УДК 37.091.33:51

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КОНТЕКСТЕ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ

В.В. Устименко, А.А. Молодечкина
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Одной из основных содержательных линий школьного курса математики является линия неравенств.

Цель исследования – выявить наиболее эффективную схему решения рациональных неравенств и возможные способы их укрупнения.

Материал и методы. *Материал для внедрения в учебный процесс подготовлен с использованием основных положений технологий укрупнения дидактических единиц, обобщающего блочного повторения для применения в 9–10 классах ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей» и ГУО «Средняя школа № 1 г.п. Шумилино имени П.А. Акуционка». При этом использовались эмпирические и логические методы.*

Результаты и их обсуждение. *Проведя исследовательскую работу по данным темам в учебно-методической литературе, авторы пришли к выводу, что для эффективного изучения темы можно выделить два этапа: первый – это само изучение темы рациональных неравенств, другим важным этапом в изучении неравенств является применение технологии укрупнения дидактических единиц в школьном курсе математики, которые можно использовать для изучения, обобщения и систематизации, конкретизации знаний и умений по данной теме.*

Заключение. *Предложенная методическая схема изучения рациональных неравенств способствует осознанному и прочному усвоению рассматриваемой темы, развитию таких приемов умственной деятельности, как сравнение, аналогия, анализ, синтез, обобщение, конкретизация, индукция, дедукция, а также раскрытию творческих способностей школьников.*

Ключевые слова: *рациональные неравенства, дробно-рациональные неравенства, методы решения, технологии укрупнения.*

TEACHING SCHOOLCHILDREN TO SOLVE RATIONAL INEQUATIONS IN THE CONTEXT OF ENLARGING DIDACTIC UNITS

V.V. Ustimenko, A.A. Molodechkina
Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

One of the basic content lines of the school course of Math is the line of inequations.

The research purpose is to identify the most efficient scheme of solving rational inequations and possible ways of their enlargement.

Material and methods. *The material for the introduction into the academic process was prepared using main ideas of the technology of the enlargement of didactic units, generalizing block revision to be used in the 9^{th}–10^{th} years at Secondary School No 31 of the City of Vitebsk and Secondary School No 1 of Shumilino. Empiric and logical methods were used in the research.*

Findings and their discussion. *After doing a research on the topics using academic and methodological literature the authors came to the conclusion that two stages can be singled out for efficient studying the topic: the fisrt is studying the topic of rational inequalities itself, the other important stage is using the technology of enlargement of didactic units in the school course of Math. They can be used for the study, generalizing and systematization, concretization of knowledge and skills on the topic.*

Conclusion. *The suggested methodological scheme of studying rational inequations provides for stable mastering of the topic under consideration, development of such mental activities as comparison, analogy, analysis, synthesis, generalization, concretization, induction, deduction as well as revealing creative abilities of schoolchildren.*

Key words: *rational inequations, share-rational inequations, methods of solving, technology of enlargement.*

Одной из основных содержательных линий школьного курса математики является линия неравенств. При этом обучение учащихся решению различных неравенств остается важнейшей из задач методики преподавания математики. Необходимо отметить, что систематическое изучение неравенств осуществляется в следующей последовательности: линейные неравенства с одной переменной (7 класс), квадратные неравенства (8 класс), целые и дробные рациональные неравенства (9 класс), показательные и логарифмические неравенства (11 класс). Вместе с тем отсутствуют даже простейшие тригонометрические и иррациональные неравенства.

Кроме того, существуют различные подходы в обучении школьников решению неравенств в зависимости от того, на каком уровне изучается математика. На базовом уровне обучение происходит на основе ныне действующих учебников алгебры. В предпрофильных и профильных математических классах учителя знакомят учащихся с решением неравенств (линейных, квадратных, рациональных) в общем виде, показывают дополнительные приемы и методы решения.

При этом практически отсутствует технология укрупнения дидактических единиц (П.М. Эрдниев), позволяющая рассматривать взаимосвязи между различными неравенствами путем составления цепочек (блоков) укрупненных неравенств по линии их решений, осуществлять обобщающее повторение изученного ранее материала [1].

Цель исследования – выявить наиболее эффективную схему решения рациональных неравенств и возможные способы их укрупнения.

