развитие способности к поддержанию позы в статических и динамических условиях.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Б23М-038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Heil, J. The Influence of Physical Load on Dynamic Postural Control–A Systematic Replication Study / J. Heil, S. Schulte, D. Busch // Journal of Functional Morphology and Kinesiology. – 2020. – Vol. 5, № 4. – P. 100. Doi: 10.3390/jfmk5040100.
2. Тришин, А.С. Особенности постурального контроля у высококвалифицированных спортсменов в ситуационных видах спорта при воздействии латерализованных факторов / А.С. Тришин, Е.С. Тришин, Е.М. Бердичевская [и др.] // Асимметрия. – 2015. – Т. 9, № 1. – С. 4–12.
3. Гудков, А.Б. Постуральный баланс у пожилого человека на Севере / А.Б. Гудков, А.В. Демин, А.В. Грибанов. – Архангельск: Соломбальская типография, 2014. – 196 с.
4. Грибанов, А.В. Физиологические механизмы регуляции постурального баланса человека (обзор) / А.В. Грибанов, А.К. Шерстенникова // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Сер.: Медико-биологические науки. – 2013. – № 4. – С. 20–29.
5. Зинурова, Н.Г. Особенности регуляции артериального давления у спортсменов различных видов спорта в зависимости от степени статокинетической устойчивости / Н.Г. Зинурова, Е.В. Быков, А.В. Чипышев // Фундаментальные исследования. – 2014. – Т. 7, № 12. – С. 1433–1436.
6. Мельников, А.А. Сравнение постуральной устойчивости у спортсменов с разной направленностью тренировочного процесса / А.А. Мельников // Физическое воспитание и спортивная тренировка. – 2019. – № 2(28). – С. 60–71.
7. Vuillerme, N. The effect of expertise in gymnastics on postural control / N. Vuillerme, F. Danion, L. Marin [et al.] // Neuroscience letters. – 2001. – Vol. 303, № 2. – P. 83–86. Doi: 10.1016/S0304-3940(01)01722-0.
8. Лекомцев, Д.Ф. Стабилометрические показатели футболистов различного игрового амплуа / Д.Ф. Лекомцев // Актуальные проблемы теории и практики физической культуры, спорта и туризма: материалы VI Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых, аспирантов, магистрантов и студентов, Казань, 24 апр. 2018 г. / Поволжс. гос. акад. физической культуры, спорта и туризма; под общ. ред. Ф.Р. Зотовой. – Казань, 2018. – С. 569–571.
9. Гаврилова, Е.А. Ритмокардиография в спорте: монография / Е.А. Гаврилова. – СПб.: Изд-во СЗГМУ им. И.И. Мечникова, 2014. – 164 с.
10. Переверзев, В.А. Физиология вегетативной нервной системы / В.А Переверзев, А.И. Кубарко. – Минск: МГМИ, 1995. – 25 с.
11. Horak, F.B. Postural orientation and equilibrium: what do we need to know about neural control of balance to prevent falls? / F.B. Horak // Age and Ageing. – 2006. – Vol. 35, № S2. – P. 7. Doi: 10.1093/ageing/afl077.
12. Назаренко, А.С. Влияние специфики спортивной деятельности на статокинетическую устойчивость высококвалифицированных спортсменов / А.С. Назаренко, Ф.А. Мавлиев // Наука и спорт: современные тенденции. – 2018. – Т. 21, № 4. – С. 37–43.
13. Назаренко, А.С. Корреляции функции равновесия тела с антропометрическими показателями у спортсменов / А.С. Назаренко, Ф.А. Мавлиев, Н.Ш. Хаснутдинов // Известия Тульского государственного университета. Физическая культура. Спорт. – 2016. – № 2. – С. 150–157.

REFERENCES

1. Heil, J. The Influence of Physical Load on Dynamic Postural Control–A Systematic Replication Study / J. Heil, S. Schulte, D. Busch // Journal of Functional Morphology and Kinesiology. – 2020. – Vol. 5, № 4. – P. 100. Doi: 10.3390/jfmk5040100.
2. Trishin A.S., Trishin Ye.S., Berdichevskaya Ye.M., Katrich L.V. Asimmetriya [Asymmetry], 2015, 9(1), p. 4–12.
3. Gudkov A.B., Demin A.V., Gribanov A.V. Posturalny balans u pozhilogo cheloveka na Severe [An Elderly Person's Postural Balance in the North], Arkhangelsk: Solombalskaya tipografiya, 2014, 196 p.
4. Gribanov A.V., Sherstennikova A.K. Vestnik Severnogo (Arkticheskogo) federalnogo universiteta. Ser.: Mediko-biologicheskiye nauki [Bulletin of the Northern (Arctic) Federal University. Ser.: Biomedical Sciences], 2013, 4, pp. 20–29.
5. Zinurova N.G., Bykov Ye.V., Chipyshev A.V. Fundamentalnyye issledovaniya [Basic Research], 2014, 7(12), pp. 1433–1436.
6. Melnikov A.A. Fizicheskoye vospitaniye i sportivnaya trenirovka [Physical Education and Sports Training], 2019, 2(28), pp. 60–71.
7. Vuillerme, N. The effect of expertise in gymnastics on postural control / N. Vuillerme, F. Danion, L. Marin [et al.] // Neuroscience letters. – 2001. – Vol. 303, № 2. – P. 83–86. Doi: 10.1016/S0304-3940(01)01722-0.
8. Lekomtsev D.F. Aktualnyye problemy teorii i praktiki fizicheskoy kultury, sporta i turizma: materialy VI Vseros. nauch.-prakt. konf. molodykh uchenykh, aspirantov, magistrantov i studentov, Kazan, 2018 g. [Currentl Issues of the Theory and Practice of Physical Education, Sports and Tourism: Proceedings of the VI All-Russian. Scientific-Practical. Conf. of Young Scientists, Graduate Students, Undergraduates and Students, Kazan, 2018], Kazan, 2018, pp. 569–571.
9. Gavrilova Ye.A. Ritmokardiografiya v sporte [Rhythmocardiography in Sports], SPb.: Izd-vo SZGMU im. I.I. Mechnikova, 2014, 164 p.
10. Pereverzev V.A., Kubarko A.I. Fiziologiya vegetativnoy nervnoy sistemy [Physiology of the Autonomic Nervous System], Minsk: MGMI, 1995, 25 p.
11. Horak, F.B. Postural orientation and equilibrium: what do we need to know about neural control of balance to prevent falls? / F.B. Horak // Age and Ageing. – 2006. – Vol. 35, № S2. – P. 7. Doi: 10.1093/ageing/afl077.
12. Nazarenko A.S., Mavliyev F.A. Nauka i sport: sovremennyye tendentsii [Science and Sport: Current Trends], 2018, 21(4), pp. 37–43.
13. Nazarenko A.S., Mavliyev F.A., Khasnutdinov N.Sh. Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo Universiteta. Fizicheskaya kultura. Sport [News of Tula State University. Physical Education. Sport], 2016, 2, pp. 150–157.

Поступила в редакцию 31.03.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: nickoknick@mail.ru – Тишутин Н.А.

ПЕДАГОГІКА

УДК 796.011.3:796.07(476.5)

О РОЛИ ФАКУЛЬТЕТА ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ И СПОРТА В РАЗВИТИИ СПОРТА НА ВИТЕБЩИНЕ

Н.В. Минина, О.Н. Малах, Ю.В. Гапоненок, А.А. Синютич
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Сегодня на первом месте перед обществом и учреждениями образования стоит задача формирования гражданственности и патриотизма. Победы и успешные выступления наших спортсменов на международных соревнованиях способствуют формированию патриотического поведения, гордости за страну, прославлению Республики Беларусь во всем мире.

Цель исследования – показать спортивные достижения выдающихся спортсменов факультета физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова.

Материал и методы. *Анализу были подвергнуты данные о выступлениях студентов-выпускников ФФКиС.*

Результаты и их обсуждение. *В начале учебного года при изучении дисциплины «История физической культуры и спорта» было проведено анкетирование студентов первого курса ДФПО по проверке знаний об известных белорусских чемпионах и призерах Олимпийских игр. Из 68 человек опрошенных лишь 6 студентов назвали известных спортсменов. С целью повышения знаний о выдающихся спортсменах Республики Беларусь и выпускниках ФФКиС были составлены таблицы о достижениях отечественных спортсменов в составе сборной СССР и сборной Республики Беларусь на летних и зимних Олимпийских играх. Для повышения качества образования по физической культуре и спорту в учебную деятельность внедрено одно из средств информационно-коммуникационных технологий – виртуальный музей спортивной славы.*

Заключение. *За период деятельности факультет физической культуры и спорта внес большой вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов. Гордостью факультета являются его выпускники – выдающиеся спортсмены, победители и призеры Олимпийских игр, мировых и европейских чемпионатов.*

Ключевые слова: *спорт, Олимпийские игры, история физической культуры, патриотизм, музей спортивной славы.*

ON THE ROLE OF THE FACULTY OF PHYSICAL EDUCATION AND SPORTS IN THE DEVELOPMENT OF SPORTS IN VITEBSK REGION

N.V. Minina, O.N. Malakh, Yu.V. Gaponenok, A.A. Sinyutich
Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

Today, the society and education establishments are faced with the task of shaping citizenship and patriotism. Victories and successful performances of our athletes at international competitions contribute to the shaping of patriotic behavior, pride in the country, and the glorification of the Republic of Belarus throughout the world.

The purpose of the study is to show the sporting achievements of outstanding athletes of Vitebsk State P.M. Masherov University Faculty of Physical Education and Sports.

Material and methods. *Data on the performances of graduate students of Faculty of Physical Education and Sports were analyzed.*

Findings and their discussion. *At the beginning of the academic year, when studying the discipline "History of Physical Education and Sports", a survey was conducted among first-year students of the Far Eastern Federal Professional Education School to test knowledge about famous Belarusian champions and prize-winners of the Olympic Games. Of the 68 people interviewed, only 6 students named famous athletes. In order to increase knowledge about the outstanding athletes of the Republic of Belarus and graduates of Faculty of Physical Education and Sport, tables were compiled on the achievements of Belarusian athletes in the USSR national team and the national team of the Republic of Belarus at summer and winter Olympic Games. In order to improve the quality of education in physical training and sports, one of the means of information and communication technologies was introduced into educational activities – the virtual museum of Sports Glory.*

Conclusion. *During the period of its activity, Faculty of Physical Education and Sports made a great contribution to the training of highly qualified specialists. The pride of the faculty is its graduates – outstanding athletes, winners and prize-winners of the Olympic Games, world and European championships.*

Key words: *sport, Olympic Games, history of physical education, patriotism, Sports Glory Museum.*

В 2023 году Витебская область отмечает свое 85-летие. Такое знаковое событие является поводом еще раз напомнить о значении Придвинского региона в истории страны, рассказать о том вкладе, который вносит он в целом и каждый его житель в отдельности в социально-экономическое и гуманитарное развитие государства.

Среди достижений особое место занимает отрасль физической культуры и спорта. Именно в Витебске впервые в истории Беларуси создано общество любителей велосипедов в 1894 году и открыт яхт-клуб в 1898 г. [1].

В настоящее время в городе Витебске и области имеются современные спортивные сооружения, такие как ЦСК «Динамо», ледовый дворец. Высокие достижения и победы спортсменов Витебщины способствуют формированию патриотического поведения, гордости за страну, прославлению Республики Беларусь во всем мире.

В юбилейный год на факультете физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова запланированы различные мероприятия: творческие встречи, культурно-массовые мероприятия, дни факультета, проведение международной научно-практической конференции, спортивные старты, выпуск альбома о спортсменах.

Большую роль в патриотическом воспитании студентов факультета играет знакомство студентов с достижениями выдающихся спортсменов региона, являющимися чемпионами и призерами Олимпийских игр, чемпионами мира и Европы, кем по праву гордятся область и республика.

Цель исследования – показать спортивные достижения выдающихся спортсменов факультета физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова.

Материал и методы. Анализу были подвергнуты данные о выступлениях студентов-выпускников ФФКиС. В работе использовались следующие методы исследования: теоретический анализ и обобщение литературных источников, педагогическое наблюдение, анкетирование, математической статистики.

Результаты и их обсуждение. В 1978 году на базе Витебского техникума физической культуры был открыт факультет физического воспитания Витебского государственного педагогического института им. С.М. Кирова. Сегодня ФФКиС – это передовой, динамично развивающийся образовательный центр, готовящий специалистов-педагогов для преподавательской и научной деятельности в сфере физической культуры и спорта Республики Беларусь и других стран. Учебный процесс на факультете обеспечивают 3 кафедры: теории и методики физической культуры и спортивной медицины; спортивно-педагогических дисциплин; физического воспитания и спорта.

В здании учебного корпуса расположены современные аудитории, компьютерный класс, тренажерный зал, залы легкой атлетики, гимнастики, спортивных игр, библиотека, медпункт, столовая.

Профессорско-преподавательский состав отвечает за подготовку настоящих профессионалов по специальности «Физическая культура». Имеются специализации: тренерская работа по виду спорта (с указанием вида спорта); физкультурно-оздоровительная и туристско-рекреационная деятельность; менеджмент спорта и туризма [2].

За годы существования факультета подготовлено большое количество специалистов по физической культуре, здесь обучались, а потом защищали честь страны на соревнованиях различного уровня более 80 мастеров спорта, чемпионы и призеры чемпионатов мира, Европы, победители и призеры Олимпийских игр.

Профессиональная подготовка позволяет выпускникам факультета добиваться серьезных результатов в любой избранной ими сфере деятельности. И, конечно же, прославлять факультет, город и страну. В летопись мирового, советского и белорусского спорта навсегда вписаны имена Игоря Каныгина, Вячеслава Яновского, Виктора Зуева, Геннадия Олещука, Сергея Лавренова, Кирилла Воробья, Александра Дегтярева и др.

В ВГУ имени П.М. Машерова в 2005 году был создан музей олимпийской славы ФФКиС. Экспозиция имела несколько разделов: история возникновения Олимпиады, выпускники факультета – призеры Олимпийских игр и спортивные достижения студентов ФФКиС. Музей являлся культурно-просветительским, учебно-научным и воспитательным подразделением факультета. Музей был призван экспонировать и пропагандировать все ценное, что относится к истории развития спорта ФФКиС, истории развития физической культуры и спорта на Витебщине. Среди экспонатов находились документы, которые отражали процесс становления факультета и его развитие в разные годы, информацию по истории кафедр, фотографии, сведения про известных выпускников института. Многие экспонаты передали выпускники. Специально для музея были сделаны фотокопии документов.

Музей активно проводил научно-экспозиционную деятельность. Постоянными его посетителями являлись студенты университета, школьники, абитуриенты, участники ежегодно проводимой международной научно-практической конференции «Инновационные формы и практический опыт физического воспитания детей и учащейся молодежи», приезжающие из различных городов Беларуси и России.

В связи с реконструкцией холла помещение музея было ликвидировано. Актуальным стал вопрос о создании виртуального музея спортивной славы.

Учебным планом I курса ФФКиС всех специальностей дневной и заочной форм получения образования предусмотрено изучение дисциплины «История физической культуры и спорта». В начале учебного года было проведено анкетирование студентов первого курса ДФПО по проверке знаний об известных белорусских чемпионах и призерах Олимпийских игр. Из 68 человек опрошенных лишь 6 студентов (в основном которые специализируются в данных видах спорта или являются участниками предметной олимпиады по физической культуре) назвали Игоря Каныгина, Вячеслава Яновского, Виктора Зуева, Дарью Домрачеву, Андрея Арямнова, Александра Медведя. О том, что из перечисленных выдающихся спортсменов И. Каныгин, В. Яновский, В. Зуев являются выпускниками нашего факультета, студенты информацией не владели. Спортсменку Дарью Домрачеву, которая получила звание Героя Республики Беларусь, упомянули только 10 человек.

За спортивными достижениями спортсменов страны не следят 35% опрошенных, 80% интересуются только своим видом спорта, 9% респондентов, как правило лица, участвующие в предметной олимпиаде по физической культуре, имеют познания о всех спортсменах и их достижениях.

Все анкетируемые ответили, что используют в учебе сеть Интернет.

С целью повышения знаний о выдающихся спортсменах Республики Беларусь и выпускниках ФФКиС нами были составлены таблицы «Достижения белорусских спортсменов в составе сборной СССР на летних и зимних Олимпийских играх» и «Чемпионы и призеры летних Олимпийских игр – спортсмены Республики Беларусь (1996–2022)». Данный материал был размещен в образовательной среде Moodle newsdo.vsu.by / Факультет физической культуры и спорта / История физической культуры и спорта.

На протяжении нескольких практических занятий по разделу «Отечественная физическая культура и спорт» проводился опрос по содержанию таблиц. В январе перед экзаменом нами был проведен письменный опрос. Результаты исследования свидетельствуют, что 69% студентов показали хорошие знания и дали правильные ответы на предложенные вопросы.

В настоящее время для повышения качества образования по физической культуре и спорту необходимо внедрение в учебную деятельность различных средств информационно-коммуникационных технологий. Нами был собран материал о выпускниках ФФКиС – победителях и призерах Олимпийских игр, чемпионатов мира и Европы, который лег в основу виртуального музея. Информация подготовлена и представлена в наглядной форме с использованием возможностей компьютерной визуализации. Создание музея будет способствовать более успешному изучению дисциплины «История физической культуры и спорта».

Нокопленный материал о выдающихся спортсменах используется также при разработке конкурсных заданий для областной олимпиады по предмету «Физическая культура и здоровье». Абитуриенты во время проведения Недели факультета традиционно на лекции-презентации знакомятся с выдающимися выпускниками факультета.

Полученный в результате исследования материал был систематизирован на две группы:

– спортсмены ВГУ имени П.М. Машерова – победители и призеры Олимпийских игр;

– спортсмены ВГУ имени П.М. Машерова – победители и призеры чемпионатов мира и Европы, участники Олимпийских игр.

1-я группа. Спортсмены ВГУ имени П.М. Машерова – победители и призеры Олимпийских игр

Каныгин Игорь Владимирович. Родился 6 июня 1956 года в г. Витебске. Белорусский и советский борец классического (греко-римского) стиля. Заслуженный мастер спорта СССР (1981), до 90 кг. На протяжении многих лет капитан сборной СССР. В 1980 году выиграл свой первый чемпионат СССР, стал чемпионом Европы. На Олимпийских играх 1980 года завоевал серебряную награду. На Играх Дружбы-84 выиграл золото. В 1985 году победитель турнира «Абсолютный чемпионат мира» в Японии. Трехкратный чемпион мира (1981, 1983, 1985); серебряный призер чемпионата мира в 1985 году и бронзовый в 1982 г. Четырехкратный обладатель Кубка мира (1982, 1984, 1985, 1986); четырехкратный чемпион Европы (1980, 1982, 1983, 1985), в 1984 г. стал серебряным призером. Четырехкратный чемпион СССР (1980, 1982, 1984, 1987). Награжден орденом Дружбы народов (1985), медалью «За трудовую доблесть» (1980). Ученик заслуженного тренера СССР Владимира Николаевича Изопольского. Ежегодно в городе Витебске проводится Международный турнир по греко-римской борьбе на призы Игоря Каныгина, который является финальным этапом формирования национальной команды для участия на чемпионатах мира. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение дневного обучения, выпуск 1988 г.

