УДК 517.956.32

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КОНЦЕ

Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко
Белорусский государственный университет

В настоящем исследовании для гладких решений модификацией метода характеристик выведен полный и окончательный критерий корректности по Адамару смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном режиме. Нестационарность граничного режима означает зависимость коэффициентов первой косой производной от времени. Ее характеристичность означает направление первой косой производной вдоль критической характеристики уравнения. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением.

Цель статьи – вывод критерия корректности по Адамару этой задачи во множестве гладких решений.

Материал и методы. *Материалом работы является смешанная задача для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной с зависящими от времени коэффициентами. Исследование корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) во множестве гладких решений проведено с помощью понятия критериального значения старших производных от правой части уравнения и обобщения исследования корректности задачи Ф.Е. Ломовцевым во множестве классических решений, что представляет новую модификацию метода характеристик.*

Результаты и их обсуждение. *Во множестве гладких решений получен критерий корректности смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной характеристической первой косой производной в граничном режиме. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования правой части уравнения, начальных данных и граничного данного для ее однозначной и устойчивой везде разрешимости в гладких решениях. Формула гладкого решения совпадает с известной формулой классического решения. Устойчивость гладкого решения по правой части уравнения, начальным данным и граничному данному выведена из явной формулы гладкого решения. Полученные результаты дают полное и окончательное исследование ее корректности. Они нужны для вывода критерия корректности аналогичной смешанной задачи для ограниченной струны.*

Заключение. *Для гладких решений найден критерий корректности по Адамару смешанной задачи с характеристической первой косой производной и зависящими от времени коэффициентами в граничном режиме.*

Ключевые слова: *смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая косая производная, гладкое решение, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.*

SMOOTH SOLUTIONS TO A MIXED PROBLEM FOR THE SIMPLEST VIBRATION EQUATION OF A SEMI-BOUNDED STRING AT CHARACTERISTIC FIRST OBLIQUE DERIVATIVE ON THE END

F.E. Lomovtsev, T.S. Tochko
Belarusian State University

In the article, for smooth solutions by a modification of the characteristic method, a complete and final criterion for the Hadamard's correctness of a mixed problem for the simplest inhomogeneous vibration equation of a semi-bounded string with a non-stationary characteristic first oblique derivative in the boundary mode is derived. The nonstationarity of the boundary regime means *the dependence of the coefficients of the first oblique derivative on time. Its characteristic means the direction of the first oblique derivative along the critical characteristic of the equation. The correctness criterion consists of necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions the boundary regime with the initial conditions and the equation.*

The purpose of the article is to derive a Hadamard's correctness criterion for this problem in the set of smooth solutions.

Material and methods. *The material of the work is a mixed problem for the simplest inhomogeneous vibration equation of a semi-bounded string with a characteristic first oblique derivative with time-dependent coefficients. The study of correctness in the sense of Hadamard (existence, uniqueness and stability) in the set of smooth solutions was carried out using the concept of the criterial value of the highest derivatives of the right-hand side of the equation and generalization of the study of its correctness by F.E. Lomovtsev in a variety of classical solutions, which represents a new modification of the characteristic method.*

Findings and their discussion. *In the set of smooth solutions, a correctness criterion of the mixed problem is obtained for the simplest inhomogeneous vibration equation of a semi-bounded string with a non-stationary characteristic first oblique derivative in the boundary regime. The correctness criterion consists of necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions for the right-hand side of the equation, initial data, and boundary data for its unique and everywhere stable solvability in smooth solutions. The formula for a smooth solution coincides with the well-known formula for a classical solution. The stability of a smooth solution with respect to the right-hand side of the equation, initial data, and boundary data is derived from an explicit formula for a smooth solution. The results obtained provide a complete and final study of its correctness. We need them to derive a correctness criterion for a similar mixed problem for a bounded string.*

Conclusion. *For smooth solutions, a correctness criterion in the Hadamard's sense is found for a mixed problem with a characteristic first oblique derivative and time-dependent coefficients in the boundary mode.*

Key words: *the mixed problem, the non-stationary boundary condition, the characteristic oblique derivative, the smooth solution, the correctness criterion, the smoothness requirement, the matching condition.*

В настоящем исследовании установлен критерий корректности (по Адамару: существование, единственность и устойчивость решения) смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной (зависящей от времени) характеристической первой косой производной в граничном режиме. Характеристичность первой косой производной в граничном режиме означает ее направление вдоль критической характеристики уравнения. Критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования исходных данных (правой части уравнения, начальных данных и граничного данного) этой смешанной задачи. Он гарантирует однозначную и устойчивую везде разрешимость искомой смешанной задачи во множестве гладких решений. Данный критерий корректности для гладких решений, т.е. решений любой целой, два и более гладкости, получен обобщением новых методов впервые реализованного вывода критерия корректности этой смешанной задачи для классических решений, т.е. дважды непрерывно дифференцируемых решений, из [1]. Явные формулы гладкого решения этой характеристической смешанной задачи естественно совпадают с явными формулами ее классического решения из [1]. Весьма частному случаю характеристического граничного режима этой задачи посвящена статья [2]. Установленный критерий корректности для гладких решений потребуется нам при нахождении критерия корректности для классических решений аналогичной характеристической смешанной задачи для ограниченной струны методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [3]. Дело в том, что в случае характеристических смешанных задач для ограниченной струны с увеличением времени колебаний струны растет гладкость исходных данных таких смешанных задач и, тем самым, нужен критерий корректности для гладких решений. Этот факт подтверждает, например, теорема 2 статьи [4], в которой обоснованы достаточные требования гладкости и условия согласования, гарантирующие существование единственного и устойчивого классического решения смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных характеристических первых косых производных в граничных режимах лишь в нечетных прямоугольниках. Ранее в [5] найдены классическое решение и критерий корректности такой смешанной задачи, но с нехарактеристическими первыми косыми производными в граничных режимах. И более полный перечень литературы по истории данного вопроса приведен в [5].

