УДК 512:373.5:371.322.7

# МЕТОДИКА ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ ТЕМЫ «РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ»

**В.В. Устименко, Т.А. Александрович**
*Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

*Одним из элементов системы обучения математике должен быть элемент, направленный на повторение пройденного учебного материала, его дальнейшее обобщение и систематизацию, другое его изложение.*

*Цель исследования – определить схему обобщающего повторения на примере темы «Решение рациональных неравенств».*

***Материал и методы.*** *Дидактический материал разработан авторами для экспериментального использования в предпрофильных классах на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей». При этом использованы эмпирические и логические методы исследования.*

***Результаты и их обсуждение.*** *Проанализировав учебно-методическую литературу, опыт работы учителей математики, авторы пришли к выводу, что необходимо создать особую блочную программу. Содержание программы разбивается на относительно большие смысловые порции (учебные блоки). Каждая порция разделяется на небольшие части (блочные элементы), внутренняя структура которых предусматривает наличие теоретического и практического материала. Теоретический материал включает в себя основные теоретические положения блочного элемента, способы решения неравенств, конкретные примеры с решениями. Практический материал содержит разнообразные задания, направленные на систематизацию и обобщение знаний, их коррекцию, выработку умений и навыков по решению неравенств.*

***Заключение.*** *В подобной блочной программе значительное место отведено самостоятельной математической деятельности учащегося, в ходе которой он восстанавливает изученный ранее теоретический материал, выполняет задания, направленные на актуализацию усвоенных знаний и способов деятельности, на выработку прочных умений.*

***Ключевые слова:*** *обобщающее повторение, блочная программа, рациональные неравенства, способы решения, самостоятельная деятельность учащегося.*

# THE TECHNIQUE OF GENERALIZING REVISION OF THE TOPIC “SOLVING RATIONAL INEQUATIONS”

**V.V. Ustimenko, T.A. Aleksandrovich**
*Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”*

*One of the elements of the system of teaching Mathematics should be an element aimed at revising the studied academic material, its further generalization and systematization, its other presentation.*

*The purpose of the study is to determine the scheme of generalizing revision on the example of the topic “Solution of rational inequations”.*

***Material and methods.*** *The didactic material was developed by the authors for experimental use in pre-specialized classes on the basis of the State Education Establishment “V.Z. Khuruzhaya Secondary School No. 31 of Vitebsk”. Empirical and logical research methods were used.*

***Findings and their discussion.*** *After analyzing academic literature, the experience of Mathematics teachers, the authors came to the conclusion that it is necessary to create a special block program. The content of the program is divided into relatively large semantic portions (training blocks). Each portion is divided into small parts (block elements), the internal structure of which provides for the presence of theoretical and practical materials. The theoretical material includes the main theoretical provisions of the block element, ways to solve inequation, specific examples with solutions. The practical material contains a variety of tasks aimed at systematizing and generalizing knowledge, correcting it, developing skills and abilities to solve inequations.*

***Conclusion.*** *In such block program, a significant place is given to the independent mathematical activity of the student, during which he restores the previously studied theoretical material, performs tasks aimed at updating the acquired knowledge and methods of activity, and at developing strong skills.*

***Key words:*** *generalizing revision, block program, rational inequations, solutions, student’s independent activity.*

В настоящее время осуществляется модернизация школьного математического образования. Происходит использование как объяснительно-иллюстративных и репродуктивных методов обучения, так и методов, направленных на развитие разнообразных качеств каждого учащегося. При этом особенно ценным становятся не столько усвоенные математические знания, сколько способы усвоения изучаемого учебного материала, реализация и развитие таких приемов познавательной деятельности, как сравнение и аналогия, анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение и конкретизация.

В связи с этим основной задачей классов с повышенным уровнем изучения математики является создание такой системы обучения, которая гарантированно обеспечивала бы оптимальное развитие каждого школьника с учетом его интересов и способностей. Одним из элементов указанной системы должен быть элемент, направленный на повторение пройденного учебного материала. Причем целью повторения не является простое воспроизведение изученного ранее. Оно должно быть направлено на дальнейшее обобщение и систематизацию знаний, должно предлагать учащимся какой-то другой порядок изложения повторяемого материала. Для решения данной проблемы логично использовать разнообразные образовательные технологии и их комбинации [1].

Цель исследования – определить схему обобщающего повторения на примере темы «Решение рациональных неравенств».