Яновский Вячеслав Евгеньевич. Родился 24 августа 1957 года в г. Витебске. Советский и белорусский боксер. Заслуженный мастер спорта СССР (1988). Вячеслав Яновский начал заниматься боксом в 13 лет у заслуженного тренера СССР Валерия Георгиевича Кондратенко. В 1981 году попал в сборную Советского Союза. В 1985 году был признан лучшим боксером турнира СССР–США. В том же году стал бронзовым призером первенства Европы. В 1987 году завоевал Кубок мира по боксу, серебряный призер первенства Европы. В 1988 году стал олимпийским чемпионом, а по итогам года вошел в список лучших спортсменов БССР. В. Яновский – единственный советский олимпийский чемпион Игр в Сеуле в боксе. Позже, после распада СССР, он оказался и последним советским олимпийским чемпионом по боксу. После 1989 года завершил карьеру в любительском боксе и перешел в профессионалы. 6-кратный чемпион Японии, чемпион Германии среди профессионалов.

К 1997 году, после завершения карьеры, имел результат в 30 побед, 1 ничью и только 1 поражение. В 1998–2000 гг.– президент Федерации бокса Республики Беларусь. Кавалер ордена «Знак Почета» (1988). Почетный гражданин Витебска (1988). В Витебске боксерский клуб назван именем Вячеслава Яновского [3]. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение дневного обучения, выпуск 1985 г.

Лавренов Сергей Петрович. Родился 1 февраля 1972 года в г. Витебске. Начинал заниматься тяжелой атлетикой у тренера И.А. Баранова. В 1992 году стал бронзовым призером чемпионата Европы в Сексарде. Наиболее значимых успехов добился в 2000 году, завоевав звание чемпиона Европы и выиграв бронзовую медаль Олимпийских игр в Сиднее. В 2004 году был бронзовым призером чемпионата Европы в Киеве и участником Олимпийских игр в Афинах, где занял 6-е место. До 2001 года обучался на юридическом факультете ВГУ имени П.М. Машерова, отделение дневного обучения.

Олещук Геннадий Витальевич. Родился 29 июня 1975 года в г. Бобруйске. В 2000 году на Олимпийских играх в Сиднее занял четвертое место, но после дисквалификации болгарского атлета Севдалина Минчева получил бронзовую медаль. В 2001 году, установив мировой рекорд в толчке, завоевал звание чемпиона мира. В 2003 году на чемпионате мира в Ванкувере показал третий результат, однако был уличен в использовании запрещенных препаратов и дисквалифицирован на 2 года. В 2006 году после истечения срока дисквалификации перешел в более тяжелую весовую категорию и на чемпионате Европы во Владыславово показал лучший результат, но снова не смог пройти допинг-контроль, был лишен золотой медали и вновь подвергся дисквалификации. С 2013 года исполняет обязанности заместителя председателя совета Бобруйской городской организационной структуры БФСО «Динамо» [4]. Окончил факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, отделение заочного обучения, выпуск 2003 г.

Стукалова Татьяна Сергеевна. Родилась 3 октября 1975 года в г. Витебске. Белорусская тяжелоатлетка, выступавшая в весовой категории до 63 килограммов. Бронзовый призер Олимпийских игр 2004 года в Афинах. Участница чемпионатов мира и Европы. Окончила факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, отделение заочного обучения, выпуск 2003 г.

Пунько Сергей Вячеславович. Родился 10 января 1981 года в г. Новополоцке Витебской области. Белорусский и российский спортсмен. Заслуженный мастер спорта Республики Беларусь (2004) и заслуженный мастер спорта России (2011). Многократный чемпион и призер Паралимпийских игр по плаванию, многократный чемпион мира и многократный чемпион России. Победитель Паралимпийских игр в плавании на дистанции 400 м вольным стилем: Афины – 2004, Пекин – 2008, Лондон – 2012. Серебряный призер: брасс 100 м, баттерфляй 100 м (Афины – 2004, Пекин – 2008), баттерфляй 100 м (Лондон – 2012). Бронзовый призер: вольный стиль 100 м, эстафета комплексным плаванием 4×100 м (Афины – 2004), комплексное плавание 200 м (Лондон – 2012).

Начал заниматься плаванием в Новополоцке. С 2002 года выступает как спортсмен с ограничениями по здоровью. Являлся спортсменом-инструктором Национальной команды Республики Беларусь по инваспорту. Впоследствии переехал в Россию. Стипендиат Президента Российской Федерации. Награды России: орден Дружбы (10 сентября 2012 года) – за большой вклад в развитие физической культуры и спорта, высокие спортивные достижения на XIV Паралимпийских летних играх 2012 года в городе Лондоне (Великобритания). Заслуженный мастер спорта России (15 декабря 2011 года). Награды Республики Беларусь: орден Почета (24 ноября 2008 года) – за достижение высоких спортивных результатов на XIII летних Паралимпийских играх 2008 года в г. Пекине (КНР), значительный вклад в развитие физической культуры и спорта. В 2004 году окончил Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, в 2008 году – Белорусский государственный экономический университет в Минске по специальности «Бизнес-менеджмент».

Зуев Виктор Валерьевич. Родился 22 мая 1983 года в г. Витебске. Белорусский боксер-любитель. Заслуженный мастер спорта Республики Беларусь (2004), серебряный призер Олимпийских игр 2004 года, участник Олимпийских игр 2008 года, двукратный бронзовый призер чемпионата мира (2003, 2009), четырехкратный призер чемпионата Европы (2002, 2004, 2010, 2013), многократный чемпион Республики Беларусь в любителях. Окончил факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, отделение дневного обучения, выпуск 2005 г.

2-я группа. Спортсмены ВГУ имени П.М. Машерова – победители и призеры чемпионатов мира и Европы, участники Олимпийских игр

Гребнев Николай Григорьевич. Родился 11 сентября 1948 года в г. Горький (РСФСР). Советский легкоатлет, специалист по метанию копья. Выступал за сборную СССР по легкой атлетике в 1970-х годах, обладатель серебряной медали чемпионата Европы, победитель Кубка Европы, победитель первенств всесоюзного и республиканского значения. Представлял город Витебск и спортивное общество «Урожай». Мастер спорта СССР международного класса.

На VI летней Спартакиаде народов СССР, прошедшей в 1975 году в Москве, с результатом 83,28 м превзошел всех соперников в метании копья и завоевал золотую медаль. Попав в состав советской сборной, выступил на Кубке Европы в Ницце – занял в своей дисциплине первое место, показав результат 84,30 метра.

В 1977 году одержал победу на Кубке Европы в Хельсинки (87,18). Представлял Советский Союз на чемпионате Европы 1978 года в Праге – здесь метнул копье на 87,82 метра и стал серебряным призером. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение дневного обучения, выпуск 1987 г.

Гришанов Николай Леонидович. Родился 7 апреля 1960 года в г. Гомеле (БССР). Советский штангист, культурист и тренер. Мастер спорта СССР международного класса (1983) по тяжелой атлетике. Шестикратный чемпион БССР и восьмикратный рекордсмен БССР по тяжелой атлетике. Мастер спорта СССР международного класса (1990) по культуризму. Чемпион Европы (1990), четырехкратный чемпион СССР, двукратный обладатель Кубка СССР (1989, 1990) по культуризму.

Николай Гришанов в 13 лет увлекся тяжелой атлетикой. К шестнадцати годам выполнял нормативы мастера спорта в легком весе. В 19 лет выполнил норматив мастера спорта СССР по тяжелой атлетике в полутяжелом весе. В 1981 году Н. Гришанов выступил на молодежных играх, где его заметил витебский тренер Владимир Смоляк, который предложил ему переехать жить и тренироваться в Витебск. За это время он выполнил норматив мастера спорта СССР международного класса, стал шестикратным чемпионом БССР по тяжелой атлетике. Однако после разрыва мышц бедра пришлось окончательно оставить тяжелую атлетику. В период с 1986-го по 1992 год Николай Гришанов стал заниматься культуризмом. Стал четырехкратным чемпионом СССР, был капитаном сборной СССР. На пике своей спортивной формы Николай имел бицепс 53 см, за что получил неофициальный статус «Лучший бицепс СССР». В 1989 году стал победителем Второй матчевой встречи СССР–США (1989) по бодибилдингу, проходившей в Ленинграде. В апреле 1990 года в этом же городе на чемпионате Европы по культуризму Николай Гришанов в составе советской сборной завоевал первое место в командном позировании. С 1983 года Николай занимается реабилитационной, тренерской и консультационной деятельностью по общей и специальной физической подготовке со спортсменами различной квалификации из различных видов спорта [5]. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение дневного обучения, выпуск 1987 г.

Поташёв Александр Анатольевич. Родился 12 марта 1962 года в г. Толочине Витебской области. Советский легкоатлет. Чемпион мира в спортивной ходьбе на 50 километров (1991). Заслуженный мастер спорта СССР (1991). Выступал за спортивный клуб «Витебск». На Олимпиаде в Сеуле Александр занял 4-е место. Александр Поташёв, обнявшись с Андреем Перловым, финишировал с ним одновременно. Но судьи по фотофинишу признали победителем Андрея. На Кубках мира по ходьбе Александр занимал 7-е и 5-е места в 1987 и 1989 годах соответственно. На Олимпийских играх 1992 года А. Поташёв выступал за объединенную команду. На дистанции в 50 километров за нарушение правил он был дисквалифицирован. Через год на чемпионате мира он выступал за Республику Беларусь и также был снят с дистанции. Еще через год, на чемпионате Европы 1994 г., Александра вновь дисквалифицировали. В настоящее время живет в Германии. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение дневного обучения, выпуск 1984 г.

Тумилович Александр Владимирович. Родился в 1962 году в г. Витебске. Заслуженный мастер спорта (1985), чемпион мира по спортивной гимнастике в командном зачете. Чемпион СССР (1981 – конь). Серебряный (1985 – вольные упражнения; 1984–1986 – конь) и бронзовый (1984 – перекладина) призер чемпионатов СССР. Бронзовый призер Кубка СССР (1984 – многоборье). Выступал за «Динамо» (Витебск). Александр Тумилович награжден медалью «За трудовое отличие», двумя грамотами Верховного Совета БССР. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение заочного обучения, выпуск 1983 г.

Будько Владимир Иванович. Родился 4 февраля 1965 года в г. Витебске. Белорусский спортсмен, выступавший за Советский Союз, специалист в беге на 400 метров с барьерами. Является рекордсменом Европы среди юниоров в беге на 400 метров с барьерами. Занимался легкой атлетикой в Витебске, выступал за Белорусскую ССР и физкультурно-спортивное общество «Динамо». Первого серьезного успеха на международном уровне добился в сезоне 1983 года, когда вошел в состав советской сборной и выступил на юниорском европейском первенстве в Швехате, где выиграл серебряную медаль в беге на 400 метров с барьерами и бронзовую медаль в эстафете 4×400 метров. Рассматривался в качестве кандидата на участие в летних Олимпийских играх в Лос-Анджелесе в 1984 г., однако Советский Союз бойкотировал данные соревнования по политическим причинам. Вместо этого В. Будько выступил на альтернативном турнире «Дружба–84» в Москве – завоевал здесь серебряную награду. В 1989 году был третьим на Кубке Европы в Гейтсхеде и вторым на Всемирной Универсиаде [6]. После распада СССР прекратил спортивную карьеру. Окончил факультет физического воспитания ВГПИ имени С.М. Кирова, отделение дневного обучения, выпуск 1986 г.

Хлюстова Ирина Николаевна. Родилась 25 августа 1978 года в городе Лунинец Брестской области. Белорусская легкоатлетка, специалист по бегу на 400 м. Выступала за сборную Республики Беларусь по легкой атлетике в 2000–2013 годах, обладательница серебряной медали чемпионата мира в помещении, двукратная чемпионка Европы в помещении, победитель и призер первенств национального значения, рекордсменка страны в эстафете 4×400 метров в помещении, участница Олимпийских игр. Мастер спорта Республики Беларусь международного класса.

Занималась легкой атлетикой в Витебске. Будучи студенткой, представляла страну на Универсиаде в Пекине, где в эстафете 4×400 метров выиграла бронзовую медаль. На Олимпийских играх в Пекине в 2008 году стала в эстафетной программе четвертой, но в конечном счете члена их команды Светлану Усович дисквалифицировали за допинг, в итоге показанный на Играх результат был отменен. Окончила Витебское училище олимпийского резерва (1995) и факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, отделение дневного обучения, выпуск 2003 г.

Доманцевич Марина Францевна. Родилась 10 февраля 1984 года в агрогородке Деревное в Столбцовском районе Минской области. Белорусская легкоатлетка, специалистка по бегу на длинные дистанции и марафону. Выступает за сборную Республики Беларусь по легкой атлетике с 2010 года, победитель и призер ряда крупных международных забегов на шоссе, участница летних Олимпийских игр в Рио-де-Жанейро. Мастер спорта Республики Беларусь международного класса. В 2017 году, несмотря на падение, выиграла забег на 56 км «Два океана» в Кейптауне. На чемпионате Европы 2018 года в Берлине финишировала в марафоне четвертой, установив свой личный рекорд в данной дисциплине – 2:27:44. В рамках Кубка Европы выиграла женское командное первенство, суммарное время нашей команды стало рекордом соревнований. Помимо спортивной карьеры работает тренером в тренажерном зале, основательница клуба любителей бега в Новополоцке.

Обучается на факультете физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, отделение заочного обучения, I курс.

Герасимова (Тишутина) Алеся Александровна. Родилась 22 декабря в 1989 году в г.п. Россоны Витебской области. Мастер спорта Республики Беларусь (2005) по легкой атлетике (прыжки в высоту). Победитель и призер чемпионатов и Кубков Республики Беларусь в помещении и на улице по легкой атлетике, победитель международных матчевых встреч: Россия–Украина–Беларусь–Латвия, серебряный призер IV Балтийских игр (Польша, 2005), бронзовый призер матчевых встреч Беларусь–Польша-Украина (2007), Россия–Украина–Беларусь–Латвия–Турция (2008); участница Кубка Европы (2006); участница чемпионата мира среди юниоров (2006). Рекордсменка Республики Беларусь среди девушек до 18 лет по прыжкам в высоту. Окончила Витебское государственное училище олимпийского резерва (выпуск 2003 г.) и факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, дневная форма обучения, выпуск 2013 г., магистратуру в 2023 году.

Шкерманкова Марина Ивановна. Родилась 9 апреля 1990 года в г. Глубокое Витебской области. Белорусская тяжелоатлетка, бронзовый призер чемпионата Европы (2013), заслуженный мастер спорта Республики Беларусь (2012). В начале спортивной карьеры занималась легкой атлетикой (тройной прыжок и метание копья). Затем поступила в училище олимпийского резерва, и уже в Витебске начала заниматься тяжелой атлетикой у тренера Виктора Винника. Двукратная чемпионка Европы среди юниоров (2009, 2010), серебряный призер молодежного чемпионата Европы–2009, бронзовый призер молодежного чемпионата Европы–2011. Бронзовый призер на летних Олимпийских играх в Лондоне по тяжелой атлетике среди женщин (вес до 69 кг) – первая медаль белорусской сборной на этих Играх. В октябре 2016 года была лишена бронзовой награды Игр за применение запрещенных препаратов. Окончила факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, отделение заочного обучения, выпуск 2013 г.

Дегтярева Александра Игоревна. Родилась 26 июня 1999 года в Республике Молдова. Мастер спорта Республики Беларусь по плаванию и спортивному зимнему плаванию. Победитель этапа Кубка мира по спортивному зимнему плаванию 2018, 2019 гг. Многократная чемпионка и рекордсменка Республики Молдова (2009–2015). Победитель и призер открытых чемпионатов Украины (2010–2013). Полуфиналистка Европейского юношеского олимпийского фестиваля (ЕЮОФ) в г. Утрехт, Голландия (2013). Участница Балканских игр (2014, 2015). Многократный победитель и призер открытых чемпионатов Республики Беларусь по плаванию (2015–2017). Многократный победитель этапов Кубка мира по спортивному зимнему плаванию (2018–2019) в Таллинне (Эстония), Петрозаводске (Российская Федерация). Чемпионка открытых чемпионатов г. Минска и г. Бреста по спортивному зимнему плаванию (2018–2019). Финалистка в марафонском заплыве на дистанцию 10 км в открытой воде – г. Ухань (Китай). Окончила факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, дневная форма обучения, выпуск 2021 г.

Воробей Кирилл Сергеевич. Родился 5 ноября 1999 года в г. Верхнедвинске Витебской области. Мастер спорта международного класса по кикбоксингу. Четырехкратный призер чемпионата мира (2016) в Дублине (Ирландия), (2018, 2021) в Венеции (Италия), Боснии и Герцеговине (2019).

Чемпион Европы по кикбоксингу (2019) в Риге (Латвия). С января 2022 года – стипендиат Президентского спортивного клуба. Окончил факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, дневная форма обучения, выпуск 2021 г., магистратуру в 2022 г.

Курбачёв Вадим Александрович. Родился 17 января 2001 года в д. Кировская Витебского района. Мастер спорта Республики Беларусь по боксу, двухкратный бронзовый призер первенства Европы по боксу 2018, 2019 гг. Окончил факультет физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, дневная форма обучения, выпуск 2021 г.

Стельмахов Владислав Алексеевич. Родился 24 июня 2002 года в г. Витебске. Мастер спорта Республики Беларусь по боксу. Победитель Республики Беларусь (2018), призер чемпионата Европы в Анапе (2018). Многократный призер чемпионатов Республики Беларусь. Студент IV курса факультета физической культуры и спорта ВГУ имени П.М. Машерова, дневная форма обучения.

Заключение. Спорт и физическая культура обладают огромным воспитательным потенциалом, являются мощнейшим механизмом в формировании таких мировоззренческих оснований личности, как гражданственность и патриотизм [7].

ФФКиС занимает главное место в подготовке специалистов-педагогов для преподавательской, научной и спортивной деятельности. За указанный период факультет внес большой вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов, которые плодотворно трудятся во всех уголках Витебщины и Республики Беларусь. Гордостью факультета являются его выпускники – выдающиеся спортсмены, победители и призеры Олимпийских игр, европейских и мировых чемпионатов.

Сегодня факультет – один из ведущих в университете, динамично развивается в последние годы. Накопленный опыт, квалифицированный профессорско-преподавательский состав, сложившиеся традиции и созданные благоприятные условия для творческой реализации позволяют вывести факультет на передовые позиции в отечественном физкультурном образовании и спорте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Минина, Н.В. История физической культуры и спорта: отечественная история физической культуры и спорта: исторические факты, события, личности: курс лекций [Электронный ресурс] / Н.В. Минина, Е.М. Нахаева. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2022. – С. 58–61. – Режим доступа: https://rep.vsu.by/handle/123456789/32283. – Дата доступа: 06.04.2023.
2. Минина, Н.В. Роль кафедры теории и методики физической культуры и спортивной медицины в подготовке физкультурных кадров [Электронный ресурс] / Н.В. Минина, А.А. Синютич // Инновационные формы и практический опыт физического воспитания детей и учащейся молодежи: сб. ст. IX Междунар. науч.-практ. конф., Витебск, 30 нояб. 2021 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: О.Н. Малах (отв. ред.) [и др.]. – Витебск, 2021. – С. 200–204. – Режим доступа: https://rep.vsu.by/handle/123456789/30531. – Дата доступа: 08.04.2023.
3. Яновский Вячеслав Евгеньевич [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Дата доступа: 07.04.2023.
4. Олещук Геннадий Витальевич [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Дата доступа: 07.04.2023.
5. Гришанов Николай Леонидович [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Дата доступа: 07.04.2023.
6. Будько Владимир Иванович [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Дата доступа: 07.04.2023.
7. Кравцов, А.П. Физическая культура и спорт как фактор патриотического воспитания студентов факультета физической культуры и спорта / А.П. Кравцов, Н.В. Минина, Е.В. Кучмарева // Инновационные формы и практический опыт физического воспитания детей и учащейся молодежи: сб. ст. IX Междунар. науч.-практ. конф., Витебск, 30 нояб. 2021 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: О.Н. Малах (отв. ред.) [и др.]. – Витебск, 2021. – С. 180–183.