Материал и методы. На множестве $\dot{G}_\infty = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ исследуется смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ a>0,\ (x,t)\in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x),\ x>0, \tag{2}$$

$$\left[\alpha(t)u_t(x,t)+\beta(t)u_x(x,t)+\gamma(t)u(x,t)\right]\Big|_{x=0}=\mu(t),\ t>0, \tag{3}$$

где коэффициенты $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – заданные функции переменной t, исходные данные $f,\ \varphi,\ \psi,\ \mu$ – заданные функции своих переменных x и t. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным в индексах переменным. Пусть в граничном режиме (3) первая косая производная является характеристической [6], т.е. $a\alpha(t)=\beta(t),\quad \gamma(t)\neq 0$, $t\in R_+=[0,+\infty)$. Требуется найти гладкие решения $u\in C^m(G_\infty)$, $G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty),\ \ m\geq 2,$ и критерий корректности (необходимые и достаточные условия, налагаемые на исходные данные f,φ,ψ,μ) для однозначной и устойчивой везде разрешимости характеристической смешанной задачи (1)–(3). Символом $C^k(\Omega)$ мы обозначаем множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega\subset R^2$ и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$ – множество всех непрерывных функций на Ω.

Определение 1. *Гладким решением смешанной задачи (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *называется функция* $u\in C^m(G_\infty),\ G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty),\ \ m\geq 2,$ *удовлетворяющая уравнению (1) на* $\dot{G}_\infty$ *в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от ее значений* $u(\dot{x},\dot{t})$ *во внутренних точках* $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{G}_\infty$ *для всех указанных граничных точек* (x,t).

Известно, что при $m=2$ оно служит определением классических решений этой задачи (1)–(3).

Определение 2. *Характеристика* $x=at$, *где коэффициент* $a>0$, *называется критической для уравнения (1) в первой четверти плоскости* $G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ [4].

Уравнение (1) в плоскости R^2 имеет два различных семейства характеристик $x-at=C_1$, $x+at=C_2,\ C_1,C_2\in R,\ \ R=(-\infty,+\infty)$. Первая четверть плоскости G_∞ разбивается критической характеристикой $x=at$ на два множества $G_-=\{(x,t)\in G_\infty:\ x>at>0\}$ и $G_+=\{(x,t)\in G_\infty:\ 0\leq x\leq at\}$.
Согласно статьям [1; 7] справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть в граничном режиме (3) с характеристической первой косой производной коэффициенты* $\beta,\ \gamma\in C^2(R_+),\ \ \gamma(t)\neq 0,\ \ t\in R_+=[0,+\infty)$. *Смешанная задача (1)–(3) имеет единственное и устойчивое классическое решение* $u\in C^2(G_\infty)$: *на множестве* G_- *решение*

$$u_-(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau,\quad (x,t)\in G_-, \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi\in C^2(R_+),\psi\in C^1(R_+),\quad f\in C(G_-),\ \int\limits_0^t f\left(x\pm a(t-\tau),\tau\right)d\tau\in C^1(G_-), \tag{5}$$

и на множестве G_+ *решение*

$$u_+(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(|s|,\tau)dsd\tau+$$

$$+\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\left\{a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-a\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\varphi'(at-x)-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\psi(at-x)-\right.$$

$$\left.-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-x/a}f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau\right\}-\frac{1}{a}\int\limits_0^{t-x/a}\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t)\in G_+, \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi \in C^2(R_+), \psi \in C^1(R_+),\ \mu \in C^2(R_+),\quad f \in C(G_\infty),\ \int_0^t f(|x \pm a(t-\tau)|, \tau)d\tau \in C^1(G_+), \tag{7}$$

$$\Phi(\mathrm{t}) \equiv \beta(t)\varphi''(at),\quad \Psi(t) \equiv \beta(t)\psi'(at),\quad \mathfrak{F}(t) \equiv \beta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t f\left(a(t-\tau),\tau\right)d\tau\right) \in C^1(R_+) \tag{8}$$

и три условия согласования

$$S_0 \equiv \beta(0)[a\varphi'(0)+\psi(0)] + a\gamma(0)\varphi(0) = a\mu(0)\,, \tag{9}$$

$$S_1 \equiv \beta'(0)\left[a\varphi'(0)+\psi(0)\right] + \beta(0)\left[a^2\varphi''(0) + a\psi'(0) + f(0,0)\right] + a[\gamma'(0)\varphi(0)+\gamma(0)\psi(0)] = a\mu'(0), \tag{10}$$

$$S_2 \equiv \beta''(0)[a\varphi'(0)+\psi(0)] + 2\beta'(0)[a^2\varphi''(0)+a\psi'(0)+f(0,0)] +$$

$$+a^2\left[\Phi'(0) - \beta'(0)\varphi''(0)\right] + a\left[\Psi'(0) - \beta'(0)\psi'(0)\right] +$$

$$+\sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\,\partial f(0,0)/\partial\vec{v} + a\gamma''(0)\varphi(0) + 2a\gamma'(0)\psi(0) + a\gamma(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] = a\mu''(0), \tag{11}$$

где $\partial f(0,0)/\partial\vec{v}$ *– значение производной вдоль вектора* $\vec{v} = \{a, 1\}$ *от функции* f *при* $x = 0$ *и* $t = 0.$

Отметим, что условия согласования (9)–(11) равносильны соответственно условиям согласования (4), (5), (12) из [1], умноженным на коэффициент a. Причем в (12) из [1] вместо произведения $\sqrt{a^2+1}$ на значение производной $\partial f(0,0)/\partial\vec{v}$ по вектору $\vec{v} = \{a,1\}$ в начале координат написано его значение как скалярное произведение вектора градиента от f в начале координат и неединичного вектора $\vec{\mathrm{v}}$. Относительно записи формул (6), (8)–(11) см. в конце статьи замечание 1 при $m = 2$.

Нам требуется вывести аналог теоремы 1 с критерием корректности по Адамару смешанной задачи (1)–(3) для ее $m \geq 2$ раз непрерывно дифференцируемого решения $u \in C^m(G_\infty)$. Полученные результаты нужны нам для вывода критерия корректности во множестве гладких решений аналогичной характеристической смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний ограниченной струны.