**Материал и методы.** Дидактический материал разработан авторами для экспериментального применения на уроках и факультативных занятиях в предпрофильных классах (учитель математики Н.В. Щеглова) на базе ГУО «Средняя школа № 31 г. Витебска имени В.З. Хоружей», а также на занятиях по методике преподавания математики со студентами третьего и четвертого курсов факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова. При этом использованы эмпирические и логические методы исследования.

**Результаты и их обсуждение.** Проанализировав школьные учебники алгебры для седьмых, восьмых, девятых классов, дополнительную научно-методическую литературу, изучив опыт работы учителей математики профильных классов, а также учитывая собственный подход к решению проблемы, мы пришли к выводу, что необходимо создать особую блочную программу по теме «Решение рациональных неравенств». Содержание программы, с опорой на классификацию рациональных неравенств, разбивается на относительно большие смысловые порции (учебные блоки). В свою очередь, каждая порция разделяется на небольшие части (блочные элементы, БЭ), внутренняя структура которых предусматривает наличие теоретического и практического материала. Теоретический материал формируется таким образом, что в нем должны быть представлены в том или ином виде основные теоретические положения блочного элемента, способы решения неравенств с привлечением соответствующих схем и рисунков, а также конкретные примеры с подробными решениями, отражающими последовательность действий, приводящих к требуемому результату.

Практический материал содержит разнообразные задания, направленные на систематизацию и обобщение знаний по данной теме, на выработку умений по применению алгоритмов и методов решения целых и дробных рациональных неравенств, на коррекцию усвоенных знаний, способов деятельности и на контроль за их усвоением.

Наименование учебных блоков и их блочных элементов следующее:

*Учебный блок 1*. Целые рациональные неравенства.

БЭ – 1. Линейные неравенства.

БЭ – 2. Квадратные неравенства.

БЭ – 3. Неравенства степени выше второй. Метод интервалов.

*Учебный блок 2.* Дробно-рациональные неравенства.

БЭ – 1. Общая схема решения.

БЭ – 2. Метод интервалов.

БЭ – 3. Метод введения новой переменной.

*Учебный блок 3.* Неравенство с модулями.

БЭ – 1. Решение неравенств методом промежутков.

БЭ – 2. Решение неравенств вида $|f(x)| < a$.

БЭ – 3. Решение неравенств вида $|f(x)| < |g(x)|$.

БЭ – 4. Решение неравенств вида $\left|f(x)\right| < g(x)$, $\left|f(x)\right| < f(x)$, $\left|f(x)\right| < -f(x)$.

БЭ – 5. Решение неравенств методом введения новой переменной.

По мнению разработчиков, в конце блочной программы может быть материал для итогового повторения и приложение, в котором рассмотрены решения наиболее сложных заданий.

Предложенная программа блочного обучения позволяет кардинально изменить деятельность учащегося и учителя. В разработанной программе обучающийся осваивает предложенный учебный материал самостоятельно или с некоторой долей помощи, а учитель организует этот процесс учения, консультирует по мере необходимости учащегося и контролирует его деятельность.

Кроме того, программа обобщающего повторения предусматривает движение обучающегося от общего к конкретному, а от него к единичному, обеспечивает полноценный переход от теории к практике, от знаний к умениям, которые в итоге углубляются, расширяются, становятся более прочными. Между ними устанавливаются более тесные логические связи.

Следует также отметить, что блочная программа предусматривает дифференцируемый подход в обучении посредством разноуровневых заданий. Задания первого уровня ученики могут выполнить самостоятельно. К заданиям второго уровня относятся более сложные задания, решаемые учащимися с помощью указаний данных в приложении или с небольшой помощью учителя.

Покажем ниже конкретное содержание блочных элементов 1 и 2.

*Учебный блок 1*. Целые рациональные неравенства.

БЭ – 1. Линейные неравенства.

Теоретический материал

Простейшее линейное неравенство $cx > d$.

Возможны следующие варианты решения:

1. При $c > 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x > \frac{d}{c}$, $x \in \left(\frac{d}{c};\infty\right)$.

2. При $c < 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x < \frac{d}{c}$, $x \in \left(-\infty;\frac{d}{c}\right)$.

3. При $c = 0$ и $d > 0$ $0 \cdot x > d$, $x \in \varnothing$;
 при $c = 0$ и $d < 0$ $0 \cdot x > d$, $x \in \mathbb{R}$;
 при $c = 0$ и $d = 0$ $0 \cdot x > 0$, $x \in \varnothing$.