REFERENCES

1. Minina N.V., Nakhayeva E.M. Istoriya fizicheskoi kulltury i sporta: otechestvennaya istoriya fizicheskoi kultury i sporta: istoricheskiye fakty, sobytiya, lichnosti: kurs lektsii [History of Physical Education and Sports: Domestic History of Physical Education and Sports: Historical Facts, Events, Personalities: A Course of lectures], Vitebsk: VGU imeni P.M. Masherova, 2022, pp. 58–61. – Available at: https://rep.vsu.by/handle/123456789/32283. – Accessed: 06.04.2023.
2. Minina N.V., Siniutich A.A. Innovatsionniye formy i prakticheski opyt fizicheskogo vospitaniya detei i uchashcheisia molodezi: sb. st. IX Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Vitebsk, 30 noyab. 2021 g. Viteb. gos. un-t [Innovation Forms and Practical Experience of Physical Education of Children and Students: A Collection of Articles of the 9th International Scientific and Practical Conference, Vitebsk, November 30, 2021, Vitebsk State University], Vitebsk, 2021, pp. 200–204. – Available at: https://rep.vsu.by/handle/123456789/30531. – Accessed: 08.04.2023.
3. Yanovski Viacheslav Yevgenyevich. – Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Accessed: 07.04.2023.
4. Oleshchuk Gennadi Vitalyevich. – Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Accessed: 07.04.2023.
5. Grishanov Nikolai Leonidovich. – Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Accessed: 07.04.2023.
6. Budko Vladimir Ivanovich. – Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki. – Accessed: 07.04.2023.
7. Kravcsov A.P., Minina N.V., Kuchmareva E.V. Innovatsionniye formy i prakticheski opyt fizicheskogo vospitaniya detei i uchashcheisia molodezi: sb. st. IX Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Vitebsk, 30 noyab. 2021 g. Viteb. gos. un-t [Innovation Forms and Practical Experience of Physical Education of Children and Students: A Collection of Articles of the 9th International Scientific and Practical Conference, Vitebsk, November 30, 2021, Vitebsk State University], Vitebsk, 2021, pp. 180–183.

Поступила в редакцию 27.04.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: mininata@mail.ru – Минина Н.В.

УДК 512:373.5:371.322.7

МЕТОДИКА ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ ТЕМЫ «РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ»

В.В. Устименко, Т.А. Александрович
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Одним из элементов системы обучения математике должен быть элемент, направленный на повторение пройденного учебного материала, его дальнейшее обобщение и систематизацию, другое его изложение.

Цель исследования – определить схему обобщающего повторения на примере темы «Решение рациональных неравенств».

Материал и методы. *Дидактический материал разработан авторами для экспериментального использования в предпрофильных классах на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей». При этом использованы эмпирические и логические методы исследования.*

Результаты и их обсуждение. *Проанализировав учебно-методическую литературу, опыт работы учителей математики, авторы пришли к выводу, что необходимо создать особую блочную программу. Содержание программы разбивается на относительно большие смысловые порции (учебные блоки). Каждая порция разделяется на небольшие части (блочные элементы), внутренняя структура которых предусматривает наличие теоретического и практического материала. Теоретический материал включает в себя основные теоретические положения блочного элемента, способы решения неравенств, конкретные примеры с решениями. Практический материал содержит разнообразные задания, направленные на систематизацию и обобщение знаний, их коррекцию, выработку умений и навыков по решению неравенств.*

Заключение. *В подобной блочной программе значительное место отведено самостоятельной математической деятельности учащегося, в ходе которой он восстанавливает изученный ранее теоретический материал, выполняет задания, направленные на актуализацию усвоенных знаний и способов деятельности, на выработку прочных умений.*

Ключевые слова: *обобщающее повторение, блочная программа, рациональные неравенства, способы решения, самостоятельная деятельность учащегося.*

THE TECHNIQUE OF GENERALIZING REVISION OF THE TOPIC “SOLVING RATIONAL INEQUATIONS”

V.V. Ustimenko, T.A. Aleksandrovich
Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

One of the elements of the system of teaching Mathematics should be an element aimed at revising the studied academic material, its further generalization and systematization, its other presentation.

The purpose of the study is to determine the scheme of generalizing revision on the example of the topic “Solution of rational inequations”.

Material and methods. *The didactic material was developed by the authors for experimental use in pre-specialized classes on the basis of the State Education Establishment “V.Z. Khuruzhaya Secondary School No. 31 of Vitebsk”. Empirical and logical research methods were used.*

Findings and their discussion. *After analyzing academic literature, the experience of Mathematics teachers, the authors came to the conclusion that it is necessary to create a special block program. The content of the program is divided into relatively large semantic portions (training blocks). Each portion is divided into small parts (block elements), the internal structure of which provides for the presence of theoretical and practical materials. The theoretical material includes the main theoretical provisions of the block element, ways to solve inequation, specific examples with solutions. The practical material contains a variety of tasks aimed at systematizing and generalizing knowledge, correcting it, developing skills and abilities to solve inequations.*

Conclusion. *In such block program, a significant place is given to the independent mathematical activity of the student, during which he restores the previously studied theoretical material, performs tasks aimed at updating the acquired knowledge and methods of activity, and at developing strong skills.*

Key words: *generalizing revision, block program, rational inequations, solutions, student’s independent activity.*

В настоящее время осуществляется модернизация школьного математического образования. Происходит использование как объяснительно-иллюстративных и репродуктивных методов обучения, так и методов, направленных на развитие разнообразных качеств каждого учащегося. При этом особенно ценным становятся не столько усвоенные математические знания, сколько способы усвоения изучаемого учебного материала, реализация и развитие таких приемов познавательной деятельности, как сравнение и аналогия, анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение и конкретизация.

В связи с этим основной задачей классов с повышенным уровнем изучения математики является создание такой системы обучения, которая гарантированно обеспечивала бы оптимальное развитие каждого школьника с учетом его интересов и способностей. Одним из элементов указанной системы должен быть элемент, направленный на повторение пройденного учебного материала. Причем целью повторения не является простое воспроизведение изученного ранее. Оно должно быть направлено на дальнейшее обобщение и систематизацию знаний, должно предлагать учащимся какой-то другой порядок изложения повторяемого материала. Для решения данной проблемы логично использовать разнообразные образовательные технологии и их комбинации [1].

Цель исследования – определить схему обобщающего повторения на примере темы «Решение рациональных неравенств».

Материал и методы. Дидактический материал разработан авторами для экспериментального применения на уроках и факультативных занятиях в предпрофильных классах (учитель математики Н.В. Щеглова) на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей», а также на занятиях по методике преподавания математики со студентами третьего и четвертого курсов факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова. При этом использованы эмпирические и логические методы исследования.

Результаты и их обсуждение. Проанализировав школьные учебники алгебры для седьмых, восьмых, девятых классов, дополнительную научно-методическую литературу, изучив опыт работы учителей математики профильных классов, а также учитывая собственный подход к решению проблемы, мы пришли к выводу, что необходимо создать особую блочную программу по теме «Решение рациональных неравенств». Содержание программы, с опорой на классификацию рациональных неравенств, разбивается на относительно большие смысловые порции (учебные блоки). В свою очередь, каждая порция разделяется на небольшие части (блочные элементы, БЭ), внутренняя структура которых предусматривает наличие теоретического и практического материала. Теоретический материал формируется таким образом, что в нем должны быть представлены в том или ином виде основные теоретические положения блочного элемента, способы решения неравенств с привлечением соответствующих схем и рисунков, а также конкретные примеры с подробными решениями, отражающими последовательность действий, приводящих к требуемому результату.

Практический материал содержит разнообразные задания, направленные на систематизацию и обобщение знаний по данной теме, на выработку умений по применению алгоритмов и методов решения целых и дробных рациональных неравенств, на коррекцию усвоенных знаний, способов деятельности и на контроль за их усвоением.

Наименование учебных блоков и их блочных элементов следующее:

Учебный блок 1. Целые рациональные неравенства.

БЭ – 1. Линейные неравенства.

БЭ – 2. Квадратные неравенства.

БЭ – 3. Неравенства степени выше второй. Метод интервалов.

Учебный блок 2. Дробно-рациональные неравенства.

БЭ – 1. Общая схема решения.

БЭ – 2. Метод интервалов.

БЭ – 3. Метод введения новой переменной.

Учебный блок 3. Неравенство с модулями.

БЭ – 1. Решение неравенств методом промежутков.

БЭ – 2. Решение неравенств вида $|f(x)| < a$.

БЭ – 3. Решение неравенств вида $|f(x)| < |g(x)|$.

БЭ – 4. Решение неравенств вида $\left|f(x)\right| < g(x)$, $\left|f(x)\right| < f(x)$, $\left|f(x)\right| < -f(x)$.

БЭ – 5. Решение неравенств методом введения новой переменной.

По мнению разработчиков, в конце блочной программы может быть материал для итогового повторения и приложение, в котором рассмотрены решения наиболее сложных заданий.

Предложенная программа блочного обучения позволяет кардинально изменить деятельность учащегося и учителя. В разработанной программе обучающийся осваивает предложенный учебный материал самостоятельно или с некоторой долей помощи, а учитель организует этот процесс учения, консультирует по мере необходимости учащегося и контролирует его деятельность.

Кроме того, программа обобщающего повторения предусматривает движение обучающегося от общего к конкретному, а от него к единичному, обеспечивает полноценный переход от теории к практике, от знаний к умениям, которые в итоге углубляются, расширяются, становятся более прочными. Между ними устанавливаются более тесные логические связи.

Следует также отметить, что блочная программа предусматривает дифференцируемый подход в обучении посредством разноуровневых заданий. Задания первого уровня ученики могут выполнить самостоятельно. К заданиям второго уровня относятся более сложные задания, решаемые учащимися с помощью указаний данных в приложении или с небольшой помощью учителя.

Покажем ниже конкретное содержание блочных элементов 1 и 2.

Учебный блок 1. Целые рациональные неравенства.

БЭ – 1. Линейные неравенства.

Теоретический материал

Простейшее линейное неравенство $cx > d$.

Возможны следующие варианты решения:

1. При $c > 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x > \frac{d}{c}$, $x \in \left(\frac{d}{c};\infty\right)$.

2. При $c < 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x < \frac{d}{c}$, $x \in \left(-\infty;\frac{d}{c}\right)$.

3. При $c = 0$ и $d > 0$ $0 \cdot x > d$, $x \in \varnothing$;
при $c = 0$ и $d < 0$ $0 \cdot x > d$, $x \in \mathbb{R}$;
при $c = 0$ и $d = 0$ $0 \cdot x > 0$, $x \in \varnothing$.

Простейшее линейное неравенство $cx < d$.

Возможны следующие варианты решения:

1. При $c > 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x < \frac{d}{c}$, $x \in \left(-\infty;\frac{d}{c}\right)$.

2. При $c < 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x > \frac{d}{c}$, $x \in \left(\frac{d}{c};\infty\right)$.

3. При $c = 0$ и $d > 0$ $0 \cdot x < d$, $x \in \mathbb{R}$;
при $c = 0$ и $d < 0$ $0 \cdot x < d$, $x \in \varnothing$;
при $c = 0$ и $d = 0$ $0 \cdot x < 0$, $x \in \varnothing$.

Если линейное неравенство не является простейшим, но сводится к нему, то, чтобы решить такое неравенство, можно действовать по схеме:

1. Раскрыть скобки в левой и правой частях неравенства.

2. Перенести слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а без переменной в правую часть неравенства.

3. Привести подобные слагаемые в левой и правой частях неравенства, получив при этом простейшее линейное неравенство.

4. Решить полученное простейшее линейное неравенство.

Пример 1. Определим множество решений неравенств:

а) $2x > 7$. Решение. $x > 3,5$, $x \in (3,5;\infty)$.

б) $-2x > 7$. Решение. $x < -3,5$, $x \in (-\infty;3,5)$.

в) $0 \cdot x > 5$. Решение. $x \in \varnothing$.

г) $0 \cdot x > -5$. Решение. $x \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Определим множество решений неравенства $3(2x+1)-6 < 2-3(1-3x)$.

Решение. Воспользуемся предложенной выше схемой:

1. $6x+3-6 < 2-3+9x$.
2. $6x-9x < 2-3-3+6$.
3. $-3x < 2$.
4. $x > -\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{3};\infty\right)$.

Пример 3. Определим множество решений неравенства $(x-3)(x+2)-(x-3)^2 \geq 15x-10$.

Решение. Действуем по схеме:

1. $x^2-3x+2x-6-x^2+6x-9 \geq 15x-10$.
2. $x^2-3x+2x-x^2+6x-15x \geq -10+6+9$.
3. $-10x \geq 5$.
4. $x \leq 0,5$.

Ответ: $(-\infty;0,5]$.

Практический материал

Решить самостоятельно в тетради. В случае необходимости обратиться к теоретическому материалу, примерам 1–3, за консультацией к учителю.

Задание 1. Определить множество решений неравенств:

а) $6x-9 < 8x+2$;

б) $2(x-6)+7 < 3x-10$;

в) $5(x+4) < 2(4x-5)$;

г) $11x-7 > 2(5,5x+8)$;

д) $4-5x \geq 2x-7(x+4)$;

е) $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{2x-3}{8}+1$.

Задание 2. Сравнить свои ответы с ответами:

а) $(-5,5;\infty)$;

б) $(5;\infty)$;

в) $(10;\infty)$;

г) нет решений;

д) $(-\infty;\infty)$;

е) $[2,5;\infty)$.

Если правильно решены все неравенства, то выполнить задание 3, а если нет, то необходимо решить самостоятельно неравенства примера 2 и затем обратиться к решению своих неравенств, которые вызвали затруднения.

Задание 3. Определить множество решений неравенств:

а) $x(x+2) < (x+3)(x-1)$;

б) $(x-3)(2x-1) \leq (2x+1)(x+2)$;

в) $(x-5)(x+2)-(x+3)^2 \geq 7-14x$;

г) $(3x-1)^2-(x+1)^2 \leq (4x+3)(2x+1)$.

Сравнить свои ответы с ответами:

а) нет решений;

б) $\left(\dfrac{1}{12};\infty\right)$;

в) $[5,2;\infty)$;

г) $\left[-\dfrac{1}{6};\infty\right)$.

В случае необходимости обратиться к учителю.

БЭ – 2. Квадратные неравенства

Теоретический материал

При решении квадратных неравенств $ax^2+bx+c > 0$ $(< 0, \geq 0, \leq 0)$ используется схематический график, соответствующий функции $y = ax^2+bx+c$. Чтобы решить квадратное неравенство, можно действовать по следующей схеме:

1. Найти дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. В зависимости от значения дискриминанта выполнить схематический рисунок параболы.
3. На полученном рисунке найти те значения x, которые удовлетворяют неравенству.
4. Записать ответ.

Решим неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ при условии, что $a > 0$. После нахождения дискриминанта возможны три случая:

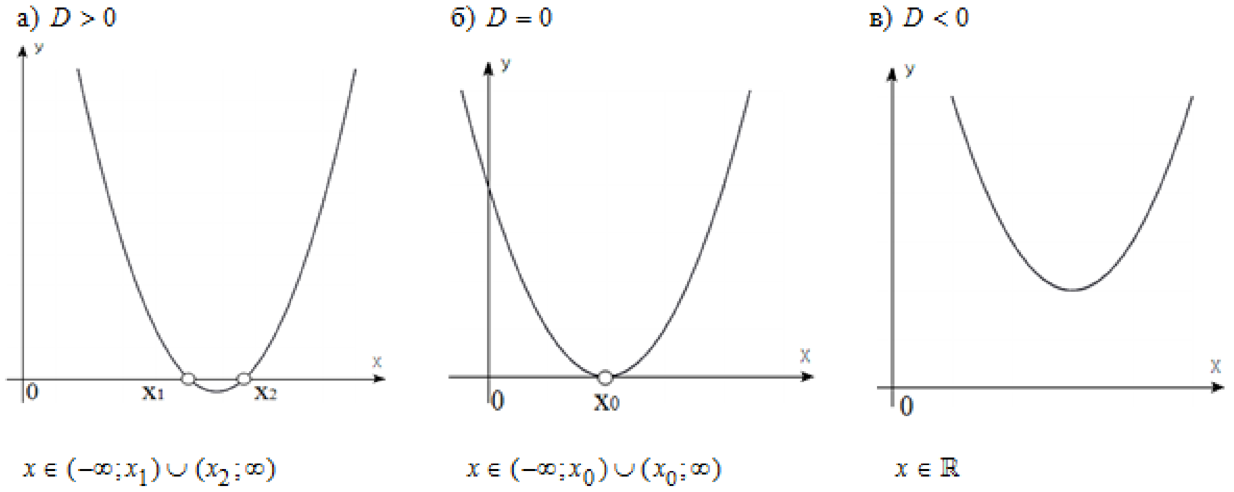


Рис. 1

Решим неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при условии, что $a > 0$. После нахождения дискриминанта возможны три случая:

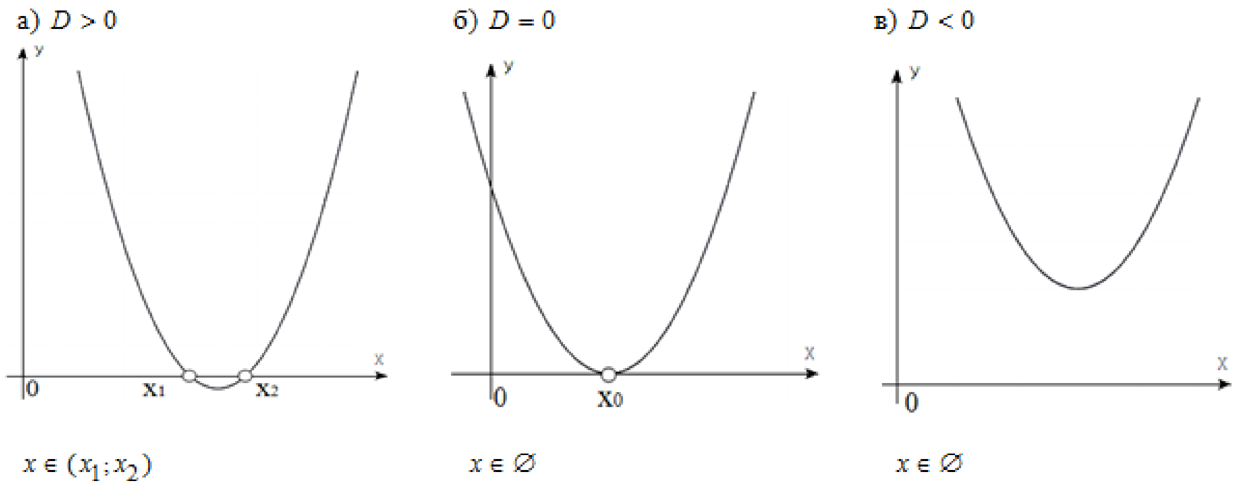


Рис. 2

З а м е ч а н и е 1. Если решаем неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$, то запись некоторых ответов изменится: при $D > 0$ $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$, при $D = 0$ $x \in (-\infty; \infty)$. Если решаем неравенство $ax^2 + bx + c \leq 0$, то при $D > 0$ $x \in [x_1; x_2]$, при $D = 0$ $x = x_0$. Если в квадратном неравенстве $a < 0$, то после умножения обеих частей на –1 получим неравенство вида $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0$.

З а м е ч а н и е 2. При решении приведенных квадратных неравенств вида а) $x^2 - 5x - 6 > 0$ или б) $x^2 - 5x - 6 < 0$ действуют следующим образом: по теореме, обратной теореме Виета, устно находят корни –1 и 6. Затем сразу записывают ответ в виде объединения промежутков в случае а) $x \in (-\infty; 1] \cup [6; \infty)$ или промежутка в случае б) $x \in (-1; 6)$.