Результаты и их обсуждение. Сначала выведем некоторые условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) для более гладких на единицу решений $u \in C^{m+1}(G_\infty),$ $m \geq 2,$ смешанной задачи (1)–(3). Эти условия согласования будут *необходимыми*, так как мы выведем их не из явного решения задачи, а из ее постановки и определения более гладких на единицу решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$. Ниже в теореме 2 мы увидим, что для менее гладких решений $u \in C^m(G_\infty),$ $m \geq 2,$ аналог последнего из них также будет необходимым условием согласования, так как оно также будет выводиться из постановки смешанной задачи и определения ее гладкого решения $u \in C^m(G_\infty)$ предельным переходом по более гладким решениям $u \in C^{m+1}(G_\infty).$

Лемма 1. *Пусть в граничном режиме (3) с характеристической первой косой производной коэффициенты* $\beta,$ $\gamma \in C^m(R_+),$ $m \geq 2,$ $\gamma(t) \neq 0,$ $t \in R_+ = [0, +\infty),$ *и исходные данные* $\varphi \in C^{m+1}(R_+), \psi \in C^m(R_+),$ $f \in C^{m-1}(G_\infty),$ $\mu \in C^m(R_+).$ *Если существует гладкое решение* $u \in C^{m+1}(G_\infty),$ $m \geq 2,$ *смешанной задачи (1)–(3), то выполняются условия согласования (9), (10) и*

$$S_l \equiv \sum_{j=0}^{l} \frac{l!}{j!(l-j)!}\left\{\beta^{(l-j)}(0)\left[aP_j'(0) + P_{j+1}(0)\right] + a\gamma^{(l-j)}(0)P_j(0)\right\} = a\mu^{(l)}(0),\ l = \overline{2,m}, \tag{12}$$

где функции

$$P_0(x)=\varphi(x),\ \ P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-2)/2} a^{2m}\left.\frac{\partial^{q-2} f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\right|_{t=0}+a^q\varphi^{(q)}(x),\ \ \text{если}\ \ q-\text{четное},\ \ q\ge 2,$$

$$P_1(x)=\psi(x),\quad P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-3)/2} a^{2m}\left.\frac{\partial^{q-2} f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\right|_{t=0}+a^{q-1}\psi^{(q-1)}(x),\ \ \text{если}\ \ q-\text{нечетное},\ \ q\ge 3, \tag{13}$$

$P_q'(0)$ – *значения первой производной по* x *от функций* P_q *при* $x=0$ *и*

$\beta^{(l-j)}(0),\ \gamma^{(l-j)}(0),\ \mu^{(l)}(0)$ – *значения соответственно производных по* t *порядков* $l-j$ *и* l *от функций* β, γ, μ *при* $t=0$.

Доказательство леммы 1. Исходя из гладкости коэффициентов $\beta(t)$, $\gamma(t)$, граничного данного $\mu(t)$ и функции $u\in C^{m+1}(G_\infty)$ в предположениях леммы 1, дифференцируем l раз по t левую и правую части равенства (3) при $a\alpha(t)=\beta(t)$ для $l=\overline{0,m}$. В результате этого дифференцирования по формуле Лейбница имеем $m+1$ равенств

$$\sum_{j=0}^{l} C_l^j\left.\left(\beta^{(l-j)}(t)\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial^{j+1}u(x,t)}{\partial t^{j+1}}+\frac{\partial^{j+1}u(x,t)}{\partial t^j\partial x}\right\}+\gamma^{(l-j)}(t)\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}\right)\right|_{x=0}=\mu^{(l)}(t),\ \ t\ge 0,\ \ l=\overline{0,m}, \tag{14}$$

где биномиальные коэффициенты $C_l^j=l!/\,j!(l-j)!$ – число сочетаний из l по j элементов.

Докажем, что значения производных $\partial^j u/\partial t^j$ при четных $j=2k,\ k=\overline{0,[l/2]}$, равняются

$$\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial t^{2k}}=\sum_{i=0}^{k-1}a^{2i}\frac{\partial^{2k-2}f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-2-2i}}+a^{2k}\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial x^{2k}},\quad (x,t)\in G_\infty. \tag{15}$$

Здесь квадратные скобки $[p]$ числа p обозначают его целую часть.

Для обоснования этих равенств применим метод математической индукции. При $k=0$ получаем очевидное тождество $u(x,t)=u(x,t)$ на G_∞, а при $k=1$ имеем уравнение колебаний струны (1). Пусть равенства (15) верны при $j=2k$ и убедимся в их справедливости при $j=2(k+1)$.

Дифференцируем дважды по t равенства (15) и получаем

$$\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial t^{2k+2}}=\sum_{i=0}^{k-1}a^{2i}\frac{\partial^{2k} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-2i}}+a^{2k}\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial x^{2k}\partial t^2},\quad (x,t)\in G_\infty. \tag{16}$$

Используя уравнение колебаний струны (1) в последнем слагаемом этого равенства (16), находим

$$\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial t^{2k+2}}=\sum_{i=0}^{k}a^{2i}\frac{\partial^{2k} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-2i}}+a^{2k+2}\frac{\partial^{2k+2}u(x,t)}{\partial x^{2k+2}},\quad (x,t)\in G_\infty,$$

что подтверждает справедливость равенств (15) при $j=2(k+1)$.