Материал и методы. Материал для внедрения в учебный процесс подготовлен с использованием основных положений технологий укрупнения дидактических единиц, обобщающего блочного повторения, школьных учебников по алгебре, дополнительных учебных пособий по математике, опыта работы авторов со школьниками. Данный материал проходил апробацию в 9–10 классах (учитель математики А.Б. Яцковская) на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей» (учитель математики П.А. Ковалёва) на базе ГУО «Средняя школа № 1 г.п. Шумилино имени П.А. Акуционка». При этом применялись эмпирические и логические методы.

Результаты и их обсуждение. Одним из направлений в освоении неравенств является тема изучения рациональных неравенств (целых и дробных). Данная тема присутствует в школьном курсе алгебры в 8–9 классе. Основным методом решения рациональных неравенств является метод интервалов.

Рассмотрим алгоритм решения целых рациональных неравенств в общем виде. Так, нам необходимо решить неравенство вида: $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$. Возьмем $a > 0$.

Решение рациональных неравенств сводится к решению неравенств методом интервалов. Первым этапом является перенос слагаемых в левую часть неравенства. Далее следует разложить получившееся рациональное выражение на множители. Для того чтобы совершить указанное действие, нужно найти корни данного рационального выражения. Получим, например:

$$a(x-b)(x-c) > 0.$$

Далее строим числовую ось и наносим получившиеся корни в порядке возрастания. Берем, например, число $x < b$ и подставляем в первоначальное выражение. Получаем, к примеру, $x - b > 0, x - c > 0$. Следовательно, и все выражение будет положительным и интервалу $(-\infty; b)$ будет соответствовать знак «+». Наносим данный знак на числовую ось. Аналогичные действия совершаем и для остальных интервалов $(b; c), (c; +\infty)$.

По полученному рис. 1а) и по требуемому условию (> 0) записываем ответ: $(-\infty; b) \cup (c; +\infty)$.

Пример 1. Определить множество решений неравенства $x^2 + x - 6 > 0$.

Решение. Находим корни выражения $x^2 + x - 6$. Получаем $x = 2$ и $x = -3$.

Отмечаем полученные корни на числовой оси. Берем $x < -3$, например, $x = -5$. Подставляем в первоначальное выражение, получаем $(-5)^2 + (-5) - 6 = 25 - 5 - 6 = 14 > 0$. Следовательно, интервалу $(-\infty; -3)$ соответствует знак «+». Повторяем данные действия для остальных интервалов. Получаем результат – рис. 1б.

Основываясь на требуемом условии (> 0), записываем ответ $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

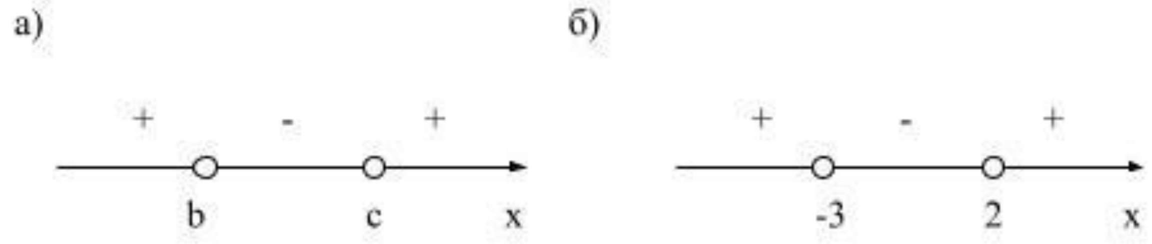

Рис. 1

Замечание 1. *Если выражение не имеет корней $D < 0$, то если $a > 0$, выражение положительно при любом х, если $a < 0$, то выражение отрицательно при любом х [2].*

Замечание 2. *В ныне действующих учебниках алгебры используется метод решения квадратных неравенств с помощью рисунка параболы $y = x^2 + bx + c$.*

Если мы имеем дело с неравенством со степенью > 2, то для их решения можно использовать различные методы решения, например метод подбора, метод группировки или метод введения новой переменной. Рассмотрим на примере метод введения новой переменной.

Пример 2. Определить множество решений неравенства $216x^6 + 19x^3 - 1 \le 0$.