Пример 1. Определим множество решений неравенства $6x^2 - 7x + 2 > 0$.

Решение. $D = 49 - 48 = 1$; $x_1 = 0,5$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

По рис. 3, к примеру 1, получаем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0,5) \cup \left(\dfrac{2}{3}; \infty\right)$.

Пример 2. Определим множество решений неравенства $9x^2 + 6x + 1 > 0$.

Решение. $D = 36 - 36 = 0$; $x = -\dfrac{1}{3}$.

По рис. 3, к примеру 2, получаем ответ.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; \infty\right)$.

Пример 3. Определим множество решений неравенства $3x^2 - x + 9 > 0$.
Решение. $D = 1 - 108 = -107$.
По рис. 3, к примеру 3, получаем ответ.
Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

Пример 4. Определим множество решений неравенства $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$.
Решение. Умножим обе части неравенства на –1, получим: $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$.
$D = 25 + 24 = 49$; $x_1 = -3$; $x_2 = 0,5$.
По рис. 3, к примеру 4, получаем ответ.
Ответ: $x \in [-3; 0,5]$.

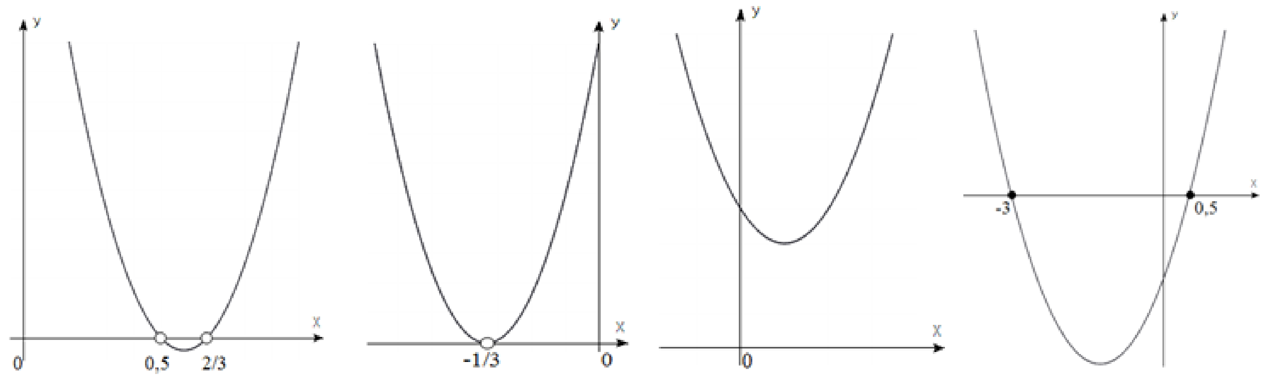


Рисунок к примеру 1 Рисунок к примеру 2 Рисунок к примеру 3 Рисунок к примеру 4

Рис. 3

Практический материал

Решить самостоятельно по предложенным схемам. В случае необходимости обратиться к примерам 1–4.

Задание 1. Определить множество решений неравенств:

а) $7x^2 - x + 1 > 0$; д) $4x^2 - 7x + 7 > 3x^2 - 11x + 52$;

б) $-2x^2 - 5x + 3 \leq 0$; е) $10x^2 + 8x - 2 \leq x^2 - 16x - 18$;

в) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$; ж) $(x-2)^2 < 1$;

г) $-4x^2 + 3x + 1 \geq 0$; з) $4 > (x+3)^2$.

Задание 2. Сравнить свои ответы с ответами:

а) $(-\infty;\infty)$; д) $x \in (-\infty;-9) \cup (5;\infty)$;

б) $(-\infty;-3] \cup [0,5;\infty)$; е) $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$;

в) {4}; ж) $(1;3)$;

г) [–0.25; 1]; з) $(-5;-1)$.

Если ответы совпали с ответами задания 2, то выполнить задание 3, а если нет, то необходимо обратиться к примерам 1–4 и заново решить неравенства, в которых ответы не совпали.

Задание 3. Определить множество решений неравенств:

а) $(x+4)^2 > 6x+40$; в) $(3x+1)^2 + 33 > (2x+5)^2$;

б) $(2x+1)^2 + 2 \le 2(x-3x^2)$; г) $(x-1)(x+1) > x^2 + 4 - (x-5)^2$.

Сравнить свои ответы с ответами:

а) $(-\infty;-6] \cup [4;\infty)$; в) $(-\infty;1) \cup (1,8;\infty)$;

б) $\varnothing$; г) $(-\infty;5-\sqrt{5}) \cup (5+\sqrt{5};\infty)$.

В случае необходимости обратиться к учителю.

Следует отметить, что данная блочная программа может являться основой содержания веб-ресурса по обобщающему повторению рациональных неравенств. В процессе создания веб-сайта могут быть использованы следующие технологии: HTML, CSS, Bootstrap. Подобный сайт должен:

– выполнять роль независимого и полностью самостоятельного ресурса по обучению школьников решению рациональных неравенств;

– максимально доступно представлять всю информацию, которая будет содержаться на данном веб-ресурсе;

– содержать в себе справочный материал по решению рациональных неравенств;

– быть простым и интуитивным в применении;

– быть полностью бесплатным и не содержать никакой рекламы.

Заключение. Таким образом, в подобной блочной программе значительное место отведено самостоятельной математической деятельности учащегося, которая предполагает следующие этапы: анализ условия задачи, выбор оптимального способа деятельности, соответствующего этой задаче, исполнение решения. При этом обучающийся приобщается к активной познавательной деятельности, восстанавливает изученный ранее теоретический материал, выполняет задания, направленные на актуализацию усвоенных знаний и способов деятельности, на выработку прочных умений.

Кроме того, в процессе работы с блочной программой у учащегося вырабатываются навыки самоконтроля и самооценки, самоопределения в выборе заданий, присутствует возможность консультирования с товарищем и учителем. Вместе с тем рассмотренная учебная программа может служить хорошей основой для методического осмысления новой для себя педагогической технологии и ее применения при обобщающем повторении других тем школьного курса математики.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие / Г.К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
2. Ананченко, К.О. Технология модульного обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства с модулями»: учеб.-метод. пособие для студентов, учителей и учащихся школ (классов) с углубленным изучением математики / К.О. Ананченко, М.В. Касперко. – Мозырь: Издательский Дом «Белый ветер», 2001. – 192 с.

R E F E R E N C E S

1. Selevko G.K. Sovremenniye obrazovatelniye tekhnologii: ucheb. posobiye [Modern Educational Technologies: Textbook], M.: Narodnoye obrazovaniye, 1998, 256 p.
2. Ananchenko K.O., Kasperko M.V. Tekhnologiya modulnogo obobshchayushchego povtoreniya temy “Uravneniya i neravenstva s moduliami”: ucheb. -metod. posobiye dlia studentov, uchitelei i uchashchikhsia shkol (klassov) s uglublennym izucheniyem matematiki [Technology of Module Generalizing Revision of the Topic “Equations and Inequations with Modules”]: Manual for Students, Teachers and Math Advanced Learning Schools (Classes) Students], Mozyr: Izdatelski Dom “Bely veter”, 2001, 192 p.

Поступила в редакцию 14.02.2022

Адрес для корреспонденции: e-mail: tatyanka.aleksandrovich@mail.ru – Александрович Т.А.

УДК 796.011

ФИЗКУЛЬТУРНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ГРАМОТНОСТЬ КАК МЕТАГРАМОТНОСТЬ

А.Н. Сергеенко*, В.Н. Старченко**

**Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Учреждение образования «Гомельский государственный медицинский университет»*

***Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»*

Реформирование современных систем образования проходит в рамках компетентностного подхода, в основе которого лежит функциональная грамотность, выступающая своего рода «классическим» образовательным ориентиром данных преобразований.

В настоящее время существует необходимость систематизации и определения единого фундамента многочисленных представлений о структуре и содержании функциональной грамотности. Таковым фундаментом не без оснований выступает физкультурная функциональная грамотность. Актуально переосмысление метапредметной сущности физкультурной функциональной грамотности, являющейся основой любого вида функциональной грамотности человека.

Цель статьи – обоснование физкультурной функциональной грамотности как метаграмотности.

Материал и методы. *Применялись такие теоретические методы, как изучение литературных источников, анализ, синтез, сравнение и обобщение, моделирование. Исследование осуществлялось с позиции системодеятельностного подхода.*

Результаты и их обсуждение. *В деятельностном подходе любая деятельность человека имеет интеллектуально-двигательный характер. Согласно данному утверждению физкультурная функциональная грамотность представляет метапредметную основу любого вида функциональной грамотности и являет собой метаграмотность.*

Заключение. *Под физкультурной функциональной метаграмотностью следует понимать базовую фундаментальную грамотность человека как агента любой сферы деятельности, которая обеспечивает возможность физической трансформации материального мира в соответствии с результатами его интеллектуальной деятельности. Физкультурная функциональная грамотность выступает интегральным средством, соединяющим в синергетической общности интеллектуальную и двигательную ипостаси человека в одно целое, его мыследеятельностный и двигательный компоненты в едином акте деятельности.*

Физкультурная функциональная грамотность является фундаментальной метаграмотностью, в которую встраиваются предметные виды функциональной грамотности.

Ключевые слова: *физкультурная функциональная грамотность, метаграмотность, функциональная грамотность, модель, интеллектуально-двигательная деятельность, физическая культура, знания, умения, навыки.*

PHYSICAL TRAINING FUNCTIONAL LITERACY AS META-LITERACY

A.N. Sergeyenko*, V.N. Starchenko**

**Education Establishment ‘Francisc Skorina State University of Gomel”, Education Establishment “Gomel State Medical University”*

***Education Establishment “Francisc Skorina State University of Gomel”*

The reformation of the contemporary systems of education occurs within the competence approach which is based on functional literacy that is in fact a classical education landmark of these transformations.

At present thare is a necessity to systematize and identify a single foundation of numerous ideas of the structure and contents of functional literacy. Physical training functional literacy is definitely such a foundation. The reconsideration of the meta-subject character of physical training functional literacy, which is the basis of any type of human functional literacy, is relevant.

The purpose of the article is substantiation of physical training functional literacy as meta-literacy.

Material and methods. *Theoretical methods, such as study of literature sources, analysis, synthesis, comparison and generalization, modeling, were used. The study was conducted from the point of view of the system and activity approach.*

Findings and their discussion. *In the activity approach any human activity is of intellectual and motor character. Consequently, physical training functional literacy is an interdisciplinary basis for any type of functional literacy and is meta-literacy.*

Conclusion. *Physical training functional meta-literaci should be understood as basic fundamental literacy of the man as an agent of any activity sphere, which provides the opportunity for physical transformation of the material world according to the results of his intellectual activity. Physical training functional literacy is an integral means which combines in a synergic unity intellectual and motor sides of the man, his thinking and motor components into one act.*

Physical training functional literacy is fundamental meta-literacy into which subject types of functional literacy are included.

Key words: *physical training functional literacy, meta-literacy, functional literacy, model, intellectual and motor activity, physical training, knowledge, skills, abilities.*

Функциональная грамотность (ФГ) стала «трендом», важным образовательным ориентиром в реформах систем образования большинства развитых стран мира [1].

Вместе с тем существует необходимость систематизации и определения единого фундамента различных представлений о структуре и содержании функциональной грамотности как таковой, количество видов которой в настоящее время достигло уже более полусотни. Взаимосвязи и соотношения видов функциональной грамотности породили универсальные компетентности, основу, ядро которых составляет метапредметность или метаграмотность, одной из них является, с нашей точки зрения, физкультурная функциональная грамотность (ФФГ).

Исходя из деятельностного подхода, любая деятельность человека имеет интеллектуально-двигательный характер, а соответственно этому ФФГ составляет фундамент любого вида функциональной грамотности и представляет метаграмотность. Обоснованию этой точки зрения посвящена данная статья.

В связи с означенным рассмотрим структуру предметных видов грамотности; выделим общее в структуре предметных видов грамотности; представим ФФГ как метаграмотность.

Материал и методы. Применялись такие теоретические методы, как изучение литературных источников, анализ, синтез, сравнение и обобщение, моделирование. Исследование осуществлялось с позиции системодеятельностного подхода.

Результаты и их обсуждение. В деятельностном подходе человек является агентом деятельности актором, с помощью которого осуществляется материализация идей. Любая деятельность включает в себя как мыслительную (интеллектуальную), так и двигательную составляющие [2]. Материализация любой идеи, замысла, мысли происходит сначала в веществе головного мозга с помощью интеллектуальной деятельности, а затем воплощается в материальном мире, с помощью двигательной деятельности. Так происходит акт любой деятельности. В нашем исследовании мы опирались на модель деятельности, разработанную В.Н. Старченко (рис. 1).

На этом рисунке отражен акт человеческой деятельности, соединяющий в себе нематериальный или мыследеятельностный и материальный или двигательный миры воедино в едином цикле деятельности [3].

Следует отметить, что категория «функция» (от лат. functio – совершение, исполнение) как таковая принадлежит деятельности, обозначает деятельность и является системообразующим элементом ФГ.

Понятие «ФГ» возникло во второй половине XX века, с одной стороны, в ответ на экспоненциальный рост объема знаний и формирования запроса на «нового», функционально грамотного человека, а с другой – на неспособность систем образования полностью решить проблему грамотности среди населения даже развитых стран мира [4]. Когда данное понятие возникло, оно стало отражать эффективность педагогической деятельности по передаче подрастающим поколениям не только знаний, умений, навыков, но и принципиальной способности применять их в своей практической деятельности после завершения процесса обучения.

Сегодня вызывает интерес разработка модели ФГ метапредметного уровня. Мы предприняли данную попытку и определили ее как систему, состоящую из: знаний, умений, навыков и физической подготовленности, объединенных мотивированной интеллектуально-двигательной деятельностью. В данной модели упомянутые структурные элементы наполнены следующим содержанием: метапредметные и предметные знания; интеллектуальные и двигательные умения и навыки; физическая подготовленность как в интеллектуальной, так и двигательной деятельности [1]. Все элементы системы предполагают базовый или необходимый для полноценного участия индивида в интеллектуально-двигательной деятельности уровень сформированности.

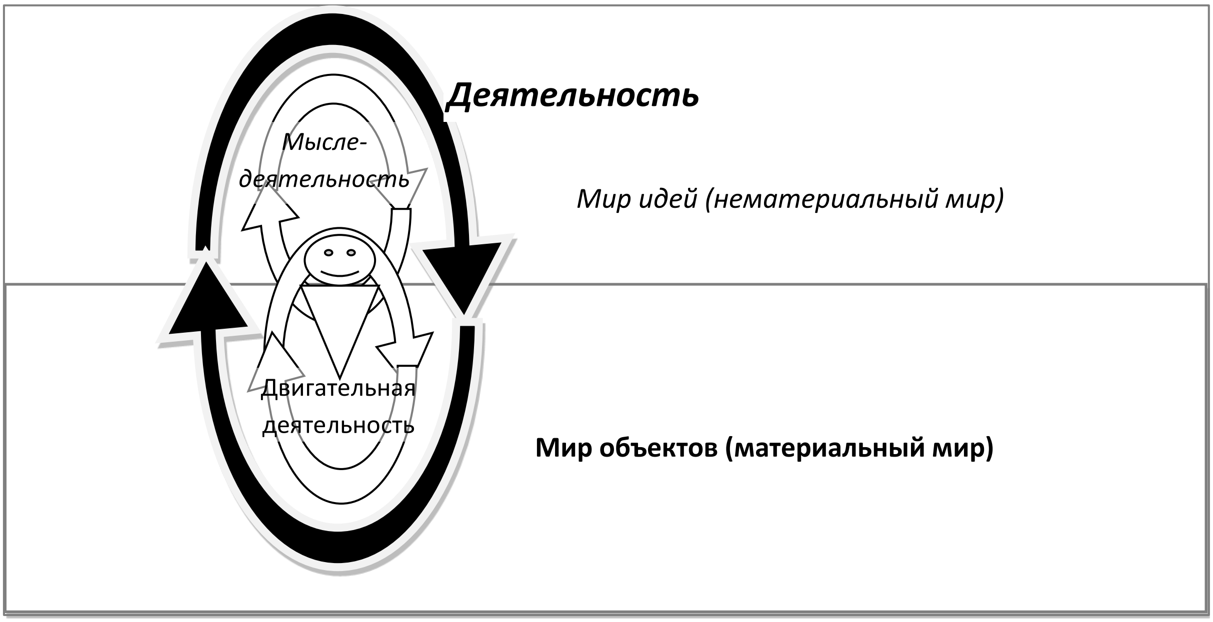


Рис. 1. **Связь мыследеятельности и двигательной деятельности в едином цикле деятельности**

Согласно данной метапредметной модели, различия предметных моделей грамотности заключаются в предметных знаниях, умениях и навыках, а объединяющим элементом всех видов грамотности является ФФГ (рис. 2).

Существует недооценка и недопонимание метапредметной сущности физкультурной функциональной грамотности и соответственно значения физического воспитания как в науке в целом, так и в общей теории физической культуры в частности.

Однако в работах отдельных авторов все чаще встречаются высказывания, которые можно интерпретировать с позиции метапредметности физического воспитания. Например, в одном из первых определений (описаний) физической (далее читай физкультурной) грамотности Джорджа Моррисона в 1969 году указывается: «Тело – это средство, с помощью которого осуществляются идеи и цели, и поэтому оно должно стать одновременно чувствительным и ловким» [5, с. 12].

Дж. Кэрни, Т. Киез, Е.П. Ретерт, Д. Криеллаарс, рассматривая концепцию физической грамотности, настаивают на применении междисциплинарного подхода к физическому воспитанию и указывают, что данная концепция «…представляет собой синтезирующую конструкцию, которая сплетает воедино множество различных дисциплинарных нитей» [5, с. 16].

Рис. 2. **Соотношение различных видов предметной функциональной грамотности с физкультурной функциональной грамотностью (метаграмотностью)**

И.М. Быховская, рассуждая о человеческой телесности, указывает на необходимость учета принципа междисциплинарной кооперации при изучении комплексных явлений, к которым вне сомнения относится как телесность, так и сфера физической культуры [6].

В.Н. Старченко прямо говорит, что «…физическая (двигательная) культура лежит в основе любой другой, поскольку выступает ее исполнительным компонентом» [3, с. 71].

Пол Юрбала в 2015 году описывает концепцию физической грамотности так: «Динамическая связь между воплощенным “я” и физической средой, которая непрерывно интегрирует восприятие физических проблем и соответствующее реагирование на них» [7, с. 377].

Ранее, в рамках отдельного исследования мы уже рассматривали ФФГ и определили ее как систему, включающую в себя физкультурные знания, интеллектуальные и двигательные физкультурные умения и навыки, физическую подготовленность в интеллектуально-двигательной деятельности, которые позволяют в процессе мотивированной физкультурной интеллектуально-двигательной деятельности успешно решать возникающие перед индивидом в процессе жизнедеятельности и профессиональной деятельности двигательные задачи [8]. Эффективность же мотивированной физкультурной интеллектуально-двигательной деятельности в свою очередь зависит от функциональной подготовленности субъекта.

Сказанное позволяет рассматривать ФФГ как метаграмотность, как базовую фундаментальную грамотность человека как агента деятельности.

Действительно любая трансформация окружающего мира, любого материального объекта осуществляется с помощью двигательной деятельности. Двигательная деятельность присутствует в каждом акте деятельности, будь то игра на музыкальном инструменте, забивание гвоздя или проведение хирургической операции. Овладение компьютерной или музыкальной грамотностью также не может рассматриваться без ФФГ. Чтобы, например, быстро печатать на компьютере или сыграть мелодию на фортепиано, важно иметь соответствующий двигательный навык и требуемый уровень физической подготовленности. Таким образом, ФФГ, физическая или двигательная культура всегда присутствуют в человеческой деятельности.