Для значений производных $\partial^j u/\partial t^j$ нечетных порядков $j=2k+1,\ k=\overline{0,[l/2]}$, точно также методом математической индукции выводятся равенства

$$\frac{\partial^{2k+1}u(x,t)}{\partial t^{2k+1}}=\sum_{i=0}^{k-1}a^{2i}\frac{\partial^{2k-1}f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{2k-1-2i}}+a^{2k}\frac{\partial^{2k+1}u(x,t)}{\partial x^{2k}\partial t},\quad (x,t)\in G_\infty. \tag{17}$$

Принимая во внимание начальные условия (2) и сделав замену $q = 2k,$ из равенств (15) и (17) получаем для значений производных равенства

$$\left.\frac{\partial^q u(x,t)}{\partial t^q}\right|_{t=0} = P_q(x) \tag{18}$$

соответственно для четных $q \geq 0$ и нечетных $q \geq 1$ значений функций $P_q(x)$ из (13). Эти равенства (18) для четных $q \geq 0$ мы дифференцируем один раз по x и в силу перестановочности производной по x и следа при $t = 0$ имеем равенства

$$\left.\frac{\partial^q u_x(x,t)}{\partial t^q}\right|_{t=0} = P'_q(x),\ \ q = 0, 2, 4, ..., 2k. \tag{19}$$

В равенствах (14) полагаем $t = 0,$ применяем полученные формулы (18) и (19) при $x = 0$ и приходим к условиям согласования (9), (10) и (12) для $l \geq 2.$ Лемма 1 доказана.

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$f \in C^{m-2}(G_\infty),\ \ \varphi \in C^m(R_+),\ \ \psi \in C^{m-1}(R_+),\ \ \mu \in C^{m-1}(R_+),\ \ m \geq 2, \tag{20}$$

где $R_+ = [0, \infty).$ Ниже мы укажем дополнительные требования гладкости на исходные данные $\varphi, \psi,\ f,\ \mu,$ которые для большинства из них окажутся менее жесткими, чем указаны в лемме 1.

Преобразуем условие согласования (12) при $l = m$ из леммы 1:

$$\begin{gathered} S_m \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!}{j!(m-j)!}\Big\{\beta^{(m-j)}(0)\left[aP'_j(0) + P_{j+1}(0)\right] + a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0)\Big\} + \\ +\beta(0)\left[aP'_m(0) + P_{m+1}(0)\right] + a\gamma(0)P_m(0) = a\mu^{(m)}(0),\ \ m \geq 2. \end{gathered} \tag{21}$$

Если m – четное или нечетное, то ввиду (13) функция $\beta(0)\left[aP'_m(x) + P_{m+1}(x)\right]$ соответственно равна

$$\beta(0)\left[\sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i+1} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i+1}\partial t^{m-2-2i}}\right|_{t=0} + a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{m-1-2i}}\right|_{t=0} + a^m\psi^{(m)}(x)\right],\ \ m \geq 2, \tag{22}$$

$$\beta(0)\left[\sum_{i=0}^{(m-3)/2} a^{2i+1} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i+1}\partial t^{m-2-2i}}\right|_{t=0} + a^m\psi^{(m)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-1)/2} a^{2i} \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^{2i}\partial t^{m-1-2i}}\right|_{t=0} + a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(x)\right],\ \ m \geq 3. \tag{23}$$

Непосредственным сравнением слагаемых убеждаемся в совпадении всех частных производных от f соответственно в суммах (22) и (23) с одной и той же суммой

$$K_m(x) \equiv \beta(0)\sum_{j=0}^{m-1} a^j \left.\frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^j \partial t^{m-1-j}}\right|_{t=0},\quad m \geq 2, \tag{24}$$

для четных и нечетных $m \geq 2.$ Справедливость этих равенств вытекает из деления максимально возможного индекса суммирования на 2 в (22) и (23), удвоения в них индекса суммирования i и одинакового количества слагаемых m.

Можно заметить, что для более гладких на единицу исходных данных φ и ψ, чем в требованиях (5) и (20), аналогично сумме (14) в суммах (12) и (13) для четных и нечетных m также совпадают слагаемые с производными от начальных данных φ и ψ:

$$a^m[a\beta(0)\varphi^{(m+1)}(x) + \beta(0)\,\psi^{(m)}(x)],\ \ x\ge 0,\ \ m\ge 2. \tag{25}$$

Итак, в лемме 1 все частные производные от $f\in C^{m-1}(G_\infty)$ в суммах (22) и (23) равны сумме (24).

В настоящей работе нашей модификацией известного метода характеристик из [8] доказывается

Теорема 2. *Пусть в граничном режиме (3) с характеристической первой косой производной коэффициенты* $\beta,\ \gamma\in C^m(R_+),\ m\ge 2,\ t\in R_+=[0,+\infty)$. *Смешанная задача (1)–(3) в* $\dot G_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* f,φ,ψ,μ *гладкое решение* $u\in C^m(G_\infty),\ m\ge 2,$ *тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (20),* $\mu\in C^m(R_+)$,

$$F_p\left(x,t\right)\equiv\int_0^t f\left(\left|x+(-1)^p a\left(t-\tau\right)\right|,\tau\right)d\tau\in C^{m-1}\left(G_\infty\right),\ \ p=1,2, \tag{26}$$

$$\Phi_m(t)\equiv\beta(t)\varphi^{(m)}(at),\ \ \Psi_{m-1}(t)\equiv\beta(t)\psi^{(m-1)}(at)\in C^1(R_+),$$

$$\mathfrak{F}_{m-1}(t)\equiv\beta(t)\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\left(\int_0^t f\left(a(t-\tau),\tau\right)d\tau\right)\right]\in C^1(R_+) \tag{27}$$

и условия согласования (9), (10), (12) при $l=\overline{0,m-1},\ \ m\ge 2,$ *и*

$$S_m\equiv\sum_{j=0}^{m-1}\frac{m!}{j!\,(m-j)!}\left\{\beta^{(m-j)}(0)\left[aP_j'(0)+P_{j+1}(0)\right]+a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0)\right\}+K_m(0)\ +$$

$$+a^m\left[(\Phi_m)'(0)-\beta'(0)\varphi^{(m)}(0)\right]+a^{m-1}\left[(\Psi_{m-1})'(0)-\beta'(0)\psi^{(m-1)}(0)\right]+a\gamma(0)P_m(0)=a\,\mu^{(m)}(0), \tag{28}$$

из которого критериальное значение $K_m(0)$ *указано в доказательстве теоремы 2.*

Этим гладким решением смешанной задачи (1)–(3) на $\dot G_\infty$ *является функция (4) в* G_- *и (6) в* G_+.