Простейшее линейное неравенство $cx < d$.

Возможны следующие варианты решения:

1. При $c > 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x < \frac{d}{c}$, $x \in \left(-\infty;\frac{d}{c}\right)$.

2. При $c < 0$ и $d \in \mathbb{R}$ $x > \frac{d}{c}$, $x \in \left(\frac{d}{c};\infty\right)$.

3. При $c = 0$ и $d > 0$ $0 \cdot x < d$, $x \in \mathbb{R}$;
 при $c = 0$ и $d < 0$ $0 \cdot x < d$, $x \in \varnothing$;
 при $c = 0$ и $d = 0$ $0 \cdot x < 0$, $x \in \varnothing$.

Если линейное неравенство не является простейшим, но сводится к нему, то, чтобы решить такое неравенство, можно действовать по схеме:

1. Раскрыть скобки в левой и правой частях неравенства.

2. Перенести слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а без переменной в правую часть неравенства.

3. Привести подобные слагаемые в левой и правой частях неравенства, получив при этом простейшее линейное неравенство.

4. Решить полученное простейшее линейное неравенство.

Пример 1. Определим множество решений неравенств:

а) $2x > 7$. Решение. $x > 3,5$, $x \in (3,5;\infty)$.

б) $-2x > 7$. Решение. $x < -3,5$, $x \in (-\infty;3,5)$.

в) $0 \cdot x > 5$. Решение. $x \in \varnothing$.

г) $0 \cdot x > -5$. Решение. $x \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Определим множество решений неравенства $3(2x+1) - 6 < 2 - 3(1-3x)$.

Решение. Воспользуемся предложенной выше схемой:

1. $6x + 3 - 6 < 2 - 3 + 9x$.
2. $6x - 9x < 2 - 3 - 3 + 6$.
3. $-3x < 2$.
4. $x > -\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\infty\right)$.

Пример 3. Определим множество решений неравенства $(x-3)(x+2) - (x-3)^2 \geq 15x - 10$.

Решение. Действуем по схеме:

1. $x^2 - 3x + 2x - 6 - x^2 + 6x - 9 \geq 15x - 10$.
2. $x^2 - 3x + 2x - x^2 + 6x - 15x \geq -10 + 6 + 9$.
3. $-10x \geq 5$.
4. $x \leq 0,5$.

Ответ: $(-\infty;0,5]$.

Практический материал

Решить самостоятельно в тетради. В случае необходимости обратиться к теоретическому материалу, примерам 1–3, за консультацией к учителю.

Задание 1. Определить множество решений неравенств:

а) $6x - 9 < 8x + 2$;

б) $2(x-6) + 7 < 3x - 10$;

в) $5(x+4) < 2(4x-5)$;

г) $11x - 7 > 2(5,5x + 8)$;

д) $4 - 5x \geq 2x - 7(x+4)$;

е) $\frac{x}{2} \geq \frac{2x-3}{8} + 1$.

Задание 2. Сравнить свои ответы с ответами:

а) $(-5,5;\infty)$;

б) $(5;\infty)$;

в) $(10;\infty)$;

г) нет решений;

д) $(-\infty;\infty)$;

е) $[2,5;\infty)$.

Если правильно решены все неравенства, то выполнить задание 3, а если нет, то необходимо решить самостоятельно неравенства примера 2 и затем обратиться к решению своих неравенств, которые вызвали затруднения.

Задание 3. Определить множество решений неравенств:

а) $x(x+2) < (x+3)(x-1)$;

б) $(x-3)(2x-1) \leq (2x+1)(x+2)$;

в) $(x-5)(x+2) - (x+3)^2 \geq 7 - 14x$;

г) $(3x-1)^2 - (x+1)^2 \leq (4x+3)(2x+1)$.

Сравнить свои ответы с ответами:

а) нет решений;

б) $\left(\frac{1}{12};\infty\right)$;

в) $[5,2;\infty)$;

г) $\left[-\frac{1}{6};\infty\right)$.

В случае необходимости обратиться к учителю.

БЭ – 2. Квадратные неравенства

Теоретический материал

При решении квадратных неравенств $ax^2 + bx + c > 0$ $(< 0, \geq 0, \leq 0)$ используется схематический график, соответствующий функции $y = ax^2 + bx + c$. Чтобы решить квадратное неравенство, можно действовать по следующей схеме:

1. Найти дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$.
2. В зависимости от значения дискриминанта выполнить схематический рисунок параболы.
3. На полученном рисунке найти те значения $x$, которые удовлетворяют неравенству.
4. Записать ответ.