ФФГ, являясь двигательной грамотностью, рассматривается нами как исполнительный компонент всех видов деятельности, который лежит в основе любого вида функциональной грамотности. Функциональная грамотность проявляется и обнаруживает себя только в деятельности, также как и ФФГ, которая вне деятельности просто не существует.

ФФГ как метаграмотность будет сопровождать человека от рождения до смерти. М. Уайтхед, например, трактует концепцию физической грамотности как концепцию пути человека «от колыбели до могилы» и как ключевой способ взаимодействия с окружающим миром, без которого мы не реализовали бы свой потенциал как люди [9].

Таким образом, мы понимаем ФФГ как метаграмотность, базовую фундаментальную грамотность человека как агента любой сферы деятельности.

Модель ФФГ как метаграмотности представлена на рис. 3.

ФФГ является фундаментальной метаграмотностью, в которую встраиваются все предметные виды функциональной грамотности. На рис. 3 в ФФГ встроены некоторые предметные виды ФГ, начиная с компьютерной, хирургической, автомеханической и заканчивая музыкальной.

Опишем работу модели, представленной на рис. 3, на примере врача-хирурга.

Врач-хирург в процессе своей мотивированной профессиональной интеллектуально-двигательной деятельности, используя хирургическую функциональную грамотность (хирургические знания, интеллектуальные умения и навыки), с помощью имеющихся у него двигательных навыков и физической подготовленности длительное время осуществляет интеллектуально-двигательную деятельность (проводит хирургическую операцию) и успешно материализует идею удаления аппендицита.

Позже благодаря своей автомеханической функциональной грамотности (знаниям и интеллектуальным умениям автомеханика) с помощью двигательных навыков и физической подготовленности, которыми он обладает, им производится интеллектуально-двигательная деятельность и успешно материализуется идея замены пробитого колеса собственного автомобиля.

Вернувшись домой, наш агент деятельности, используя как профессиональную хирургическую функциональную грамотность, так и компьютерную функциональную грамотность посредством имеющихся у него двигательных навыков и физической подготовленности осуществляет интеллектуально-двигательную деятельность (путем набора текста на клавиатуре), материализуя идею написания научной статьи, посвященной проблеме удаления аппендикса без анестезии.

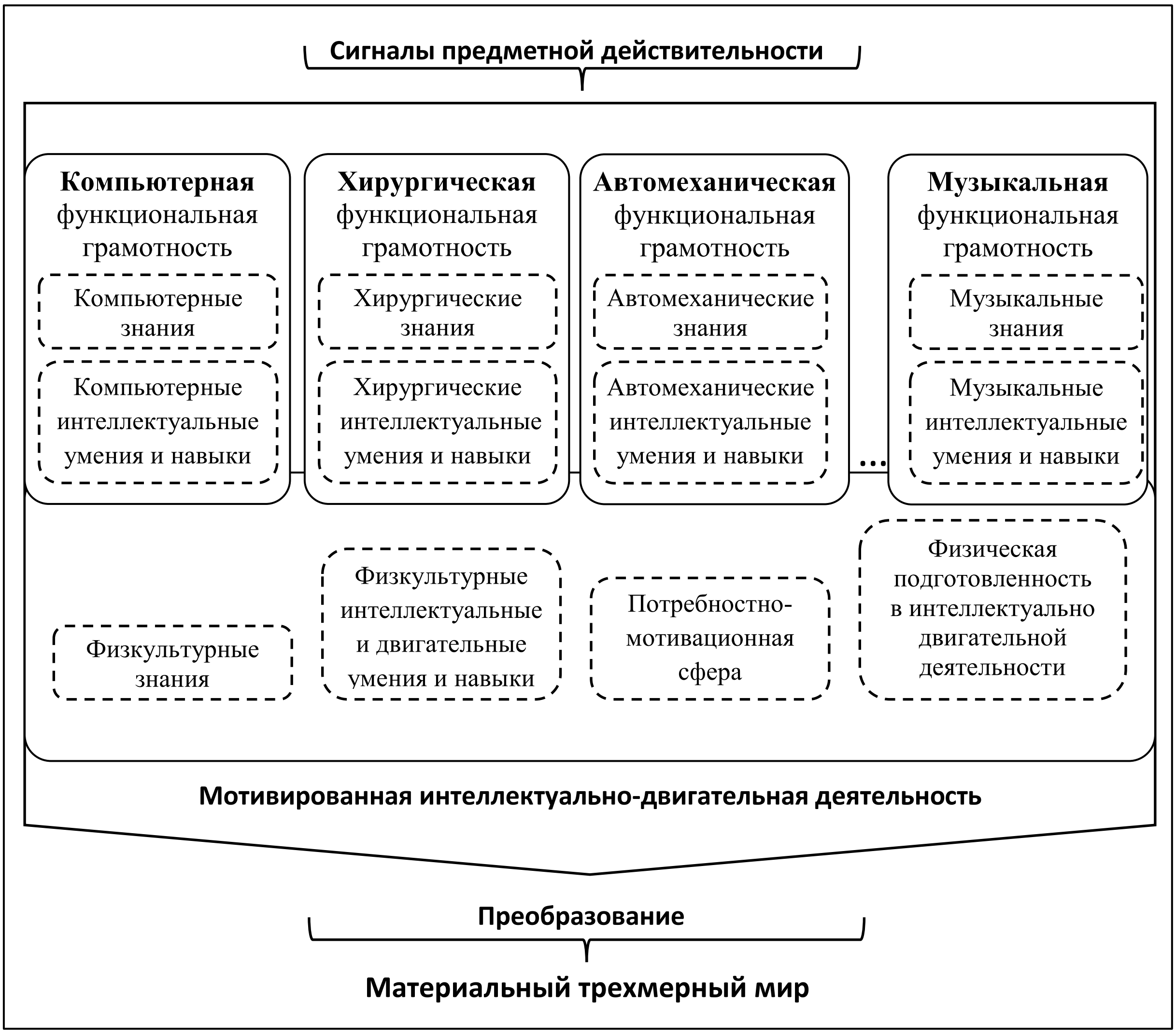


Рис. 3. **Модель физкультурной функциональной метаграмотности как базовой метапредметной грамотности, нагруженной предметными видами функциональной грамотности**

Наконец, вечером ради релаксации наш герой с помощью музыкальной функциональной грамотности через имеющиеся у него двигательные навыки и физическую подготовленность производит интеллектуально-двигательную деятельность, материализуя идею исполнения на скрипке любимой сонаты.

Во всех случаях агент деятельности пользовался физкультурной функциональной грамотностью, которая выступала в качестве исполнительного компонента его интеллектуально-двигательной деятельности, то есть являлась метаграмотностью. Физкультурная функциональная метаграмотность позволяет человеку быть эффективным агентом преобразования любой предметной сферы деятельности.

Таким образом, под физкультурной функциональной метаграмотностью следует понимать базовую фундаментальную грамотность человека как агента любой сферы деятельности, обеспечивающую возможность физической трансформации материального мира в соответствии с результатами его интеллектуальной деятельности.

Заключение. Любая сфера человеческого существования, любой акт деятельности как интеллектуальной, так и двигательной зависит от материального носителя, коим является тело, а эффективность интеллектуально-двигательной деятельности зависит от телесной, двигательно-функциональной подготовленности.

Различия предметных моделей грамотности заключаются в предметных знаниях, умениях и навыках, а объединяющим элементом всех видов грамотности служит ФФГ.

Физкультурная функциональная грамотность, являясь двигательной грамотностью, выступает как неотъемлемый компонент, лежащий в основе не только любого вида функциональной грамотности, но и любой деятельности, представляющий собой метапредметную сферу человеческого существования – метаграмотность.

ФФГ есть фундаментальная метаграмотность, в которую встраиваются все предметные виды функциональной грамотности.

Физкультурная функциональная метаграмотность представляет собой исполнительный компонент интеллектуально-двигательной деятельности человека, что позволяет ему быть эффективным агентом преобразования любой предметной сферы деятельности.

Физкультурная функциональная грамотность выступает интегральным средством, соединяющим в синергетической общности интеллектуальную и двигательную ипостаси человека в одно целое, его мыследеятельностный и двигательный компоненты в едином акте деятельности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Старченко, В.Н. Функциональная грамотность как ориентир реформирования систем образования / В.Н. Старченко, А.Н. Сергеенко // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. Е. Педагогические науки. – 2022. – № 13. – С. 7–11.
2. Старчанка, У.М. Сутнасць дзейнаснага падыходу і яго значэнне для педагагічнай тэорыі і практыкі / У.М. Старчанка // Становление социальной и профессиональной компетентности личности: сб. науч. ст. / Гомел. гос. ун-т; редкол.: Ф.В. Кадол (науч. ред.), В.П. Горленко (отв. ред.), Л.И. Селиванова. – Гомель, 2012. – С. 95–102.
3. Старченко, В.Н. Интеллектуально-двигательное упражнение как средство физического воспитания / В.Н. Старченко // Педагогическая наука и образование. – 2021. – № 3. – С. 69–78.
4. Тангян, С.А. «Новая» неграмотность в развитых странах / С.А. Тангян // Советская педагогика. – 1990. – № 1. – С. 3–17.
5. Cairney, J. A 20th Century Narrative on the Origins of the Physical Literacy Construct / J. Cairney, T. Kiez, E.P. Roetert, & D. Kriellaars // Journal of Teaching in Physical Education. – 2019. – Vol. 38, № 2. – P. 1–18. DOI:10.1123/jtpe.2018-0072.
6. Быховская, И.М. Человеческая телесность как объект социокультурного анализа (история проблемы и методологические принципы ее анализа) / И.М. Быховская // Труды ученых ГЦОЛИФКа: 75 лет: ежегодник. – М., 1993. – С. 58–68.
7. Jurbala, P. What Is Physical Literacy, really? / P. Jurbala // Quest. – 2015. – Vol. 67, iss. 4. – P. 367–383. DOI: 10.1080/00336297.2015.1084341.
8. Сергеенко, А.Н. Теоретическая модель физкультурной функциональной грамотности / А.Н. Сергеенко, В.Н. Старченко // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. Е. Педагогические науки. – 2023. – № 1. – С. 43–48. https://doi.org/10.52928/2070-1640-2023-39-1-43-48.
9. Whitehead, M. Definition of Physical Literacy and Clarification of Related Issues / M. Whitehead // ICSSPE Bulletin. – 2013. – № 65. – P. 29–34.

R E F E R E N C E S

1. Starchenko V.N., Sergeyenko A.N. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. E. Pedagogicheskiye nauki* [Journal of Polotsk State University. Pedagogical Sciences], 2022, 13, pp. 7–11.
2. Starchanka U.M*. Stanovleniye sotsialnoi i professionalnoi kompetentnocti lichnosti: sb. nauch. st., Gomel gos. un-t* [Maturation of Social and Professional Competency of the Personality: A Collection of Scientific Articles, Gomel State University], Gomel, 2012, pp. 95–102.
3. Starchenko V.N. *Pedagogicheskaya nauka i obrazovaniye* [Pedagogical Science and Education], 2021, 3, pp. 69–78.
4. Tangian S.A. *Sovetskaya pedagogika* [Soviet Pedagogy], 1990, 1, pp. 3–17.
5. Cairney, J. A 20th Century Narrative on the Origins of the Physical Literacy Construct / J. Cairney, T. Kiez, E.P. Roetert, & D. Kriellaars // Journal of Teaching in Physical Education. – 2019. – Vol. 38, № 2. – P. 1–18. DOI:10.1123/jtpe.2018-0072.
6. Bykhovskaya I.M. *Trudy uchenykh GTsOLIFKa: 75 ltn: yezhegodnik* [Works by GTsOLIFK Scholars: 75 Years: Yearbook], M., 1993, pp. 58–68.
7. Jurbala, P. What Is Physical Literacy, really? / P. Jurbala // Quest. – 2015. – Vol. 67, iss. 4. – P. 367–383. DOI: 10.1080/00336297.2015.1084341.
8. Sergeyenko A.L., Starchenko V.N. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. E. Pedagogicheskiye nauki* [Journal of Polotsk State University. Pedagogical Sciences], 2023, 1, pp. 43–48. https://doi.org/10.52928/2070-1640-2023-39-1-43-48.
9. Whitehead, M. Definition of Physical Literacy and Clarification of Related Issues / M. Whitehead // ICSSPE Bulletin. – 2013. – № 65. – P. 29–34.

Поступила в редакцию 29.06.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: ansergeenko@mail.ru – Сергеенко А.Н.

УДК 316.752

ЦЕННОСТНЫЕ ОРИЕНТАЦИИ СОВРЕМЕННОГО СТУДЕНЧЕСТВА КАК РЕГУЛЯТОР ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО РОСТА И РАЗВИТИЯ

М.С. Ковалевич, Н.А. Леонюк

Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Исследованиями установлено, что важнейшей детерминантой жизненного и профессионального выбора молодежи является система ценностей.

Цель данной работы – изучение системы ценностей студентов и магистрантов и определение условий профессионального роста и развития личности будущего специалиста в университетском образовании.

***Материал и методы.** Исследование проведено по методике М. Рокича по изучению ценностных ориентаций, согласно которой ценностные ориентации личности разделяют на две группы: терминальные ценности – это основные цели человека, отражающие долговременную жизненную перспективу, то, к чему он стремится сейчас и в будущем; инструментальные ценности, характеризующие средства, которые выбираются для достижения жизненных целей.*

Методы: системный анализ литературных источников, учебных программ, сравнение, обобщение, ранжирование, тестирование.

***Результаты и их обсуждение.** Анализируя полученные в ходе исследования результаты, необходимо отметить, что наиболее важными для студентов являются ценности здоровья, семьи и материального благополучия. Достаточно высокие ранговые места занимают любовь, интересная работа, активная деятельная жизнь, свобода и познание.*

К сожалению, не в почете сегодня исполнительность, чуткость, смелость, аккуратность, терпение, воля, трудолюбие – личностные и профессиональные качества, которые являются важнейшими факторами, определяющими успешность личностного и профессионального развития и построения профессиональной карьеры.

Определены условия ценностного самоопределения личности будущего специалиста в университетском образовании, среди которых аксиологизация образовательной среды университета, когда внимание студентов акцентируется на важнейших общечеловеческих, смысложизненных ценностях. Происходит приобщение студента к научным поискам в результате его ценностно-смыслового взаимодействия с преподавателями.

***Заключение.** Таким образом, цель данной работы достигнута. Представлены результаты эмпирического исследования системы ценностей студентов и магистрантов – будущих специалистов в области образования. Сформулированы условия профессионального роста и развития личности будущего специалиста в университетском образовании, способствующие ее ориентации на общественные ценности как смысложизненные.*

Практическая значимость исследования определяется тем, что его результаты могут быть положены в основу проектирования учебных программ, направленных на воспитание смысложизненных ценностей будущих специалистов в области образования.

***Ключевые слова:** терминальные и инструментальные ценностные ориентации, самоактуализация, аксиологизация образовательной среды, ценностно-смысловое взаимодействие с преподавателями.*

VALUE ORIENTATIONS OF MODERN STUDENTS AS A REGULATOR FOR PROFESSIONAL GROWTH AND DEVELOPMENT

M.S. Kovalevich, N.A. Leoniuk

Education Establishment “A.S. Pushkin Brest State University”

Studies have established that the most important determinant of life and professional choice of young people is the system of values.

The purpose of this work is to study the system of values of undergraduate and graduate students and to determine the conditions of professional growth and personality development of a would-be specialist in university education.

***Material and methods.** The study was conducted by M. Rokich method on the study of value orientations according to which the value orientations of a person are divided into two groups: terminal values, the main objectives of the person which reflect the* *long-term life perspective, what he/she aspires to now and in the future, and instrumental values, characterizing the means that are chosen to achieve life goals.*

The sesearch methods were system analysis of literary sources and curricula, comparison, generalization, ranking, testing.

***Findings and their discussion.** Analyzing the results obtained during the study, it should be noted that the most important for students are the values of health, family and material well-being. Rather high ranks are occupied by: love, interesting work, active life, freedom and knowledge.*

Unfortunately, the following values are not honored today: diligence, sensitivity, courage, accuracy, patience, will, diligence – the most important personal and professional qualities, which are the most important factors determining the success of personal and professional development and building a professional career.

The conditions for value self-determination of a would-be specialist personality in university education were determined, including axiologicalization of university educational environment, when students' attention is focused on the most important universal, sense-life values. Students are involved in scientific research as a result of their value and meaningful interaction with teachers.

***Conclusion.** Thus, the purpose of the study has been achieved. The findings of the empirical research of the system of values of students and undergraduates – would-be specialists in the field of education are presented. The conditions of professional growth and development of a would-be specialist personality in university education, contributing to its orientation on social values as meaningful, have been formulated.*

The practical significance of the study is determined by the fact that its results can be the basis for the design of educational programs aimed at the education of meaningful values of would-be specialists in the field of education.

***Key words:** terminal and instrumental value orientations, self-actualization, axiologicalization of educational environment, value and meaningful interaction with teachers.*

Исследования показали, что важнейшей детерминантой жизненного и профессионального выбора молодежи является система ценностей. Сегодня в Беларуси происходит формирование ценностных ориентаций развития государства и общества, идет интенсивная духовная работа, которая находит отражение в структуре ценностей молодежи, определяя ее профессиональный выбор, личностный и профессиональный рост. В современных условиях процесс профессионального становления молодого специалиста стал более сложным и противоречивым. Новые социально-экономические условия и изменение ценностных ориентаций обусловили новые требования к сегодняшнему выпускнику со стороны общества. На первый план выходят такие качества, как целеустремленность, инициативность, предприимчивость, самостоятельность, коммуникабельность, стрессоустойчивость, конкурентоспособность, высокая ответственность, творческое мышление.

Профессиональные ценностные ориентации отражают отношение человека к социальной действительности, особенности удовлетворения потребностей в процессе профессиональной деятельности (Г.В. Корделян, Л.Г. Полещук, А.В. Тищенкова).

Мы рассматриваем ценностные ориентации как важнейший инструмент саморегуляции личности, основу ответственного поиска собственной стратегии развития в точке бифуркации. Социологическое изучение системы ценностей молодежи Республики Беларусь было предметом исследований Е.М. Бабосова, А.П. Вардомацкого, А.Н. Данилова, Д.Г. Ротмана, Л.Г. Сокурянской, Л.Г. Титаренко, С.А. Шавеля, Т.И. Яковук и др.

В переходные периоды развития общества интерес к этой проблеме возрастает, поскольку именно молодое поколение является потенциальным фактором происходящих в стране изменений. Формирующиеся ценности этой социальной группы отражаются на нравственном и интеллектуальном состоянии всего общества. Такое положение свидетельствует об особой актуальности проведенного исследования.

Цель данной работы – изучение системы ценностей студентов и магистрантов социально-педагогического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

Ведь они уже сейчас и в ближайшем будущем во многом будут определять социально-культурную и экономическую ситуацию в стране.

Материал и методы. Исследование проведено по методике М. Рокича для изучения ценностных ориентаций [1, с. 25–29], согласно которой ценностные ориентации личности разделяют на две группы: терминальные ценности – это основные цели человека, отражающие долговременную жизненную перспективу, то, к чему он стремится сегодня и в будущем. И инструментальные ценности, характеризующие средства, которые выбираются для достижения жизненных целей. Респондентам предъявлены два списка ценностей (по 18 в каждом). В списках испытуемые присваивали каждой ценности ранговый номер.

Для изучения ценностных ориентаций выпускников специальности «Дошкольное образование» мы опросили 62 будущих воспитателя детского сада.

Методы: анализ, сравнение, ранжирование, тестирование, обобщение.