Доказательство. Достаточность на G_-. Гладкое решение смешанной задачи (1)–(3) на множестве $\dot G_\infty$ совпадает на множестве G_- с решением задачи Коши (1), (2), которое единственно и выражается уже известной обобщенной формулой Эйлера–Даламбера (4) из теоремы 1. Убедимся в достаточности требований гладкости (20), (26) для того, чтобы функция $u_-\in C^m(G_-)$. Действительно, гладкость начальных данных $\varphi\in C^m(R_+),\ \psi\in C^{m-1}(R_+)$ из (20) обеспечивает m раз непрерывную дифференцируемость первых двух слагаемых в формуле (4). Благодаря гладкости (26) m раз непрерывная дифференцируемость на G_- последнего слагаемого формулы (4), которое мы обозначим символом $F_0(x,t)$, вытекает из следующих равенств и включений

$$\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2a}\left[F_2(x,t)-F_1(x,t)\right]\in C^{m-1}(G_-),\ \ \frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[F_2(x,t)+F_1(x,t)\right]\in C^{m-1}(G_-), \tag{29}$$

где функции $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$ в (26) являются производными соответственно вдоль характеристик $x+at=C_2$ и $x-at=C_1$ от этого частного решения $F_0(x,t)$ неоднородного уравнения (1) [9].

При любом $T>0$ непосредственно из формулы (4) легко выводится непрерывная зависимость (устойчивость по правой части и начальным данным) решения u_- в банаховом пространстве $C^m(G_T^-)$ от исходных данных $\varphi,\ \psi,\ f$ в декартовом произведении банаховых пространств $C^m(R_+)\times C^{m-1}(R_+)\times$ $\times\hat{C}^{m-1}(G_T^-)$, где $G_T^-=G_T\bigcap G_-$, $G_T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x<+\infty,\ 0\le t\le T\}$, соответственно с нормами

$$\|u\|_{C^m(G_T^-)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\sum_{0\le i+j\le m}\left|\partial_x^i\partial_t^j u(x,t)\right|,\ \partial_x^i\partial_t^j=\frac{\partial^{i+j}}{\partial_x^i\partial_t^j},$$

$$\|\varphi\|_{C^m(R_+)}=\sup_{0\le x<+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|,\ \ \|\psi\|_{C^{m-1}(R_+)}=\sup_{0\le x<+\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\psi^{(k)}(x)\right|,$$

$$\|f\|_{\hat{C}^{m-1}(G_T^-)}=\sup_{(x,t)\in G_T^-}\left(\sum_{0\le i+j\le m-2}\left|\partial_x^i\partial_t^j f(x,t)\right|+\sum_{p=0}^{1}\sum_{0\le i+j\le m-1}\left|\partial_x^i\partial_t^j F_p(x,t)\right|\right).$$

Необходимость на G_-. Необходимость требований гладкости на f,φ,ψ из (20) установлена выше до формулировки теоремы 2. Методом корректировки так же, как в теоремах 1–3 работы [9], доказывается гладкость частного решения $F_0(x,t)\in C^m(G_\infty)$ уравнения (1). Поэтому необходимость гладкости функций $F_p(x,t),\ p=1,2,$ в (26) вытекает из производных вдоль характеристик от $F_0(x,t)$:

$$F_1(x,t)=\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}-a\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}\in C^{m-1}(G_\infty),\quad F_2(x,t)=\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}+a\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}\in C^{m-1}(G_\infty).\qquad(30)$$

Достаточность на G_+. Гладким решением смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_+ является выражение (6) из теоремы 1, как решение задачи Пикара для уравнения (1) на G_+ с равенством $u_+(x,t)=u_-(x,t)$ на характеристике $x=at$ и с граничным режимом (3). Покажем достаточность предположений теоремы 2 для того, чтобы в (6) функция $u_+\in C^m(G_+)$. Такая гладкость первых двух слагаемых в (6) обеспечивается гладкостью начальных данных $\varphi\in C^m(R_+)$, $\psi\in C^{m-1}(R_+)$ из (20). Гладкость $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ из (20) гарантирует непрерывность частных производных до порядка $m-1$ включительно от $F_0(x,t)$ на G_+. Поэтому в (6) непрерывность частных производных порядка m от третьего слагаемого $F_0(x,t)$ на G_+ вытекает из равенств вида (29) в силу предположений гладкости (26) на $F_p(x,t),\ p=1,2.$ Непрерывность частных производных до порядка m включительно на G_+ от всех оставшихся слагаемых, кроме последнего, в формуле (6) вытекает из гладкости $\mu\in C^m(R_+)$, интегральных требований гладкости (26) при $x=0$ и гладкости (27) благодаря гладкости коэффициентов $\beta,\gamma\in C^m(R_+)$ и тому, что $\gamma(t)\ne 0,\ t\in R_+$. В частности, для $\beta\in C^m(R_+)$ и $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ непрерывность частных производных до порядка m включительно на G_+ от произведения

$$\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_0^{t-x/a} f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau=\beta\left(\tilde{t}\right)\int_0^{\tilde{t}} f\left(a(\tilde{t}-\tau),\tau\right)d\tau,\quad \tilde{t}=t-\frac{x}{a},$$

следует из требования гладкости (27), линейности замены $\tilde{t}=t-x/a$ и требований (26) при $x=0$. В (6) для m раз непрерывной дифференцируемости на G_+ последнего слагаемого вида двойного повторного интеграла $F^{(0)}$ достаточно гладкости $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ и интегральной гладкости (26) при $x=0$:

$$\frac{\partial F^{(0)}(x,t)}{\partial t}=-a\frac{\partial F^{(0)}(x,t)}{\partial x}=a\int_0^{t-x/a} f\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)d\tau=a\int_0^{\tilde{t}} f\left(a(\tilde{t}-\tau),\tau\right)d\tau\in C^{m-1}(G_+),\ \ \tilde{t}=t-\frac{x}{a}.$$

Можно показать, что этот интеграл $F^{(0)}$ является гладким решением однородного уравнения (1).

Необходимость на G_+, вообще говоря, доказывается так же, как в [1].