Решим неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ при условии, что $a > 0$. После нахождения дискриминанта возможны три случая:

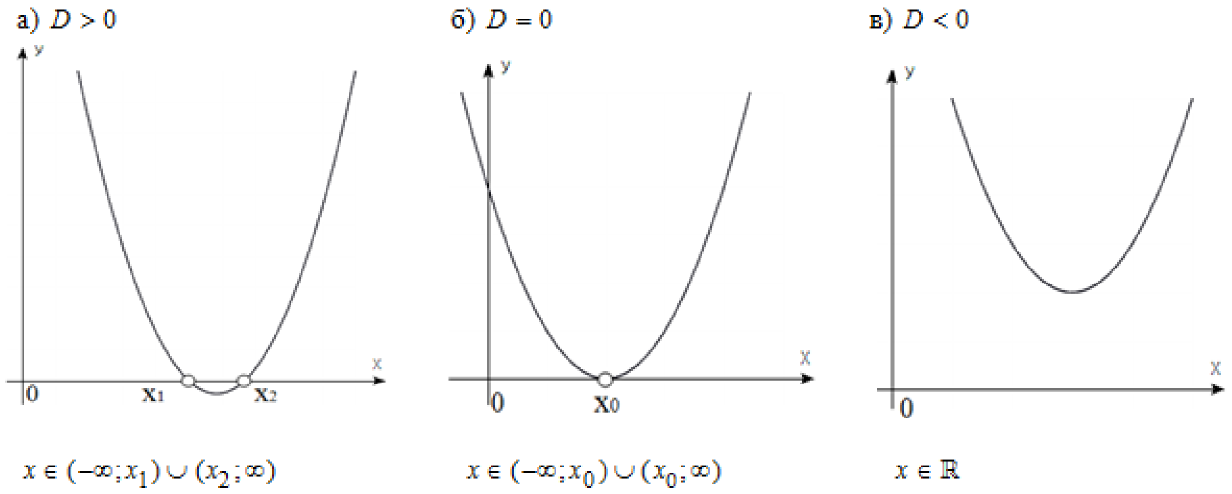


Рис. 1

Решим неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при условии, что $a > 0$. После нахождения дискриминанта возможны три случая:

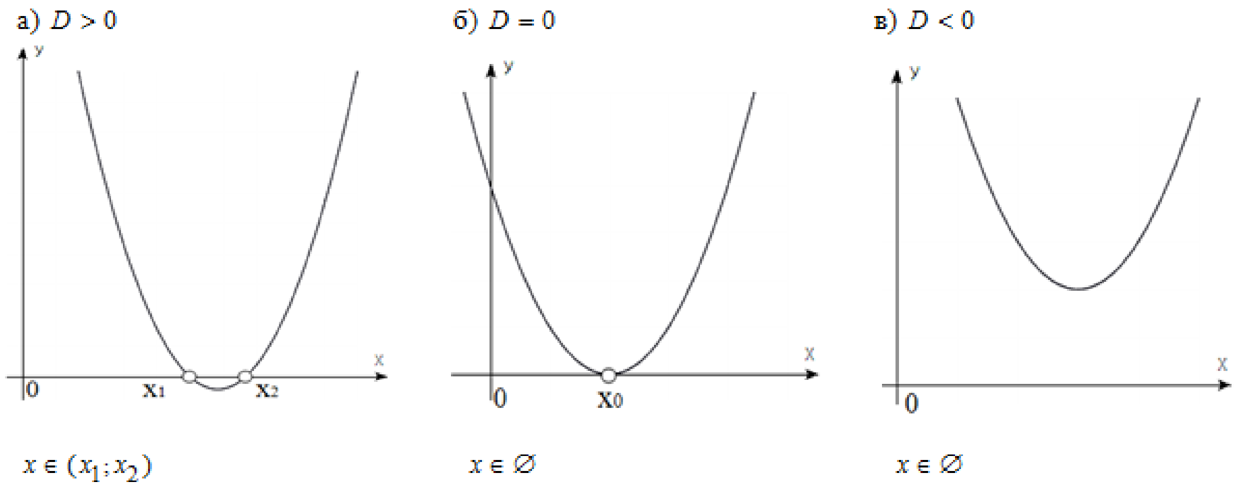


Рис. 2

З а м е ч а н и е 1. Если решаем неравенство $ax^2 + bx + c \geq 0$, то запись некоторых ответов изменится: при $D > 0$ $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$, при $D = 0$ $x \in (-\infty; \infty)$. Если решаем неравенство $ax^2 + bx + c \leq 0$, то при $D > 0$ $x \in [x_1; x_2]$, при $D = 0$ $x = x_0$. Если в квадратном неравенстве $a < 0$, то после умножения обеих частей на –1 получим неравенство вида $ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0$.