Результаты и их обсуждение. Согласно методике М. Рокича, ценности были предоставлены респондентам для ранжирования. Здоровье (83%), счастливая семейная жизнь (78%), материально обеспеченная жизнь (56%), любовь (духовная и физическая близость с любимым человеком) (55%), интересная работа (54%), активная деятельная жизнь (полнота и эмоциональная насыщенность жизни) (45%), свобода (самостоятельность, независимость в суждениях и поступках) (43%), познание (возможность расширения своего образования, кругозора, общей культуры, интеллектуальное развитие) (43%), уверенность в себе (40%), развитие (работа над собой, постоянное физическое и духовное совершенствование (34%) вошли в десятку предпочитаемых, но только ценности здоровье (83%), счастливая семейная жизнь (78%) относятся к ценностям высшего статуса и располагаются в «ядре» аксиологической системы (табл. 1).

Таблица 1

Терминальные ценности будущих специалистов в области образования (количество респондентов в %)

Здоровье	Счастливая семейная жизнь	Материально обеспеченная жизнь	Любовь	Интересная работа	Активная деятельная жизнь	Свобода	Познание	Уверенность в себе
83	78	56	55	54	45	43	40	40
Развитие	Друзья	Продуктивная жизнь	Творчество	Удовольствия	Общественное признание	Жизненная мудрость	Красота природы и искусства	Счастье других
34	34	29	24	23	20	16	13	12

В резерве приблизительно у половины будущих специалистов материально обеспеченная жизнь (56%), любовь (55%), интересная работа (54%), активная деятельная жизнь (49%), познание (46%), развитие (46%), счастье других (46%), жизненная мудрость (44%), наличие хороших и верных друзей (44%), общественное признание (44%), продуктивная жизнь (43%), удовольствия (42%).

В качестве отвергаемых приблизительно каждый второй назвал следующие ценности: красота природы и искусства (55%), счастье других (42%), жизненная мудрость (40%), каждый третий – общественное признание (36%), творчество (36%), удовольствия (35%).

Среди предпочитаемых инструментальных ценностей жизнерадостность (70%), воспитанность (66%), ответственность (60%), высокие запросы (53%), непримиримость к недостаткам в себе и других (50%), образованность (50%), независимость (48%), рационализм (22%), самоконтроль (22%). В ядре аксиологической системы: жизнерадостность, воспитанность, ответственность (табл. 2).

Приблизительно каждый второй отвергает исполнительность (68%), аккуратность (50%), чуткость (44%), непримиримость к недостаткам в себе и других (43%), твердую волю (42%).

Почти у половины опрошенных безразличное отношение к таким ценностям, как трудолюбие (64%), терпимость к взглядам и мнениям других (47%), широта взглядов, умение понять чужую точку зрения, уважать иные вкусы, обычаи, привычки (47%), честность (44%).

Таким образом, у будущего специалиста в почете важнейшие базовые ценности – здоровье и счастливая семейная жизнь. Достойные места занимают материально обеспеченная жизнь, любовь и интересная работа. Их назвали более половины опрошенных респондентов.

Таблица 2

Инструментальные ценности будущих специалистов в области образования (количество респондентов в %)

Жизнерадостность	Воспитанность	Ответственность	Высокие запросы	Образованность	Непримиримость к недостаткам	Честность	Независимость	Самоконтроль
70	66	60	53	50	50	48	48	22
Рационализм	Твердая воля	Аккуратность	Эффективность деятельности	Терпимость	Широта взглядов	Чуткость	Смелость	Исполнительность
22	22	22	19	17	18	13	12	6

Поскольку исследование ценностных ориентаций студентов проводилось в 2009, 2018, 2020 и 2023 гг., есть возможность дать их сравнительную характеристику. Так, установлено, что смысложизненные ценности студентов социально-педагогического факультета в целом не носят ярко выраженного и сформировавшегося характера и показатель их выраженности колеблется от 0 до 62, 83, 79, 83% (в 2009, 2018, 2020, 2023 гг. соответственно). Например, позиции таких базовых ценностей, как сохранение и укрепление здоровья (30, 29, 44, 83%), семья (32, 79, 83, 78%), материальная стабильность (12, 26, 25, 56%), любовь (39, 50 и 61, 55%), интересная профессия (30, 46, 22, 54%), заняли высокие ранговые места и относятся к предпочитаемым. Повысился ранг таких ценностей, как сохранение и укрепление здоровья, интересная профессия, материальная стабильность.

Вместе с тем ранг понизили «семья», «любовь», «интеллект».

Связывая ценность семьи с растущими тенденциями индивидуализма и рационализма в обществе, ученые начали говорить о втором демографическом переходе от «золотого века» брака к кохабитационному (сожительственному) союзу [2]. В то же время, основываясь на оценках семьи в разные периоды времени, можно увидеть, что причины упомянутых изменений продолжают обсуждаться исследователями и интерпретируются по-разному. А.Г. Вишневский небезосновательно утверждает, что сами по себе экономические реформы, экономический спад и даже кризис не могли бы вызвать нынешнюю демографическую ситуацию, которая также проявилась в заметном снижении рождаемости [3]. Аналогичным образом рассуждает А.И. Романюк, который считает, что корни проблемы материнства кроются в не в финансовой сфере, но связаны с изменениями ценностных ориентаций [4, с. 45–53]. Семейная жизнь – во всех ее формах – остается естественным образом жизни в сознании большинства людей и останется таковой в будущем. Здоровые и счастливые семьи приносят огромную пользу обществу и государству.

Любовь как высшая форма ценностных установок придает смысл другим этическим категориям; любовь делает внутренний мир индивида целостным и гармоничным; любовь упорядочивает мир человеческих ценностей, выстраивая их в систему и выдвигая на первый план наиболее важные из них. И.А. Галай, Р.И. Айзман [5], А.А. Реан [6] показали, что любовь является одной из важнейших жизненных ценностей для современной молодежи. Многочисленные исследования определили общий позитивный статус ценности любви, ее конструктивную роль для личности и культуры. Эти понятия ассоциируются у молодых людей с доверительными, заботливыми, легкими отношениями, наполненными поддержкой и теплом.

Ожидание любви – неотъемлемая часть процесса взросления, стремления к счастью и благополучию. Образ любви определяет как вектор поиска молодыми людьми счастья, так и их удовлетворенность им. Выявленные в ходе исследования особенности оценки студентами понятия «любовь» актуализируют важность поиска форм коррекционной работы, направленных на изменение представлений о любви в пространстве значимых оценочных категорий [7].

Важность проблемы *интеллекта и умственного развития* обусловливается той ролью, которую они играют в решении сложных социальных и индивидуальных психологических проблем человека. Интеллект определяет успех профессиональной деятельности, осуществляемой человеком, он определяет разумность его поведения и взаимосвязи с другими, уровень развития профессиональных компетенций, социальной ценности и социального статуса человека. Это ведущий, основной компонент личностного развития. Это связано с ориентацией и отношением человека, его системой ценностей. Взрослый интеллект проявляется в успехе решения профессиональных и личных проблем. Он позволяет специалисту адаптироваться к новым условиям на современном рынке труда. Интеллект способствует эффективности общения, оптимизации межличностных отношений, социальной и психологической адаптации, обеспечивая эффективность профессиональной деятельности. Эмоциональный интеллект является важным фактором социально-психологической адаптации молодых специалистов к профессиональной деятельности в организации [8].

К сожалению, ценности реализации творческих способностей и хорошего образования снижаются. Как известно, творческий потенциал индивидуума представляет внутренние возможности, присущие исключительно человеку, что можно использовать для решения проблем посредством нестандартного подхода к ним. Человек с творческим потенциалом более духовно развит, он стремится к полной самореализации, для освобождения интеллектуальных, творческих, созидательных возможностей. Творчество в жизни – это способность создавать новые вещи, определенное личное отношение, которое обеспечивает успешную реализацию профессиональных планов.

Воспитание творческой личности – сложная задача. Для развития творческого потенциала студентов рекомендуется использовать проектно-проблемные методы обучения; информировать студентов о проводимых в университете научных исследованиях; включать студентов в систематические научные исследования, организовывать научные семинары по методологии и технике исследований.

Хорошее образование – это основа успешной жизни, самореализации личности в жизни и карьере. Успешное начало карьеры, развитие профессиональных компетенций в выбранном направлении деятельности, конкурентоспособность на рынке труда напрямую зависят от образования, базовой подготовки будущего специалиста. Сегодня образование имеет огромное значение в обществе. Только образованный человек имеет шанс стать Человеком. Если такая цель не достигнута, то учиться бессмысленно. Образованный человек открыт для новых знаний, способен самостоятельно принимать решения и отвечать за их последствия. Это позволяет молодому специалисту обрести статус полноценного члена современного общества и заработать средства для полноценной жизни. В процессе образования человек приобретает способность продолжать учиться и получать новые знания на протяжении всей жизни, он позитивно смотрит на необходимость дальнейшего личностного и профессионального развития. Образованный человек – это личность, способная найти свое место в жизни и профессиональной деятельности.

Исследование показало, что смысловые ценности студентов старших курсов университета, как и студентов в целом, не являются ярко выраженными и зрелыми, а показатель их выраженности колеблется от 20 до 80%. Так, в ядре аксиологической системы магистранта находятся позиции таких базовых ценностей, как здоровье, семья, признание в обществе. Уверенность в себе, активная жизнедеятельность, материально обеспеченная жизнь, познание и развитие оказались в первой десятке предпочитаемых ценностей (табл. 3).

В качестве отвергаемых терминальных ценностей магистранты назвали красоту природы и искусства, развлечения, наличие хороших и верных друзей, счастье других.

В качестве предпочитаемых инструментальных ценностей названы жизнерадостность, работоспособность, образованность, честность, чуткость, смелость, работоспособность. Но только жизнерадостность, трудолюбие и образованность находятся в ядре аксиологической системы магистранта.

Отвергаемыми инструментальными ценностями являются аккуратность, высокие требования, непримиримость к недостаткам, рационализм, самоконтроль и эффективность.

Таким образом, современный магистрант – это жизнерадостный, исполнительный и образованный специалист. Он дорожит собственным здоровьем, семьей и добивается признания в обществе. При этом его не волнуют красота природы и искусства, он равнодушен к друзьям, его не волнует счастье других людей, развлечения: «веселись, получай удовольствие, живи полной жизнью» – это не для него.

Таблица 3

Предпочитаемые терминальные и инструментальные ценности магистрантов университета (количество респондентов в %)

Здоровье	Счастливая семейная жизнь	Признание	Материально обеспеченная жизнь	Активная деятельная жизнь	Познание	Развитие	Уверенность в себе	Мудрость	Наличие хороших и верных друзей
100	100	60	40	40	40	40	40	20	20
Жизнерадостность	Исполнительность	Образованность	Честность	Чуткость	Терпимость	Смелость	Эффективность	Воспитанность	Воля
80	60	60	60	60	40	40	40	20	20

Поэтому возникает необходимость организовать контакт студентов с высокохудожественными произведениями искусства, что поможет накопить разнообразный культурный и духовно-нравственный опыт, сформировать устойчивую систему этических и эстетических ценностей, важные личностные качества. На этом этапе происходит формирование устойчивых и глубоких этических убеждений, принципов и идеалов, ориентирующих студента на духовные ценности и традиции родной культуры, которые могут лечь в основу будущего мировоззрения личности.

Заключение. Анализируя результаты, полученные в ходе исследования, следует отметить, что наиболее важными для студентов являются ценности здоровья, семьи и материального благополучия. Достаточно высокие ранги занимают любовь, интересная работа, активная жизнь, свобода и познание.

К сожалению, сегодня не в почете следующие качества: трудолюбие, чуткость, смелость, аккуратность, терпение, воля, прилежание – личностные и профессиональные качества, которые являются важнейшими факторами, определяющими успех личностного и профессионального развития и построения профессиональной карьеры.

Исследование зафиксировало большое внимание студентов к таким инструментальным ценностям, как высокие требования, образованность, непримиримость к недостаткам, честность, независимость.

Наблюдается положительная тенденция в оценке роли хорошего образования: 50% молодых людей убеждены, что оно способствует успеху в жизни. Однако образование для студентов сегодня является скорее инструментальной, чем конечной ценностью. Как показало исследование, самореализация человека в современных условиях связана именно с получением высокого заработка как показателя человеческого достоинства в новых реалиях. Именно поэтому студенты (50%) рассматривают образование как инструмент доступа к материальным благам. Будущие специалисты хотят получить не просто профессию, а высокооплачиваемую профессию.

В целом исследование свидетельствует, что по-прежнему большинство будущих специалистов в сфере образования – это целеустремленные молодые люди, ориентированные на успех в жизни. Ради создания условий для успешной жизни они готовы много работать, проявлять личную инициативу. Но в то же время респонденты ожидают от своей будущей работы не только высокого дохода, но и морального удовлетворения. Большинство студентов считают необходимым заботиться о чистоте своей совести, сохранять уважение к моральным ценностям и понимание того, что выживание в человеческом обществе невозможно без честного и достойного отношения к другим участникам человеческого взаимодействия.

Важнейшим условием ценностного самоопределения личности будущего специалиста в сфере университетского образования является аксиологизация образовательной среды УВО, когда внимание студентов сосредоточено на значимых общечеловеческих, смысложизненных ценностях. Студенты вовлекаются в научные исследования в результате их ценного и содержательного взаимодействия с преподавателями. Личностные смыслы полученных знаний, восхождение к личностным и профессиональным ценностям, поиск вариантов субъектной реализации ценностей в процессе собственной деятельности студента выступают ориентирами становления будущего профессионала.

Таким образом, цель данной работы достигнута. Представлены результаты эмпирического исследования системы ценностей студентов и магистрантов – будущих специалистов в области образования. Сформулированы условия профессионального роста и развития личности будущего специалиста в условиях университетского образования, способствующие его ориентации на социальные ценности как смысложизненные.

Практическая значимость исследования определяется тем, что его результаты могут быть использованы в процессе обновления содержания и технологий университетского образования. Данные материалы могут стать основой для разработки учебных программ, направленных на воспитание смысловых ценностей у будущих специалистов в области образования. Использование результатов исследования будет способствовать воспитанию у студентов ценностей, социально значимых высоконравственных мотивов профессионального совершенствования, гражданской позиции и позволит подготовить конкурентоспособного специалиста в соответствии с современными требованиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Психологические тесты: в 2 т. / под ред. А.А. Карелина. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 1999. – Т. 1. – 312 с.
2. Ван де Каа, Д. О международной миграции и концепции второго демографического перехода / Д. Ван де Каа // Мир в зеркале международной миграции / под ред. В.А. Ионцева. – М., 2002. – С. 90–96.
3. Вишневский, А.Г. Автономна ли демографическая ситуация в Российской Федерации / А.Г. Вишневский // Модернизация экономики России. Итоги и перспективы. – М.: ГУ ВШЭ, 2003. – С. 15–23.
4. Романюк, А.И. Демографическое будущее развитых обществ: между детерминизмом и свободой выбора / А.И. Романюк // Социол. исслед. – 1999. – № 3. – С. 45–53.
5. Галай, И.А. Гендерные особенности личностного потенциала студентов первого курса педагогического вуза / И.А. Галай, Р.И. Айзман // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2017. – № 1. – С. 95–105.
6. Реан, А.А. Восприятие матери: общие тенденции и гендерно-социальные особенности / А.А. Реан // Национальный психологический журнал. – 2017. – № 2(26). – С. 85–91.
7. Кыштымова, И.М. Любовь в системе социально значимых ценностей студенческой молодежи / И.М. Кыштымова, В.В. Макаревич // Известия Иркутск. гос. ун-та. Серия «Психология». – 2020. – Т. 31. – С. 66–80.
8. Панкова, Т.А. Роль эмоционального интеллекта в социально-психологической адаптации молодых специалистов [Электронный ресурс] / Т.А. Панкова // Психологические исследования: электрон. науч. журнал. – 2011. – № 4(18). – Режим доступа: http://psystudy.ru. – Дата доступа: 03.05.2023.

REFERENCES

1. Karelin A.A. Psikhologicheskiye testy [Psychological Tests], M.: Gumanitar. izd. tsentr VLADOS, 1999, 1, 312 p.
2. Van de Caa D.O. Mir v zerkale mezhdunarodnoi migratsii [World in the Mirror of Ingternational Migration], M., 2002, pp. 90–96.
3. Vishnevski A.G. Modernizatsiya ekonomiki Rossii. Itogi i perspektivy [Modernization of the Economy of Russia. Results and Prospects], M.: GU VShE, 2003, pp. 15–23.
4. Romaniuk A.I. Sotsiol. issled. [Sociology Research], 1999, 3, pp. 45–53.
5. Galai I.A., Aizman R.I. Vestnik gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta [Journal of Novosibirsk State Pedagogical University], 2017, 1, pp. 95–105.
6. Rean A.A. Natsionalny psikhologicheski zhurnal [National Psychological Journal], 2017, 2(26), pp. 85–91.
7. Kyshtymova I.M., Makarevich V.V. Izvestiya Iskutsk. gos. un-ta. Seriya “Psikhologiya” [Journal of Irkutsk State University. Ser. “Psychology”], 2020, 31, pp. 66–80.
8. Pankova T.A. Psikhologicheskiye issledovaniya: electron. nauch. zhurnal [Psychological Research: E-Journal], 2011, 4(18). – Available at: http://psystudy.ru. – Accessed: 03.05.2023.

Поступила в редакцию 26.05.2023
Адрес для корреспонденции: e-mail: maria_brest@tut.by – Ковалевич М.С.

УДК 37.091.33:51

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КОНТЕКСТЕ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

В.В. Устименко, А.А. Молодечкина
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Одной из основных содержательных линий школьного курса математики является линия неравенств.

Цель исследования – выявить наиболее эффективную схему решения рациональных неравенств и возможные способы их укрупнения.

***Материал и методы.** Материал для внедрения в учебный процесс подготовлен с использованием основных положений технологий укрупнения дидактических единиц, обобщающего блочного повторения для применения в 9–10 классах ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей» и ГУО «Средняя школа № 1 г.п. Шумилино имени П.А. Акуционка». При этом использовались эмпирические и логические методы.*

***Результаты и их обсуждение.** Проведя исследовательскую работу по данным темам в учебно-методической литературе, авторы пришли к выводу, что для эффективного изучения темы можно выделить два этапа: первый – это само изучение темы рациональных неравенств, другим важным этапом в изучении неравенств является применение технологии укрупнения дидактических единиц в школьном курсе математики, которые можно использовать для изучения, обобщения и систематизации, конкретизации знаний и умений по данной теме.*

***Заключение.** Предложенная методическая схема изучения рациональных неравенств способствует осознанному и прочному усвоению рассматриваемой темы, развитию таких приемов умственной деятельности, как сравнение, аналогия, анализ, синтез, обобщение, конкретизация, индукция, дедукция, а также раскрытию творческих способностей школьников.*

***Ключевые слова:** рациональные неравенства, дробно-рациональные неравенства, методы решения, технологии укрупнения.*

TEACHING SCHOOLCHILDREN TO SOLVE RATIONAL INEQUATIONS IN THE CONTEXT OF ENLARGING DIDACTIC UNITS

V.V. Ustimenko, A.A. Molodechkina
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

One of the basic content lines of the school course of Math is the line of inequations.

The research purpose is to identify the most efficient scheme of solving rational inequations and possible ways of their enlargement.