Решение. Пусть $x^3 = t$. Получим $216t^2 + 19t - 1 \le 0, 216\left(t - \frac{1}{27}\right)\left(t + \frac{1}{8}\right) \le 0$,

$\left(t - \frac{1}{27}\right)\left(t + \frac{1}{8}\right) \le 0$. После обратной замены $t = x^3$ имеем $\left(x^3 - \frac{1}{27}\right)\left(x^3 + \frac{1}{8}\right) \le 0$,

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \le 0.$$

Так как $x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} > 0$ при любом $x \in R$ и $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} > 0$ при любом $x \in R$, то получим $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \le 0$. Применяя метод интервалов, найдем решение последнего неравенства, то есть $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Ответ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Далее рассмотрим алгоритм для решения дробно-рациональных неравенств в общем виде.

Главным в решении дробно-рациональных неравенств является нахождение корней в числителе и знаменателе дробно-рационального выражения. Данное действие можно осуществить путем разложения числителя и знаменателя на множители в каноническом виде. Все коэффициенты при неизвестном должны быть положительны.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} > 0.$$

Важно помнить, что нули в знаменателе дроби делают выражение неопределенным, поэтому данные корни следует обязательно исключить из ответа, но все равно нанести на числовую ось. Далее необходимо нанести все корни на числовую ось, в порядке возрастания, и таким образом разбить ее на интервалы. Пусть $a < b < c < d$.

Следующим шагом является проверка каждого интервала на знак выражения. Для этого нужно взять число в каждом интервале, подставить его в первоначальное дробно-рациональное выражение и определить его знак. Берем число $x > d$ и подставляем в неравенство. Получаем, например, $x - a > 0, x - b > 0, x - c > 0, x - d > 0$. Следовательно, и все выражение > 0. Далее наносят данный знак на этот интервал. Аналогично получают знаки на остальных интервалах $(-\infty; a), (a; b), (b; c), (c, d)$. В результате получаем результат: рис. 2а. По условию записываем необходимый ответ: $(-\infty; a) \cup (b; c) \cup (d; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x + 2} > 0.$$

Решение. Находим корни выражения в числителе $x = -4, x = 2$, и записываем его в виде множителей:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{x+2} \geq 0.$$

Корень $x = -2$ в знаменателе необходимо исключить из ответа.

Наносим все корни на числовую ось в порядке возрастания.

Далее берем из каждого интервала число, подставляем в первоначальное дробно-рациональное выражение и определяем его знак. Наносим их на числовую ось. Получаем рис. 2б.

По условию нам требуются значения выражения ≥ 0. Следовательно, ответом задачи будут являться промежутки $[-4; -2) \cup [2; +\infty)$.

В некоторых дробно-рациональных неравенствах может потребоваться найти лишь знак крайнего интервала и далее знаки будут чередоваться, но такое выполняется не всегда, поэтому важно помнить следующее:

Замечание 1. *Необходимо учитывать в ответе не только нули в знаменателе, но и знак неравенства. Если неравенство строгое (то есть $>$ либо $<$), то нули исключают из ответа. Если неравенство нестрогое (то есть $\geq$ либо $\leq$), то нули следует включить в ответ.*

Замечание 2. *Если один из множителей стоит в четной степени, то при переходе на числовой оси через соответствующий данному множителю корень знак выражения меняться не будет. Соответственно, если степень нечетная, то знак меняется.*

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x^2-16)}{(x-1)^2} < 0.$$

Решение. Разложим числитель на множители.

$$\frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)^2} < 0.$$

Получаем корни $x = 4, x = -4, x = 1$.

Заметим, что в знаменателе стоит множитель в четной степени, поэтому по ранее приведенному замечанию, при переходе на числовой оси через $x = 1$, знак выражения меняться не будет. Наносим корни на числовую ось.

Берем $x = 5$ и подставляем в изначальное дробно-рациональное выражение.

$$\frac{(5-4)(5+4)}{(5-1)^2} = \frac{9}{16} > 0.$$

Получили выражение > 0, следовательно, на оси ставим знак «+» на соответствующий интервал.

Далее идет чередование, так как корень $x = 4$ – нечетный, и ставится знак «$-$». Далее чередования знаков не будет, так как корень $x = 1$ является четным. Ставим «$-$». И далее снова чередование, так как корень $x = -4$ является нечетным (рис. 2в).

Из условия нам требуется найти промежутки, на которых выражение < 0. Следовательно, по рис. 2в получаем ответ: $(-4; 1) \cup (1; 4)$.