З а м е ч а н и е 2. При решении приведенных квадратных неравенств вида а) $x^2 - 5x - 6 > 0$ или б) $x^2 - 5x - 6 < 0$ действуют следующим образом: по теореме, обратной теореме Виета, устно находят корни –1 и 6. Затем сразу записывают ответ в виде объединения промежутков в случае а) $x \in (-\infty; 1] \cup [6; \infty)$ или промежутка в случае б) $x \in (-1; 6)$.

Пример 1. Определим множество решений неравенства $6x^2 - 7x + 2 > 0$.

Решение. $D = 49 - 48 = 1$; $x_1 = 0,5$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

По рис. 3, к примеру 1, получаем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0,5) \cup \left(\dfrac{2}{3}; \infty\right)$.

Пример 2. Определим множество решений неравенства $9x^2 + 6x + 1 > 0$.

Решение. $D = 36 - 36 = 0$; $x = -\dfrac{1}{3}$.

По рис. 3, к примеру 2, получаем ответ.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; \infty\right)$.

Пример 3. Определим множество решений неравенства $3x^2 - x + 9 > 0$.
Решение. $D = 1 - 108 = -107$.
По рис. 3, к примеру 3, получаем ответ.
Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

Пример 4. Определим множество решений неравенства $-2x^2 - 5x + 3 \ge 0$.
Решение. Умножим обе части неравенства на –1, получим: $2x^2 + 5x - 3 \le 0$.
$D = 25 + 24 = 49$; $x_1 = -3$; $x_2 = 0,5$.
По рис. 3, к примеру 4, получаем ответ.
Ответ: $x \in [-3; 0,5]$.

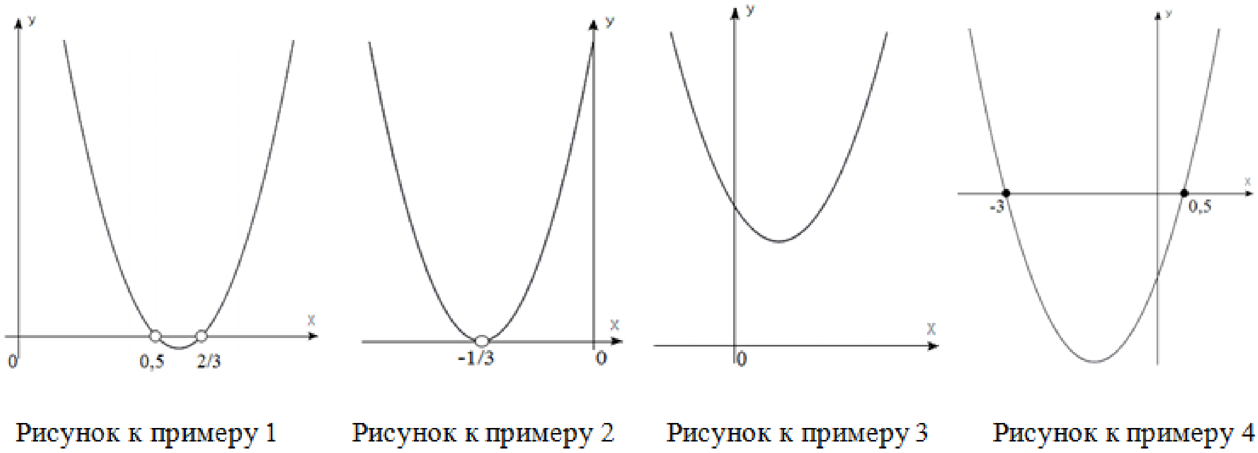


Рис. 3

Практический материал

Решить самостоятельно по предложенным схемам. В случае необходимости обратиться к примерам 1–4.