***Material and methods.** The material for the introduction into the academic process was prepared using main ideas of the technology of the enlargement of didactic units, generalizing block revision to be used in the 9th–10th years at Secondary School No 31 of the City of Vitebsk and Secondary School No 1 of Shumilino. Empiric and logical methods were used in the research.*

***Findings and their discussion.** After doing a research on the topics using academic and methodological literature the authors came to the conclusion that two stages can be singled out for efficient studying the topic: the fisrt is studying the topic of rational inequalities itself, the other important stage is using the technology of enlargement of didactic units in the school course of Math. They can be used for the study, generalizing and systematization, concretization of knowledge and skills on the topic.*

***Conclusion.** The suggested methodological scheme of studying rational inequations provides for stable mastering of the topic under consideration, development of such mental activities as comparison, analogy, analysis, synthesis, generalization, concretization, induction, deduction as well as revealing creative abilities of schoolchildren.*

***Key words:** rational inequations, share-rational inequations, methods of solving, technology of enlargement.*

Одной из основных содержательных линий школьного курса математики является линия неравенств. При этом обучение учащихся решению различных неравенств остается важнейшей из задач методики преподавания математики. Необходимо отметить, что систематическое изучение неравенств осуществляется в следующей последовательности: линейные неравенства с одной переменной (7 класс), квадратные неравенства (8 класс), целые и дробные рациональные неравенства (9 класс), показательные и логарифмические неравенства (11 класс). Вместе с тем отсутствуют даже простейшие тригонометрические и иррациональные неравенства.

Кроме того, существуют различные подходы в обучении школьников решению неравенств в зависимости от того, на каком уровне изучается математика. На базовом уровне обучение происходит на основе ныне действующих учебников алгебры. В предпрофильных и профильных математических классах учителя знакомят учащихся с решением неравенств (линейных, квадратных, рациональных) в общем виде, показывают дополнительные приемы и методы решения.

При этом практически отсутствует технология укрупнения дидактических единиц (П.М. Эрдниев), позволяющая рассматривать взаимосвязи между различными неравенствами путем составления цепочек (блоков) укрупненных неравенств по линии их решений, осуществлять обобщающее повторение изученного ранее материала [1].

Цель исследования – выявить наиболее эффективную схему решения рациональных неравенств и возможные способы их укрупнения.

Материал и методы. Материал для внедрения в учебный процесс подготовлен с использованием основных положений технологий укрупнения дидактических единиц, обобщающего блочного повторения, школьных учебников по алгебре, дополнительных учебных пособий по математике, опыта работы авторов со школьниками. Данный материал проходил апробацию в 9–10 классах (учитель математики А.Б. Яцковская) на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей» (учитель математики П.А. Ковалёва) на базе ГУО «Средняя школа № 1 г.п. Шумилино имени П.А. Акуционка». При этом применялись эмпирические и логические методы.

Результаты и их обсуждение. Одним из направлений в освоении неравенств является тема изучения рациональных неравенств (целых и дробных). Данная тема присутствует в школьном курсе алгебры в 8–9 классе. Основным методом решения рациональных неравенств является метод интервалов.

Рассмотрим алгоритм решения целых рациональных неравенств в общем виде. Так, нам необходимо решить неравенство вида: $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$. Возьмем $a > 0$.

Решение рациональных неравенств сводится к решению неравенств методом интервалов. Первым этапом является перенос слагаемых в левую часть неравенства. Далее следует разложить получившееся рациональное выражение на множители. Для того чтобы совершить указанное действие, нужно найти корни данного рационального выражения. Получим, например:

$$a(x-b)(x-c) > 0.$$

Далее строим числовую ось и наносим получившиеся корни в порядке возрастания. Берем, например, число $x < b$ и подставляем в первоначальное выражение. Получаем, к примеру, $x - b > 0, x - c > 0$. Следовательно, и все выражение будет положительным и интервалу $(-\infty; b)$ будет соответствовать знак «+». Наносим данный знак на числовую ось. Аналогичные действия совершаем и для остальных интервалов $(b; c), (c; +\infty)$.

По полученному рис. 1а) и по требуемому условию (> 0) записываем ответ: $(-\infty; b) \cup (c; +\infty)$.

Пример 1. Определить множество решений неравенства $x^2 + x - 6 > 0$.

Решение. Находим корни выражения $x^2 + x - 6$. Получаем $x = 2$ и $x = -3$.

Отмечаем полученные корни на числовой оси. Берем $x < -3$, например, $x = -5$. Подставляем в первоначальное выражение, получаем $(-5)^2 + (-5) - 6 = 25 - 5 - 6 = 14 > 0$. Следовательно, интервалу $(-\infty; -3)$ соответствует знак «+». Повторяем данные действия для остальных интервалов. Получаем результат – рис. 1б.

Основываясь на требуемом условии (> 0), записываем ответ $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

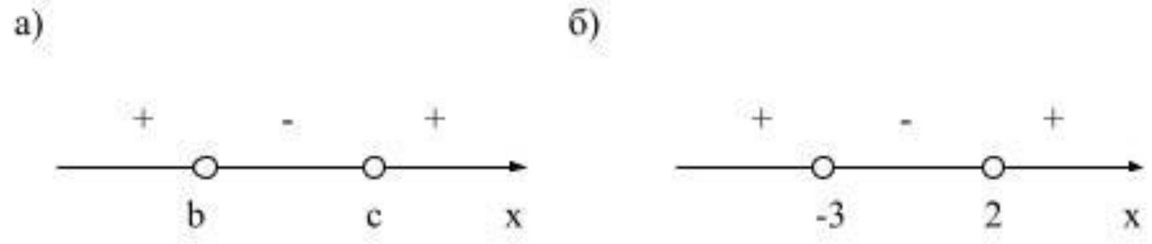


Рис. 1

Замечание 1. *Если выражение не имеет корней $D < 0$, то если $a > 0$, выражение положительно при любом х, если $a < 0$, то выражение отрицательно при любом х [2].*

Замечание 2. *В ныне действующих учебниках алгебры используется метод решения квадратных неравенств с помощью рисунка параболы $y = x^2 + bx + c$.*

Если мы имеем дело с неравенством со степенью > 2, то для их решения можно использовать различные методы решения, например метод подбора, метод группировки или метод введения новой переменной. Рассмотрим на примере метод введения новой переменной.

Пример 2. Определить множество решений неравенства $216x^6 + 19x^3 - 1 \leq 0$.

Решение. Пусть $x^3 = t$. Получим $216t^2 + 19t - 1 \leq 0, 216\left(t - \frac{1}{27}\right)\left(t + \frac{1}{8}\right) \leq 0$,

$\left(t - \frac{1}{27}\right)\left(t + \frac{1}{8}\right) \leq 0$. После обратной замены $t = x^3$ имеем $\left(x^3 - \frac{1}{27}\right)\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) \leq 0$,

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \leq 0.$$

Так как $x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} > 0$ при любом $x \in R$ и $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} > 0$ при любом $x \in R$, то получим $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$. Применяя метод интервалов, найдем решение последнего неравенства, то есть $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Ответ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Далее рассмотрим алгоритм для решения дробно-рациональных неравенств в общем виде.

Главным в решении дробно-рациональных неравенств является нахождение корней в числителе и знаменателе дробно-рационального выражения. Данное действие можно осуществить путем разложения числителя и знаменателя на множители в каноническом виде. Все коэффициенты при неизвестном должны быть положительны.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} > 0.$$

Важно помнить, что нули в знаменателе дроби делают выражение неопределенным, поэтому данные корни следует обязательно исключить из ответа, но все равно нанести на числовую ось. Далее необходимо нанести все корни на числовую ось, в порядке возрастания, и таким образом разбить ее на интервалы. Пусть $a < b < c < d$.

Следующим шагом является проверка каждого интервала на знак выражения. Для этого нужно взять число в каждом интервале, подставить его в первоначальное дробно-рациональное выражение и определить его знак. Берем число $x > d$ и подставляем в неравенство. Получаем, например, $x - a > 0, x - b > 0, x - c > 0, x - d > 0$. Следовательно, и все выражение > 0. Далее наносят данный знак на этот интервал. Аналогично получают знаки на остальных интервалах $(-\infty; a), (a; b), (b; c), (c, d)$. В результате получаем результат: рис. 2а. По условию записываем необходимый ответ: $(-\infty; a) \cup (b; c) \cup (d; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x + 2} > 0.$$

Решение. Находим корни выражения в числителе $x = -4, x = 2$, и записываем его в виде множителей:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} \geq 0.$$

Корень $x = -2$ в знаменателе необходимо исключить из ответа.

Наносим все корни на числовую ось в порядке возрастания.

Далее берем из каждого интервала число, подставляем в первоначальное дробно-рациональное выражение и определяем его знак. Наносим их на числовую ось. Получаем рис. 2б.

По условию нам требуются значения выражения ≥ 0. Следовательно, ответом задачи будут являться промежутки $[-4; -2) \cup [2; +\infty)$.

В некоторых дробно-рациональных неравенствах может потребоваться найти лишь знак крайнего интервала и далее знаки будут чередоваться, но такое выполняется не всегда, поэтому важно помнить следующее:

Замечание 1. *Необходимо учитывать в ответе не только нули в знаменателе, но и знак неравенства. Если неравенство строгое (то есть $>$ либо $<$), то нули исключают из ответа. Если неравенство нестрогое (то есть $\geq$ либо $\leq$), то нули следует включить в ответ.*

Замечание 2. *Если один из множителей стоит в четной степени, то при переходе на числовой оси через соответствующий данному множителю корень знак выражения меняться не будет. Соответственно, если степень нечетная, то знак меняется.*

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x^2-16)}{(x-1)^2} < 0.$$

Решение. Разложим числитель на множители.

$$\frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)^2} < 0.$$

Получаем корни $x = 4, x = -4, x = 1$.

Заметим, что в знаменателе стоит множитель в четной степени, поэтому по ранее приведенному замечанию, при переходе на числовой оси через $x = 1$, знак выражения меняться не будет. Наносим корни на числовую ось.

Берем $x = 5$ и подставляем в изначальное дробно-рациональное выражение.

$$\frac{(5-4)(5+4)}{(5-1)^2} = \frac{9}{16} > 0.$$

Получили выражение > 0, следовательно, на оси ставим знак «+» на соответствующий интервал.

Далее идет чередование, так как корень $x = 4$ – нечетный, и ставится знак «$-$». Далее чередования знаков не будет, так как корень $x = 1$ является четным. Ставим «$-$». И далее снова чередование, так как корень $x = -4$ является нечетным (рис. 2в).

Из условия нам требуется найти промежутки, на которых выражение < 0. Следовательно, по рис. 2в получаем ответ: $(-4; 1) \cup (1; 4)$.

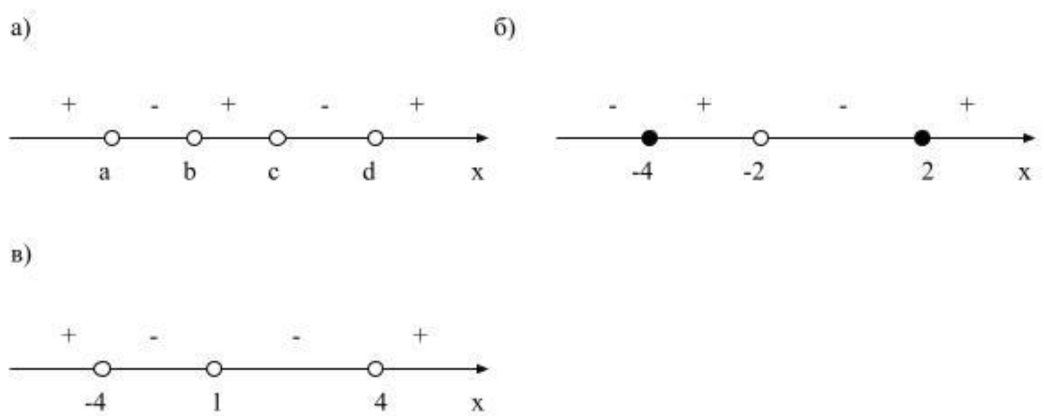


Рис. 2

Замечание 3. *При решении дробно-рационального неравенства мы можем получить множитель, который нельзя разложить на более простые множители ($D < 0$), в таком случае данный множитель можно сократить без потери корня.*

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{x^3 - 27}{x^3 + 27} > 0$$

Решение. Раскладываем числитель и знаменатель на множители, получаем:

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x^2-3x+9)} > 0.$$

Имеем два множителя, которые нельзя разложить на более простые (x^2+3x+9) и (x^2-3x+9). Так как $(x^2+3x+9) > 0$ при любом $x \in R$ и $(x^2-3x+9) > 0$ при любом $x \in R$, то получим

$$\frac{(x-3)}{(x+3)} > 0.$$

Далее используем метод интервалов и получаем решение последнего неравенства, то есть $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Для решения рациональных неравенств следует в качестве повторения рассмотреть тему разложения многочлена на множители.

Другим важным этапом в изучении неравенств является использование технологии укрупнения дидактических единиц в школьном курсе математики.

Технология укрупнения дидактических единиц подробно описана в работах Пюрвя Мучкаевича Эрдниева. На основании его заключений можно сделать вывод, что технология укрупнения основана на разбиении материала на блоки и последующем углубленном изучении каждого из них.

Укрупнение неравенств может быть реализовано с использованием способов, аналогичных способам укрупнения уравнений [3], например:

1) изменение требования, дополнение к уже имеющемуся требованию;
2) изменение условия;
3) изменение метода решения;
4) конкретизация;
5) обобщение.

Технологии укрупнения могут использоваться для обобщения, подведения итогов, повторения уже изученных тем.

Для решения рациональных неравенств можно использовать следующие способы укрупнения.

1. Укрупнение неравенства через изменение условия путем тождественных преобразований выражений. Получается следующий блок неравенств:

1.1. Определить множество решений неравенства $x(x-1)(x+2)(x-3) \leq 0$.
1.2. Определить множество решений неравенства $x(x-1)(x^2-5x+6) \leq 0$.
1.3. Определить множество решений неравенства $(x^2-x)(x^2-5x+6) \leq 0$.
1.4. Определить множество решений неравенства $x(x^3-6x^2+11x-6) < 0$.
1.5. Определить множество решений неравенства $x^4-6x^3+11x^2-6x < 0$.
1.6. Определить множество решений неравенства $x^4-6x^3 < x(6-11x)$.
1.7. Определить множество решений неравенства $x^3(x-6) < x(6-11x)$.

2. Укрупнение неравенства путем изменения требования, в результате которого образуется следующий блок неравенств:

2.1. Определить множество решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.2. Определить множество целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.3. Определить сумму целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.4. Определить среднее арифметическое целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.5. Определить множества целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$, принадлежащих промежутку $(-2; 2)$.
2.6. Определить сумму целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$, принадлежащих промежутку $(-3; 3)$.

3. При решении рационального неравенства $x^3 - x^2 - 8x + 6 > 0$ левую часть необходимо разложить на множители для применения метода интервалов. Это можно сделать двумя методами, что приводит к укрупнению неравенства.

3.1. Метод группировки $x^3 - x^2 - 8x + 6 > 0,$

$$x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x - 2x + 6 > 0,$$
$$x^2(x-3) + 2x(x-3) - 2(x-3) > 0,$$
$$(x-3)(x^2 + 2x - 2) > 0,$$
$$(x-3)\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right) > 0.$$

Далее используем метод интервалов.

3.2. Метод подбора. Если левая часть неравенства (многочлен) имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Проверкой находим $x = 3$, так как $27 - 9 - 24 + 6 = 0$. Далее делим «уголком» $x^3 - x^2 - 8x + 6$ на $x - 3$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -8x & +6 & x \quad -3 \\ \cline{5-5}
x^3 & -3x^2 & & & x^2 \quad +2x \quad -2 \\ \cline{1-4}
& 2x^2 & -8x & +6 & \\
& 2x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
& & -2x & +6 & \\
& & -2x & +6 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Рис. 3

Поэтому $x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x-3)(x^2 + 2x - 2) = (x-3)\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right)$, то есть неравенство принимает вид $(x-3)\left(x + 1 + \sqrt{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right) > 0.$

Для решения дробно-рациональных неравенств можно использовать способы укрупнения следующим образом.

1. Укрупнение одного и того же дробно-рационального неравенства через изменение его условия.

1.1. Определить множество решений неравенства

$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0.$$

1.2. Определить множество решений неравенства

$$\frac{(x-3)^2}{6x - x^2 - 5} > 0.$$

1.3. Определить множество решений неравенства

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{6x - x^2 - 5} > 0.$$

1.4. Определить множество решений неравенства

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{(x-5)(1-x)} > 0.$$

1.5. Определить множество решений неравенства

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0.$$

1.6. Определить множество решений неравенства

$$\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}.$$

2. Укрупнение неравенства через изменение требования.

2.1. Определить множество решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0.$

2.2. Определить множество целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.3. Определить сумму целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.4. Определить среднее арифметическое целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.5. Определить наибольшее целое решение неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.6 Определить множество целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$, принадлежащих промежутку $[1; 5]$.

Заключение. Таким образом, для успешного изучения целых и дробных рациональных неравенств целесообразно добиться от учащихся уверенного овладения умениями в преобразовании рациональных выражений, применения общей схемы решения рациональных неравенств:

1) перенести все члены неравенства в левую часть, т.е. привести неравенство к виду

$$f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq, \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x) \leq 0};$$

2) разложить $f(x)$ и $g(x)$ на множители;

3) применить к полученному неравенству метод интервалов;

4) записать ответ в соответствии со знаком неравенства.

Кроме того, необходимо освоить следующие методы решения: группировки, введения новой переменной, подбора.

И, наконец, последним этапом должен быть новый, нетрадиционный этап укрупнения неравенств. В процессе его реализации следует использовать блоки укрупненных рациональных неравенств, составленных с помощью разнообразных способов укрупнения: изменение требования по решению неравенства; изменение условия неравенства; решение неравенства разными методами; конкретизация неравенств; обобщение неравенств.

Предложенная методическая схема изучения рациональных неравенств способствует осознанному и прочному усвоению рассматриваемой темы, развитию таких приемов умственной деятельности, как сравнение, аналогия, анализ, синтез, обобщение, конкретизация, индукция, дедукция, а также раскрытию творческих способностей школьников.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.
2. Письменный, Д.Т. Готовимся к экзамену по математике / Д.Т. Письменный. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Рольф, 2001. – 320 с.
3. Устименко, В.В. Методика работы с логарифмическими уравнениями в контексте укрупнения дидактических единиц / В.В. Устименко, О.А. Попп // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2016. – № 3(92). – С. 88–94.

R E F E R E N C E S

1. Erdniyev P.M., Erdniyev B.P. *Ukrupneniye didakticheskikh yedinits v obuchenii matematike: kn. dlia uchitelia* [Enlargement of Didactic Units in Teaching Math: Teacher's Book], M.: Prosveshcheniye, 1986, 255 p.
2. Pismenny D.T. *Gotovimsia k ekzamenu po matematike* [Reading for the Exam in Math], M.: Rolf, 2001, 320 p.
3. Ustimenko V.V., Popp O.A. *Vesn. Vitseb. dziarzh. un-ta* [Journal of Vitebsk Sate University], 2016, 3(92), pp. 88–94.

Поступила в редакцию 13.01.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: molodechkina00@mail.ru – Молодечкина А.А.

ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

Абрамава Ірына Васільеўна – дацэнт кафедры геаграфіі і прыродакарыстання УА "БрДУ імя А.С. Пушкіна", кандыдат біялагічных навук, дацэнт.

Александровіч Таццяна Аліеўна – старшы выкладчык кафедры матэматыкі ВДУ імя П.М. Машэрава, магістр фізіка-матэматычных навук.

Антаневіч Наталля Георгіеўна – загадчык лабараторыі імуналогіі і вірусалогіі Інстытута біяфізікі і клетачнай інжынерыі НАН Беларусі, кандыдат біялагічных навук.

Вараб'ёў Мікалай Цімафеевіч – прафесар кафедры матэматыкі УА "ВДУ імя П.М. Машэрава", доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар.

Вараб'ёў Сяргей Мікалаевіч – дацэнт кафедры матэматыкі УА "ВДУ імя П.М. Машэрава", кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Ганчароў Андрэй Яўгенавіч – дырэктар Інстытута біяфізікі і клетачнай інжынерыі НАН Беларусі, кандыдат медыцынскіх навук, дацэнт.