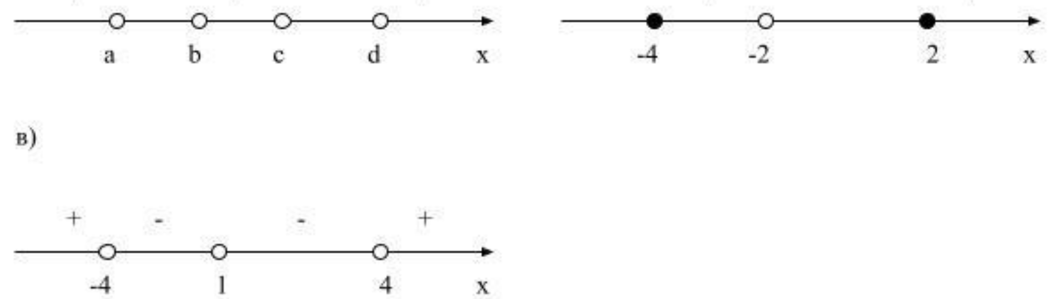

Рис. 2

Замечание 3. *При решении дробно-рационального неравенства мы можем получить множитель, который нельзя разложить на более простые множители ($D < 0$), в таком случае данный множитель можно сократить без потери корня.*

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{x^3 - 27}{x^3 + 27} > 0$$

Решение. Раскладываем числитель и знаменатель на множители, получаем:

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x^2-3x+9)} > 0.$$

Имеем два множителя, которые нельзя разложить на более простые $(x^2 + 3x + 9)$ и $(x^2 - 3x + 9)$. Так как $(x^2 + 3x + 9) > 0$ при любом $x \in R$ и $(x^2 - 3x + 9) > 0$ при любом $x \in R$, то получим

$$\frac{(x-3)}{(x+3)} > 0.$$

Далее используем метод интервалов и получаем решение последнего неравенства, то есть $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Для решения рациональных неравенств следует в качестве повторения рассмотреть тему разложения многочлена на множители.

Другим важным этапом в изучении неравенств является использование технологии укрупнения дидактических единиц в школьном курсе математики.

Технология укрупнения дидактических единиц подробно описана в работах Пюрвя Мучкаевича Эрдниева. На основании его заключений можно сделать вывод, что технология укрупнения основана на разбиении материала на блоки и последующем углубленном изучении каждого из них.

Укрупнение неравенств может быть реализовано с использованием способов, аналогичных способам укрупнения уравнений [3], например:

1) изменение требования, дополнение к уже имеющемуся требованию;
2) изменение условия;
3) изменение метода решения;
4) конкретизация;
5) обобщение.

Технологии укрупнения могут использоваться для обобщения, подведения итогов, повторения уже изученных тем.

Для решения рациональных неравенств можно использовать следующие способы укрупнения.

1. Укрупнение неравенства через изменение условия путем тождественных преобразований выражений. Получается следующий блок неравенств:

1.1. Определить множество решений неравенства $x(x-1)(x+2)(x-3) \leq 0$.
1.2. Определить множество решений неравенства $x(x-1)(x^2-5x+6) \leq 0$.
1.3. Определить множество решений неравенства $(x^2-x)(x^2-5x+6) \leq 0$.
1.4. Определить множество решений неравенства $x(x^3-6x^2+11x-6) < 0$.
1.5. Определить множество решений неравенства $x^4-6x^3+11x^2-6x < 0$.
1.6. Определить множество решений неравенства $x^4-6x^3 < x(6-11x)$.
1.7. Определить множество решений неравенства $x^3(x-6) < x(6-11x)$.

2. Укрупнение неравенства путем изменения требования, в результате которого образуется следующий блок неравенств:

2.1. Определить множество решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.2. Определить множество целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.3. Определить сумму целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.4. Определить среднее арифметическое целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$.
2.5. Определить множества целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$, принадлежащих промежутку $(-2; 2)$.
2.6. Определить сумму целых решений неравенства $x^2(x+2)(x-3) \leq 0$, принадлежащих промежутку $(-3; 3)$.

3. При решении рационального неравенства $x^3 - x^2 - 8x + 6 > 0$ левую часть необходимо разложить на множители для применения метода интервалов. Это можно сделать двумя методами, что приводит к укрупнению неравенства.

3.1. Метод группировки $x^3 - x^2 - 8x + 6 > 0$,

$$x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x - 2x + 6 > 0,$$
$$x^2(x-3) + 2x(x-3) - 2(x-3) > 0,$$
$$(x-3)(x^2 + 2x - 2) > 0,$$
$$(x-3)\left(x+1+\sqrt{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right) > 0.$$

Далее используем метод интервалов.