Задание 1. Определить множество решений неравенств:

а) $7x^2 - x + 1 > 0$;
б) $-2x^2 - 5x + 3 \le 0$;
в) $x^2 - 8x + 16 \le 0$;
г) $-4x^2 + 3x + 1 \ge 0$;
д) $4x^2 - 7x + 7 > 3x^2 - 11x + 52$;
е) $10x^2 + 8x - 2 \le x^2 - 16x - 18$;
ж) $(x-2)^2 < 1$;
з) $4 > (x+3)^2$.

Задание 2. Сравнить свои ответы с ответами:

а) $(-\infty; \infty)$;  д) $x \in (-\infty; -9) \cup (5; \infty)$;

б) $(-\infty; -3] \cup [0,5; \infty)$;  е) $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$;

в) {4};  ж) $(1; 3)$;

г) [–0.25; 1];  з) $(-5; -1)$.

Если ответы совпали с ответами задания 2, то выполнить задание 3, а если нет, то необходимо обратиться к примерам 1–4 и заново решить неравенства, в которых ответы не совпали.

Задание 3. Определить множество решений неравенств:

а) $(x+4)^2 > 6x + 40$;  в) $(3x+1)^2 + 33 > (2x+5)^2$;

б) $(2x+1)^2 + 2 \le 2(x - 3x^2)$;  г) $(x-1)(x+1) > x^2 + 4 - (x-5)^2$.

Сравнить свои ответы с ответами:

а) $(-\infty; -6] \cup [4; \infty)$;  в) $(-\infty; 1) \cup (1,8; \infty)$;

б) $\varnothing$;  г) $(-\infty; 5 - \sqrt{5}) \cup (5 + \sqrt{5}; \infty)$.

В случае необходимости обратиться к учителю.

Следует отметить, что данная блочная программа может являться основой содержания веб-ресурса по обобщающему повторению рациональных неравенств. В процессе создания веб-сайта могут быть использованы следующие технологии: HTML, CSS, Bootstrap. Подобный сайт должен:

– выполнять роль независимого и полностью самостоятельного ресурса по обучению школьников решению рациональных неравенств;

– максимально доступно представлять всю информацию, которая будет содержаться на данном веб-ресурсе;

– содержать в себе справочный материал по решению рациональных неравенств;

– быть простым и интуитивным в применении;

– быть полностью бесплатным и не содержать никакой рекламы.

**Заключение.** Таким образом, в подобной блочной программе значительное место отведено самостоятельной математической деятельности учащегося, которая предполагает следующие этапы: анализ условия задачи, выбор оптимального способа деятельности, соответствующего этой задаче, исполнение решения. При этом обучающийся приобщается к активной познавательной деятельности, восстанавливает изученный ранее теоретический материал, выполняет задания, направленные на актуализацию усвоенных знаний и способов деятельности, на выработку прочных умений.

Кроме того, в процессе работы с блочной программой у учащегося вырабатываются навыки самоконтроля и самооценки, самоопределения в выборе заданий, присутствует возможность консультирования с товарищем и учителем. Вместе с тем рассмотренная учебная программа может служить хорошей основой для методического осмысления новой для себя педагогической технологии и ее применения при обобщающем повторении других тем школьного курса математики.

*ЛИТЕРАТУРА*

1. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие / Г.К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
2. Ананченко, К.О. Технология модульного обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства с модулями»: учеб.-метод. пособие для студентов, учителей и учащихся школ (классов) с углубленным изучением математики / К.О. Ананченко, М.В. Касперко. – Мозырь: Издательский Дом «Белый ветер», 2001. – 192 с.

*REFERENCES*

1. Selevko G.K. Sovremenniye obrazovatelniye tekhnologii: ucheb. posobiye [Modern Educational Technologies: Textbook], M.: Narodnoye obrazovaniye, 1998, 256 p.
2. Ananchenko K.O., Kasperko M.V. Tekhnologiya modulnogo obobshchayushchego povtoreniya temy “Uravneniya i neravenstva s moduliami”: ucheb. -metod. posobiye dlia studentov, uchitelei i uchashchikhsia shkol (klassov) s uglublennym izucheniyem matematiki [Technology of Module Generalizing Revision of the Topic “Equations and Inequations with Modules”]: Manual for Students, Teachers and Math Advanced Learning Schools (Classes) Students], Mozyr: Izdatelski Dom “Bely veter”, 2001, 192 p.

*Поступила в редакцию 14.02.2022*

***Адрес для корреспонденции:*** e-mail: tatyanka.aleksandrovich@mail.ru – Александрович Т.А.