Гапанёнак Юлія Васільеўна – дэкан факультэта фізічнай культуры і спорту ВДУ імя П.М. Машэрава, магістр педагагічных навук.

Ермачэнка Сяргей Аляксандравіч – дацэнт кафедры прыкладнога і сістэмнага праграмавання ВДУ імя П.М. Машэрава, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Кавалевіч Марыя Сцяпанаўна – дацэнт кафедры педагогікі УА "БрДУ імя А.С. Пушкіна", кандыдат педагагічных навук, дацэнт.

Карчэўская Алена Аляксееўна – загадчык кафедры прыкладнога і сістэмнага праграмавання ВДУ імя П.М. Машэрава, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Леанюк Надзея Аляксандраўна – дэкан сацыяльна-педагагічнага факультэта УА "БрДУ імя А.С. Пушкіна", кандыдат педагагічных навук, дацэнт.

Ломаўцаў Фёдар Ягоравіч – прафесар кафедры матэматычнай кібернетыкі БДУ, доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар.

Маладзечкіна Анастасія Андрэеўна – магістрант кафедры матэматыкі ВДУ імя П.М. Машэрава.

Малах Вольга Мікалаеўна – загадчык кафедры тэорыі і методыкі фізічнай культуры і спартыўнай медыцыны ВДУ імя П.М. Машэрава, кандыдат біялагічных навук, дацэнт.

Маркава Людміла Васільеўна – старшы навуковы супрацоўнік лабараторыі рэафізікі і макракінетыкі Інстытута цепла- і масаабмену імя А.В. Лыкава НАН Беларусі, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Мініна Наталля Уладзіміраўна – дацэнт кафедры тэорыі і методыкі фізічнай культуры і спартыўнай медыцыны ВДУ імя П.М. Машэрава, кандыдат педагагічных навук, дацэнт.

Мініч Яна Сяргееўна – навуковы супрацоўнік лабараторыі імуналогіі і вірусалогіі Інстытута біяфізікі і клетачнай інжынерыі НАН Беларусі.

Ніканава Таццяна Віктараўна – загадчык кафедры матэматыкі і інфармацыйных тэхналогій УА "ВДТУ", кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Сінюціч Аляксандр Аляксеевіч – старшы выкладчык кафедры тэорыі і методыкі фізічнай культуры і спартыўнай медыцыны ВДУ імя П.М. Машэрава, магістр педагагічных навук.

Скаромнік Аксана Валер'еўна – дацэнт кафедры матэматыкі і камп'ютарнай бяспекі УА "Полацкі дзяржаўны ўніверсітэт імя Еўфрасінні Полацкай", кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Стайнова Анастасія Андрэеўна – выкладчык-стажор кафедры інфармацыйных тэхналогій і кіравання бізнесам УА "ВДУ імя П.М. Машэрава".

Старчанка Уладзімір Мікалаевіч – дацэнт кафедры тэорыі і методыкі фізічнай культуры УА "ГДУ імя Францыска Скарыны", кандыдат педагагічных навук, дацэнт.

Сяргеенка Аляксандр Мікалаевіч – выкладчык кафедры фізічнага выхавання і спорту УА "ГДМУ", аспірант кафедры тэорыі і методыкі фізічнай культуры УА "ГДУ імя Францыска Скарыны".

Точка Таццяна Сяргееўна – аспірант кафедры матэматычнай кібернетыкі БДУ, магістр фізіка-матэматычных навук.

Усціменка Уладзімір Віктаравіч – дацэнт кафедры матэматыкі ВДУ імя П.М. Машэрава, кандыдат педагагічных навук, дацэнт.

Цімохіна Аксана Васільеўна – навуковы супрацоўнік лабараторыі імуналогіі і вірусалогіі Інстытута біяфізікі і клетачнай інжынерыі НАН Беларусі.

Цішуцін Мікалай Аляксеевіч – аспірант кафедры фізіялогіі і біяхіміі УА "Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт фізічнай культуры", магістр педагагічных навук.

Шлапакоў Сяргей Аляксеевіч – дацэнт кафедры прыкладнога і сістэмнага праграмавання ВДУ імя П.М. Машэрава, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт.

Шпакава Юлія Аляксееўна – студэнтка другога курса факультэта матэматыкі і інфармацыйных тэхналогій ВДУ імя П.М. Машэрава.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Abramova Iryna Vasilyeuna – Assistant Professor of A.S. Pushkin State University of Brest Department of Geography and Nature Studies, PhD (Biology), Assistant Professor.

Aleksandrovich Tatsiana Aliyeuna – Senior Lecturer of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Mathematics, Master of Meathematics.

Antonevich Natallia Georgiyeuna – Head of Laboratory of Imunology and Virus Studies of NAS of Belarus Institute of Biophysics and Cell Engineering, PhD (Biology).

Varabyeu Mikalai Tsimafeyevich – Professor of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Mathematics, Dr.Sc. (Mathematics), Professor.

Varabyeu Sergei Mikalayevich – Assistant Professor of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Mathematics, PhD (Mathematics), Assistant Professor.

Gancharou Andrei Yaugenavich – Head of NAS of Belarus Institute of Biophysics and Cell Engineering, PhD (Medicine), Assistant Professor.

Gapanenak Yulia Vasilyeuna – Dean of Vitebsk State P.M. Masherov University Faculty of Physical Education and Sports, Master of Education Sciernce.

Yermachenka Siargei Aliaksandravich – Assistant Professor of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Applied and System Programming, PhD (Physics and Math), Assistant Professor.

Kavalevich Mariya Stsiapanauna – Assistant Professor of A.S. Pushkin State University of Brest Department Pedagogy, PhD (Education), Assistant Professor.

Karcheuskaya Alena Aliakseyeuna – Head of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Applied and System Programming, PhD (Physics and Math), Assistant Professor.

Levaniuk Nadzeya Aliaksandrauna – Dean of A.S. Pushkin State University of Brest Faculty of Social and Pedagogical Sciences, PhD (Education), Assistant Professor.

Lomautsau Feodar Yagoravich – Professor of BSU Department Mathematical Cybernetics, Dr.Sc. (Physics and Math), Professor.

Maladzechkina Anastasiya Andreyeuna – Master of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Math.

Malakh Volga Mikhailauna – Head of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Theory and Methods of Physical Education and Sport Medicine, PhD (Biology), Assistant Professor.

Markava Liudmila Vasilyeuna – Senior Researcher of Laboratory of Reaphysics and Macrokinetics of NAS of Belarus A.V. Lykau Institute of Heat and Mass Exchange, PhD (Physics and Math), Assistant Professor.

Minina Natallia Uladzimirauna – Assistant Professor of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Theory and Methods of Physical Education and Sport Medicine, PhD (Education), Assistant Professor.

Minich Yana Siargeyeuna – Researcher of Laboratory of Imunology and Virus Studies of NAS of Belarus Institute of Biophysics and Cell Engineering.

Nikanava Tatsiana Viktarauna – Head of Vitebsk State Technological University Department of Mathematics and Information Technologies, PhD (Physics and Math), Assistant Professor.

Siniutich Aliaksandr Aliakseyevich – Senior Lecturer of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Theory and Methods of Physical Education and Sport Medicine, Master of Education Science.

Skaromnik Aksana Valeryeuna – Assistant Professor of Euphrosyne of Polotsk State University of Polotsk Department of Math and Computer Security, PhD (Physics and Math), Assistant Professor.

Stainova Anastasiya Andreyeuna – Trainee Teacher of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Information Technologies and Business Management.

Starchanka Uladzimir Mikalayevich – Assistant Professor of of Grodno State Francisk Skaryna Universsity Department of Theory and Methods of Physical Education, PhD (Education), Assistant Professor.

Siargeyenka Aliaksandr Mikalayevich – Lecturer of GSMU Department of Physical Education and Sports, Postgraduate Student of Grodno State Francisk Skaryna Universsity Department of Theory and Methods of Physical Education.

Tochka Tatsiana Siargeyeuna – Posrgraduate Student of BSU Department of Mathematical Cybernetics, Master of Physics and Math.

Ustsimenka Uladzimir Viktaravich – Assistant Professor of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Mathematics, PhD (Education), Assistant Professor.

Tsimokhina Aksana Vasilyeuna – Researcher of Laboratory of Imunology and Virus Studies of NAS of Belarus Institute of Biophysics and Cell Engineering.

Tsishutsin Mikalai Aliakseyevich – Postgraduate Student of Belarusian State University of Physical Education Department of Physiology and Biochemistry, Master of Education Science.

Shlapakou Siargei Aliakseyevich – Assistant Professor of of Vitebsk State P.M. Masherov University Department of Applied and System Programming, PhD (Physics and Math), Assistant Professor.

Shpakava Yulia Aliakseyeuna – second year student of Vitebsk State P.M. Masherov University Faculty of Mathematics and Information Technologies.

ПРАВІЛЫ ДЛЯ АЎТАРАЎ

1. «Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта» публікуе вынікі навуковых даследаванняў, якія праводзяцца ў Віцебскім дзяржаўным універсітэце, навуковых установах і ВНУ рэспублікі, СНД і іншых краін. Асноўным крытэрыем мэтазгоднасці публікацыі з'яўляецца навізна і арыгінальнасць артыкула. Навуковы часопіс уключаны ў Пералік навуковых выданняў, рэкамендаваных ВАК Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў па біялагічных, педагагічных, фізіка-матэматычных навуках. Па-за чаргой публікуюцца навуковыя артыкулы аспірантаў апошняга года навучання (уключаючы артыкулы, якія падрыхтаваны імі ў суаўтарстве) пры ўмове іх поўнай адпаведнасці патрабаванням, што прад'яўляюцца да навуковых публікацый выдання.

2. Патрабаванні да афармлення артыкула:

2.1. Рукапісы артыкулаў прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове.

2.2. Кожны артыкул павінен утрымліваць наступныя элементы:

– індэкс УДК;
– назва артыкула;
– прозвішча і ініцыялы аўтара (аўтараў);
– арганізацыя, якую ён (яны) прадстаўляе;
– уводзіны;
– раздзел «Матэрыял і метады»;
– раздзел «Вынікі і іх абмеркаванне»;
– заключэнне;
– спіс выкарыстанай літаратуры.

2.3. Назва артыкула павінна адлюстроўваць яго змест, быць па магчымасці лаканічнай, утрымліваць ключавыя словы, што дазволіць індэксаваць артыкул.

2.4. Ва *ўводзінах* даецца кароткі агляд літаратуры па праблеме, указваюцца не вырашаныя раней пытанні, фармулюецца і абгрунтоўваецца мэта, падаюцца спасылкі на працы іншых аўтараў за апошнія гады, а таксама на замежныя публікацыі.

2.5. Раздзел *«Матэрыял і метады»* ўключае апісанне методыкі, тэхнічных сродкаў, аб'ектаў і зместу даследаванняў, праведзеных аўтарам (аўтарамі).

2.6. У раздзеле *«Вынікі і іх абмеркаванне»* аўтар павінен зрабіць высновы з пункту гледжання іх навуковай навізны і супаставіць з адпаведнымі вядомымі дадзенымі. Гэты раздзел можа дзяліцца на падраздзелы з паяснянльнымі падзагалоўкамі.

2.7. У *заключэнні* ў сціслым выглядзе павінны быць сфармуляваны атрыманыя вынікі, з указаннем на дасягненне пастаўленай мэты, навізну і магчымасці прымянення на практыцы.

2.8. Спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 12 спасылак. Спасылкі нумаруюцца адпаведна з парадкам іх цытавання ў тэксце. Парадкавыя нумары спасылак пішуцца ў квадратных дужках па схеме: [1], [2]. Спіс літаратуры афармляецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі ДАСТ – 7.1-2003. Спасылкі на неапублікаваныя працы, дысертацыі не дапускаюцца. Указваецца поўная назва аўтарскага пасведчання і дэпаніраванага рукапісу, а таксама арганізацыя, якая прад'явіла рукапіс да дэпаніравання.

2.9. Артыкулы падаюцца ў рэдакцыю аб'ёмам не менш за 0,35 аўтарскага аркуша 14000 друкаваных знакаў, з прабеламі паміж словамі, знакамі прыпынку, лічбамі і інш.), надрукаваных праз адзін інтэрвал, шрыфт Times New Roman памерам 11 пт. У гэты аб'ём уваходзяць тэкст, табліцы, спіс літаратуры. Колькасць малюнкаў не павінна перавышаць трох. Малюнкі і схемы павінны падавацца асобнымі файламі ў фармаце jpg. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Артыкулы павінны быць падрыхтаваны ў рэдактары Word для Windows. Простыя формулы і літарныя абазначэнні велічынь трэба ўстаўляць, выкарыстоўваючы Symbol (напрыклад, ∞, A_1, β^k, °C). Складаныя формулы набіраюцца тым жа шрыфтам і памерам, што і асноўны тэкст, пры дапамозе рэдактара формул Equation.

2.10. У дадатак да папяровай версіі артыкула ў рэдакцыю здаецца электронная версія матэрыялаў. Электронная і папяровая версіі артыкула павінны быць ідэнтычнымі. Адрас электроннай пошты ўніверсітэта (nauka@vsu.by).

3. Да артыкула дадаюцца наступныя матэрыялы (на асобных лістах):

– рэферат (100–250 слоў), які павінен дакладна перадаваць змест артыкула і быць прыдатным для апублікавання ў анатацыях да часопісаў асобна ад артыкула, і ключавыя словы на мове арыгінала. Ён павінен мець наступную структуру: уводзіны, мэту, матэрыял і метады, вынікі і іх абмеркаванне, заключэнне;
– назва артыкула, прозвішча, імя, імя па бацьку аўтара (поўнасцю), месца яго працы, рэферат, ключавыя словы і спіс літаратуры на англійскай мове;
– нумар тэлефона, адрас электроннай пошты аўтара;
– рэкамендацыя кафедры (навуковай лабараторыі) да друку;
– экспертнае заключэнне аб магчымасці апублікавання матэрыялаў у друку;
– кароткія звесткі пра аўтара на беларускай і англійскай мовах: прозвішча, імя, імя па бацьку аўтара (поўнасцю); пасада; месца працы; навуковая ступень; навуковае званне; адрас для карэспандэнцыі (лепш электронны).

4. Артыкулы, якія дасылаюцца ў рэдакцыю часопіса, падлягаюць абавязковай праверцы на арыгінальнасць і карэктнасць запазычанняў сістэмай «Антыплагіят.ВНУ». Для арыгінальных навуковых артыкулаў ступень арыгінальнасці павінна быць не менш за 85%, для аглядаў – не менш за 75%.

5. Па рашэнні рэдкалегіі артыкул накіроўваецца на рэцэнзію, затым візіруецца членам рэдкалегіі. Вяртанне артыкула аўтару на дапрацоўку не азначае, што ён прыняты да друку. Перапрацаваны варыянт артыкула зноў разглядаецца рэдкалегіяй. Датай паступлення лічыцца дзень атрымання рэдакцыяй канчатковага варыянта артыкула.

6. Накіраванне ў рэдакцыю раней апублікаваных або прынятых да друку ў іншых выданнях работ не дапускаецца.

7. Адказнасць за прыведзеныя ў матэрыялах факты, змест і дакладнасць інфармацыі нясуць аўтары.

GUIDELINES FOR AUTHORS

1. «Vesnik of Vitebsk State University» publishes results of scientific research conducted at Vitebsk State University as well as at scientific institutions and universities, CIS and other countries. The main criterion for the publication is novelty and specificity of the article. The scientific journal is included into the List of scientific publications recommended by Supreme Qualification Commission (VAK) of the Republic of Belarus for publishing the results of dissertation research in biological, pedagogical, physical and mathematical sciences. The priority for publication is given to scientific articles by postgraduates in their last year (including their articles written with co-authors) on condition these articles correspond the requirements for scientific articles of the journal.

2. Guidelines for the layout of a publication:

2.1. Articles are to be in Belarusian, Russian or English.

2.2. Each article is to include the following elements:

– UDK index;
– title of the article;
– name and initial of the author (authors);
– institution he (she) represents;
– introduction;
– «Material and methods» section;
– «Findings and their discussion» section;
– conclusion;
– list of applied literature.

2.3. *The title* of the article should reflect its contents, be laconic and contain key words which will make it possible to classify the article.

2.4. *The introduction* should contain a brief review of the literature on the problem. It should indicate not yet solved problems. It should formulate the aim; give references to the recent articles of other authors including foreign publications.

2.5. *«Material and methods»* section» includes the description of the method, technical aids, objects and contents of the author's (authors') research.

2.6. In *«Findings and their discussion»* section the author should draw conclusions from the point of view of their scientific novelty and compare them with the corresponding well-known data. This section can be divided into sub-sections with explanatory subtitles.

2.7. *The conclusion* should contain a brief review of the findings, indicating the achievement of this goal, their novelty and possibility of practical application.

2.8. The list of literature shouldn't include more than 12 references. The references are to be numerated in the order of their citation in the text. The order number of a reference is given in square brackets e.g. [1], [2]. The layout of the literature list layout is to correspond State Standard (GOST) – 7.1-2003. References to articles and theses which were not published earlier are not permitted. A complete name of the author's certificate and the deposited copy is indicated as well as the institution which presented the copy for depositing.

2.9. Two copies of articles of at least 0,35 of an author sheet size (14000 printing symbols with blanks, punctuation marks, numbers etc.), interval 1, Times New Roman 11 pt are sent to the editorial office. This size includes the text, charts and list of literature. Not more than three pictures are allowed. Pictures and schemes are to be presented in individual *jpg* files. Photos are not allowed. Articles should be typed in Word for Windows. Simple formulas and alphabetical symbols of dimensions should be put by using Symbol (e.g. $\boldsymbol{\infty}$, A_1, β^k, °C). Complicated formulas are typed by the same point and size as the basic text with the help of formula's editor Equation.

2.10. The electronic version should be attached to the paper copy of the article submitted to the editorial board. The electronic and the paper copies of the article should be identical. The university e-mail address is nauka@vsu.by).

3. Following materials (on separate sheets) are attached to the article:

– summary (100–250 words), which should precisely present the contents of the article, should be liable for being published in magazine summaries separately from the article as well as the key words in the language of the original. The structure of the summary is the following: introduction, objective, material and methods, findings and their discussion, conclusion;
– title of the article, surname, first and second names of the author (without being shortened), place of work, summary, key words and the list of literature should be in English;
– author's telephone number, e-mail address;
– recommendation of the department (scientific laboratory) to publish the article;
– expert conclusion on the feasibility of the publication;
– brief information about the author in Belarusian and Russian: the author's surname, name, patronymic; position, employment place; degree, title; post address (e-mail preferably).

4. All articles submitted to the editorial office of the journal are subject to mandatory verification of originality and correctness of borrowings by the Antiplagiat.VUZ system. For original scientific articles the degree of originality should be at least 85%, for reviews – at least 75%.

5. On the decision of the editorial board the article is sent for a review, and then it is signed by the members of the editorial board. If the article is sent back to the author for improvement it doesn't mean that it has been accepted for publication. The improved variant of the article is reconsidered by the editorial board. The article is considered to be accepted on the day when the editorial office receives the final variant.

6. Earlier published articles as well as articles accepted for publication in other editions are not admitted.

7. The authors carry responsibility for the facts provided in the articles, the content and the accuracy of the information.

Выдавец і паліграфічнае выкананне – установа адукацыі
“Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт імя П.М. Машэрава”.

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі ў якасці выдаўца,
вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў
№ 1/255 ад 31.03.2014.

Надрукавана на рызографе ўстановы адукацыі
“Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт імя П.М. Машэрава”.
210038, г. Віцебск, Маскоўскі праспект, 33.

Пры перадрукаванні матэрыялаў спасылка
на “Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта” з’яўляецца абавязковай.