3.2. Метод подбора. Если левая часть неравенства (многочлен) имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Проверкой находим $x = 3$, так как $27 - 9 - 24 + 6 = 0$. Далее делим «уголком» $x^3 - x^2 - 8x + 6$ на $x - 3$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -8x & +6 & x \quad -3 \\ \cline{5-5}
x^3 & -3x^2 & & & x^2 \quad +2x \quad -2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -8x & +6 & \\
 & 2x^2 & -6x & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x & +6 & \\
 & & -2x & +6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Рис. 3

Поэтому $x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x-3)(x^2+2x-2) = (x-3)\left(x+1+\sqrt{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right)$, то есть неравенство принимает вид $(x-3)\left(x+1+\sqrt{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right) > 0$.

Для решения дробно-рациональных неравенств можно использовать способы укрупнения следующим образом.

1. Укрупнение одного и того же дробно-рационального неравенства через изменение его условия.

1.1. Определить множество решений неравенства

$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0.$$

1.2. Определить множество решений неравенства

$$\frac{(x-3)^2}{6x - x^2 - 5} > 0.$$

1.3. Определить множество решений неравенства

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{6x - x^2 - 5} > 0.$$

1.4. Определить множество решений неравенства

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{(x-5)(1-x)} > 0.$$

1.5. Определить множество решений неравенства

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0.$$

1.6. Определить множество решений неравенства

$$\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}.$$

2. Укрупнение неравенства через изменение требования.

2.1. Определить множество решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.2. Определить множество целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.3. Определить сумму целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.4. Определить среднее арифметическое целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.5. Определить наибольшее целое решение неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$.

2.6 Определить множество целых решений неравенства $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$, принадлежащих промежутку $[1; 5]$.

Заключение. Таким образом, для успешного изучения целых и дробных рациональных неравенств целесообразно добиться от учащихся уверенного овладения умениями в преобразовании рациональных выражений, применения общей схемы решения рациональных неравенств:

1) перенести все члены неравенства в левую часть, т.е. привести неравенство к виду

$$f(x) > 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq, \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \frac{f(x)}{g(x) \leq 0};$$

2) разложить $f(x)$ и $g(x)$ на множители;

3) применить к полученному неравенству метод интервалов;

4) записать ответ в соответствии со знаком неравенства.

Кроме того, необходимо освоить следующие методы решения: группировки, введения новой переменной, подбора.

И, наконец, последним этапом должен быть новый, нетрадиционный этап укрупнения неравенств. В процессе его реализации следует использовать блоки укрупненных рациональных неравенств, составленных с помощью разнообразных способов укрупнения: изменение требования по решению неравенства; изменение условия неравенства; решение неравенства разными методами; конкретизация неравенств; обобщение неравенств.

Предложенная методическая схема изучения рациональных неравенств способствует осознанному и прочному усвоению рассматриваемой темы, развитию таких приемов умственной деятельности, как сравнение, аналогия, анализ, синтез, обобщение, конкретизация, индукция, дедукция, а также раскрытию творческих способностей школьников.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.
2. Письменный, Д.Т. Готовимся к экзамену по математике / Д.Т. Письменный. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Рольф, 2001. – 320 с.
3. Устименко, В.В. Методика работы с логарифмическими уравнениями в контексте укрупнения дидактических единиц / В.В. Устименко, О.А. Попп // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2016. – № 3(92). – С. 88–94.

R E F E R E N C E S

1. Erdniyev P.M., Erdniyev B.P. *Ukrupneniye didakticheskikh yedinits v obuchenii matematike: kn. dlia uchitelia* [Enlargement of Didactic Units in Teaching Math: Teacher's Book], M.: Prosveshcheniye, 1986, 255 p.
2. Pismenny D.T. *Gotovimsia k ekzamenu po matematike* [Reading for the Exam in Math], M.: Rolf, 2001, 320 p.
3. Ustimenko V.V., Popp O.A. *Vesn. Vitseb. dziarzh. un-ta* [Journal of Vitebsk Sate University], 2016, 3(92), pp. 88–94.

Поступила в редакцию 13.01.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: molodechkina00@mail.ru – Молодечкина А.А.