Необходимость гладкости функций $F_p(x,t),\ p=1,2,$ на G_∞ и, в частности, на G_+ из (26) вытекает выше из равенств и включений (30) и того, что $F_0(x,t)\in C^m(G_\infty)$ [9].

Необходимость m условий согласования (9), (10) и (12) при $l=\overline{0,m-1}$ граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) установлена нами в лемме 1 перед формулировкой теоремы 2. Обоснуем необходимость требования гладкости $\mu\in C^m(R_+)$ из теоремы 2 вместо $\mu\in C^{m-1}(R_+)$ из необходимых требований гладкости (20), необходимость требований гладкости (27) на начальные данные φ,ψ и необходимость условия согласования (28) вместо условия согласования (12) при $l=m$ из леммы 1.

Нам известен общий интеграл гладких решений уравнения (1) из [1]:

$$u(x,t)=g(x+at)+h(x-at)+F_0(x,t),\quad F_0(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)dsd\tau, \tag{31}$$

где g,h – любые m раз непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и $F_0(x,t)\in C^m(G_\infty)$ – частное гладкое решение неоднородного уравнения (1). Согласно определению 1 гладкие решения (31) должны сохранять свою гладкость при подстановке как в уравнение (1), так и в граничный режим (3) и, в частности, при функциях $g=0,\ \ f=0$ и любой $h\in C^m(R_+)$. Поэтому гладкие решения $u_1(x,t)=h(x-at)$ однородного уравнения (1) должны сохранять свою гладкость при подстановке в характеристический граничный режим (3) [1]:

$$\left[-a\alpha(t)h'(x-at)+\beta(t)h'(x-at)+\gamma(t)h(x-at)\right]\Big|_{x=0}=\gamma(t)h(-at)=\mu(t).$$

Отсюда заключаем, что граничное данное $\mu\in C^m(R_+),$ потому что функции $\gamma,h\in C^m(R_+)$.

Подставив в (3) гладкие решения $u_2(x,t)=\varphi(x+at),$ которые получаются из (31) при $g=\varphi,\ \ h=0,$ $f=0,$ так как $\varphi\in C^m(R_+)$ согласно необходимым условиям (20), мы приходим к равенствам [1]:

$$a\alpha(t)\varphi'(at)+\beta(t)\varphi'(at)+\gamma(t)\varphi(at)=2\beta(t)\varphi'(at)+\gamma(t)\varphi(at)=\mu(t),\ t\ge 0.$$

Тогда $\beta(t)\varphi'(at)=\left[\mu(t)-\gamma(t)\varphi(at)\right]/2\in C^m(R_+)$, так как коэффициент $\gamma\in C^m(R_+)$ и уже доказана необходимость гладкости данных $\varphi,\ \mu\in C^m(R_+)$. На основании формулы Лейбница производной порядка m от произведения функций $\beta(t)\varphi'(at)$ отсюда следует первое включение $\Phi_m(t)\in C^1(R_+)$ из (27), так как коэффициент $\beta\in C^m(R_+)$ и уже показана необходимость гладкости граничного данного $\mu\in C^m(R_+)$.

В общем интеграле (31) полагаем $g(y)=\int\limits_0^y\psi(s)ds$, $h(z)=\int\limits_z^0\psi(s)ds$, $f=0$ и в силу необходимости $\psi\in C^{m-1}(R_+)$ из (20) имеем гладкие решения $u_3(x,t)=\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds\in C^m(G_+)$ однородного уравнения (1) из [1]. Подставляя их в характеристический граничный режим (3), приходим к равенствам:

$$\left\{a\alpha(t)\left[\psi(x+at)-\psi(at-x)\right]+\beta(t)\left[\psi(x+at)+\psi(at-x)\right]+\gamma(t)\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds\right\}\Bigg|_{x=0}=$$

$$=2\beta(t)\psi(at)=\mu(t)\in C^m(R_+).$$

На основании формулы Лейбница производной порядка m от произведения функций $\beta(t)\psi(at)$ отсюда следует второе включение $\Psi_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ из (27), потому что $\beta\in C^m(R_+)$ и уже необходимо $\mu\in C^m(R_+)$.

Подставляя из (31) при $g=h=0$ частное гладкое решение $u_2(x,t)=F_0(x,t)\in C^m\left(G_\infty\right)$ неоднородного уравнения (1) в граничный режим (3) и используя снова равенство $a\alpha(t)=\beta(t), t\in[0,\infty)$, имеем [1]:

$$\left[\alpha(t)\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial t}+\beta\left(t\right)\frac{\partial F_0(x,t)}{\partial x}+\gamma(t)F_0(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{2a}\Big\{a\alpha(t)\Big[F_2\,(0,t)+F_1\,(0,t)\Big]+$$

$$+\beta(t)\Big[F_2\,(0,t)-F_1\,(0,t)\Big]\Big\}+\gamma(t)F_0(0,t)=\big(\beta(t)/a\big)F_2\,(0,t)+\gamma(t)F_0(0,t)=\mu(t).$$

Это указывает на то, что $\beta(t)\left(\partial^{m-1}F_2\,(0,t)/\partial t^{m-1}\right)\in C^1(R_+)$, так как коэффициенты $\beta,\ \gamma\in C^m(R_+)$ и необходима гладкость функций $\mu,\ F_0(0,t)\in C^m(R_+)$, т.е. на необходимость гладкости $\mathfrak{F}_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ в (27).

Определение 3 [10]. *Критериальным значением* суммы *старших частных производных порядка* $m-1$ *от правой части* f *уравнения (1) для целых* $m\geq 2$ *называется конечное значение* $K_m(0)$ *функции (24) при* $f(x,t)=f_0(x,t)$ и $x=0$ *для пределов*

$$f_0(x,t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty),\quad f_n(x,t)\in C^m(G_\infty),$$

которые сходятся по норме из (33) банахова пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ *к функциям* $f_0(x,t)\in C^{m-2}(G_\infty)$, *удовлетворяющим требованиям гладкости* $F_p(x,t)\in C^{m-1}(G_\infty),\quad p=1,2,$ *из (26) и требованию гладкости* $\mathfrak{F}_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ *из (27).*

Покажем необходимость существования конечного критериального значения $K_m(0)$ старших производных порядка $m-1$ от правой части f уравнения (1) в определении 3. Для любой более гладкой функции $f\in C^m(G_\infty)$ при $t\geq 0$ первая производная $\mathfrak{F}_{m-1}'(t)$ равна сумме двух слагаемых

$$\beta^{(i)}(t)\frac{\partial^{m-i}}{\partial t^{m-i}}\left(\int_0^t f(a(t-\tau),\tau)\,d\tau\right)=\beta^{(i)}(t)\left[\sum_{j=0}^{m-i-1}a^j\,\frac{\partial^{m-i-1}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-i-1-j}}\bigg|_{x=0}+a^{m-i}\int_0^t\frac{\partial^{m-i}f(x,\tau)}{\partial x^{m-i}}\bigg|_{x=a(t-\tau)}d\tau\right],\ i=0,1.$$

Из этих двух тождеств, в частности, при $t=0$ мы имеем равенство

$$\mathfrak{F}_{m-1}'(0)-\beta'(0)\sum_{j=0}^{m-2}a^j\,\frac{\partial^{m-2}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-2-j}}\bigg|_{x=0}\bigg|_{t=0}=\beta(0)\sum_{j=0}^{m-1}a^j\,\frac{\partial^{m-1}f(x,t)}{\partial x^j\partial t^{m-1-j}}\bigg|_{x=0}\bigg|_{t=0}=K_m(0)\in R,\qquad(32)$$

которое предельным переходом по f в указанной ниже норме пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ из (33) распространяется с функций $f\in C^m(G_\infty)$ на все функции $f\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие интегральным требованиям гладкости (26), (27).

Поэтому сначала в необходимом (по способу вывода) равенстве (12) при $l=m$ из леммы 1 для данных φ,ψ с необходимой гладкостью из (20), $\mu\in C^m(R_+)$ и более гладкой правой части $f\in C^m(G_\infty)$ мы используем обоснованную необходимость гладкости $\Phi_m(t),\ \Psi_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ из (27). Затем распространяем полученное равенство вида (12) предельным переходом по f в норме (33) пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ с функций $f\in C^m(G_\infty)$ на функции $f\in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие интегральным требованиям гладкости (26), и в силу необходимости существования конечного предела (32), благодаря установленной выше необходимости требования $\mathfrak{F}_{m-1}(t)\in C^1(R_+)$ в (27), имеем необходимое условие согласования (28).

Из формулы (6) при любом $T>0$ легко выводится непрерывная зависимость найденного решения u_+ в банаховом пространстве $C^m(G_T^+)$ от исходных данных $\varphi,\ \psi,\ \mu,\ f$ в декартовом произведении банаховых пространств $\hat{C}^m[0,X_a]\times\hat{C}^{m-1}[0,X_a]\times C^m[0,T]\times\hat{C}^{m-2}(G^T)$, в которых множества $G_T^+=G^T\bigcap G_+$, $G^T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\le x+at\le X_a,\ 0\le t\le T\}$ и постоянная $X_a=2aT,$ соответственно с нормами:

$$\|u\|_{C^m(G_T^+)}=\max_{(x,t)\in G_T^+}\sum_{0\le i+j\le m}\left|\partial_x^i\partial_t^j u(x,t)\right|,\ \|\varphi\|_{\hat{C}^m[0,X_a]}=\max_{0\le x\le X_a}\sum_{k=0}^{m}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|+\max_{0\le t\le T}\left(\left|(\Phi_m)'(t)\right|+\left|\Phi_m(t)\right|\right),$$

$$\|\psi\|_{\hat{C}^{m-1}[0,X_a]}=\max_{0\le x\le X_a}\sum_{k=1}^{m-1}\left|\psi^{(k)}(x)\right|+\max_{0\le t\le T}\left(\left|(\Psi_{m-1})'(t)\right|+\left|\Psi_{m-1}(t)\right|\right),\ \|\mu\|_{C^m[0,T]}=\max_{0\le t\le T}\left(\sum_{k=0}^{m}\left|\mu^{(k)}(x)\right|\right),$$

$$\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+-u_-]\right)\ \|f\|_{\hat{C}^{m-2}(G^T)}=\max_{(x,t)\in G^T}\left(\sum_{0\le i+j\le m-2}\left|\partial_x^i\partial_t^j f(x,t)\right|+\sum_{p=0}^{1}\sum_{0\le i+j\le m-1}\left|\partial_x^i\partial_t^j F_p(x,t)\right|\right)+$$

$$+\max_{0\le t\le T}\left(\left|(\mathfrak{F}_{m-1})'(t)\right|+\left|\mathfrak{F}_{m-1}(t)\right|\right).\qquad(33)$$

Функции u_+ и u_- должны быть m раз непрерывно дифференцируемыми, как соответственно на G_+ и замыкании $\overline{G_-}$ множества G_-, так и на общей характеристике $x=at.$ Необходимость этого факта следует из нашего определения 1 гладкого решения $u\in C^m(G_\infty)$. Необходимость условий согласования (9), (10), (12) при $l=\overline{0,m-1}$ и (28) при $l=m$ обоснована нами выше, с использованием постановки задачи. Убедимся в их достаточности, т.е. в том, что m раз непрерывная дифференцируемость функций u_+ и u_- на характеристике $x=at$ обеспечивается условиями согласования (9), (10), (12) при $l=\overline{0,m-1}$ и (28) при $l=m,$ с использованием явных формул (4) и (6) решения, гладкого уже в G_+ и G_-.

Лемма 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 2. Разность функций u_+, u_- и разность их всех частных производных до порядка m включительно на характеристике $x=at$ равна*

$$\left.\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+-u_-]\right)\right|_{x=at}=\frac{(-1)^k}{a^{k+l}}\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}(0)\left[a\mu^{(k+l-i)}(0)-S_{k+l-i}\right],\qquad(34)$$

$$0\le i+j\le m,\ m\ge 2.$$

где вспомогательной функцией является $g(t)=1/\gamma(t).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость равенств (34) при $m=0,1,2$ обоснована в лемме 1, с учетом совпадения частных производных от f в суммах (22) для четных $m\ge 2$ и в (23) для нечетных $m\ge 3$ с суммой равенства (24) и также совпадения слагаемых в суммах (22) и (23) с производными от начальных данных φ и ψ для четных и нечетных $m\ge 2$ с суммой (25).

Докажем равенства (34) при $m=3,4,...,m-1$. Их справедливость вытекает из непосредственного вычисления частных производных этих порядков от разности решений

$$u_+(x,t)-u_-(x,t)=\frac{-\varphi(at-x)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_{at-x}^{x-at}\psi(s)ds+\int_0^{t-x/a}\int_{x-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)-x}f(s,\tau)dsd\tau\right)+$$

$$+\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\left(a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-a\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\varphi'(at-x)-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\psi(at-x)\right)-$$

$$-\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int_0^{t-x/a} f(a(t-\tau)-x,\tau)d\tau-\frac{1}{a}\int_0^{t-x/a}\int_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)dsd\tau.$$

После вычисления частных производных высших порядков получаем

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+(x,t)-u_-(x,t)]=-\frac{1}{2}a^l\left[(-1)^k\varphi^{(k+l)}(at-x)+(-1)^l\varphi^{(k+l)}(x-at)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}a^{l-1}\left[(-1)^{k+1}\psi^{(k+l-1)}(at-x)+(-1)^l\psi^{(k+l-1)}(x-at)\right]+$$
$$+\frac{1}{2a}\left\langle(-1)^{k+1}a^{-k}\left[\sum_{i=0}^{k+l-2}a^{k+l-i-1}f^{(k+l-i-2,i)}(0,t-x/a)+a^{k+l}\int_0^{t-\frac{x}{a}}f^{(k+l-1,0)}\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)\mathrm{d}\tau\right]+\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i a^{-i}f^{(k-i-1,i+l-1)}(0,t-x/a)+\sum_{i=0}^{l-2}(-1)^{i+1}a^{i+1}f^{(i+k,l-i-2)}(0,t-x/a)+$$
$$\left.+(-1)^l a^l\int_o^t f^{(k+l-1,0)}(-at+a\tau+x,\tau)\mathrm{d}\tau+(-1)^{l+1}a^l\int_{t-x/a}^t f^{(k+l-1,0)}(-at+a\tau+x,\tau)\mathrm{d}\tau\right\rangle+$$
$$+(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}(t-x/a)\Big\{\mu^{(k+l-i)}(t-x/a)-$$
$$-\sum_{j=0}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\beta^{(k+l-i-j)}(t-x/a)\Big[a^{j-1}\left(a\varphi^{(j+1)}(at-x)+\psi^{(j)}(at-x)\right)+$$
$$+\sum_{r=0}^{j-1}a^{j-r-2}f^{(j-r-1,r)}(0,t-x/a)+a^{j-1}\int_0^{t-x/a}f^{(j,0)}\left(a(t-\tau)-x,\tau\right)\mathrm{d}\tau\Big]\Big\}.$$

Рассмотрим значения этих частных производных разности на характеристике $x=at$:

$$\left.\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}[u_+(x,t)-u_-(x,t)]\right|_{x=at}=\frac{(-1)^{k+1}+(-1)^{l+1}}{2}a^l\varphi^{(k+l)}(0)+$$
$$+\frac{(-1)^{k+1}+(-1)^l}{2}a^{l-1}\psi^{(k+l-1)}(0)-\frac{1}{2a}\left\langle(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}a^{k+l-i-1}f^{(k+l-i-2,i)}(0,0)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{k-1}(-a)^{-i}f^{(k-i-1,l+i-1)}(0,0)-\sum_{i=0}^{l-2}(-a)^{i+1}f^{(i+k,l-i-2)}(0,0)\right\rangle+$$
$$+(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^i g^{(i)}(0)\Big\{\mu^{(k+l-i)}(0)-\sum_{j=0}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\beta^{(k+l-i-j)}(0)\Big[a^{j-1}\left(a\varphi^{(j+1)}(0)+\psi^{(j)}(0)\right)+$$
$$+\sum_{r=0}^{j-1}a^{j-r-2}f^{(j-r-1,r)}(0,0)\Big]\Big\},\ 3\le k+l\le 4,\dots,m-1. \quad (35)$$

Суммы вида $\sum_{i=i_1}^{i_2}p(i)$, где $i_2<i_1$ принимаем равными 0. Для преобразования выражения (35) нам понадобятся следующие формулы. Заменой индекса суммирования $s=j-r-1$ находим равенства

$$\sum_{r=0}^{j-1}a^{j-r-2}f^{(j-r-1;r)}(0,0)=\sum_{s=0}^{j-1}a^{s-1}f^{(s;j-s-1)}(0,0),\ j\ge 1. \quad (36)$$

Если из трех нижеприведенных сумм в (35) две последние записать через одну, а затем объединить с третьей, то выражение существенно упрощается:

$$\left(-a\right)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}a^{k+l-i-1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)-\sum_{i=0}^{l-2}(-a)^{i+1}f^{(k+i;l-i-2)}(0,0)-$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\left(-a\right)^{-i}f^{(k-i-1;l+i-1)}(0,0)=(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}(a^{i+1}-(-a)^{i+1})f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)=$$

$$=(-a)^{-k}\sum_{i=0}^{k+l-2}(1-(-1)^{i+1})a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0). \tag{37}$$

Если формулы частных производных (22) и (23) объединить в одну, то получим

$$S_\nu\equiv\left\langle\beta^{(\nu)}(0)\left[\psi(0)+a\varphi'(0)\right]+a\gamma^{(\nu)}(0)\varphi(0)\right\rangle+$$

$$+\nu\left\{\beta^{(\nu-1)}(0)\left\langle a\left[\psi'(0)+a\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+a\gamma^{(\nu-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{\nu}C_\nu^i\left\{\beta^{(\nu-i)}(0)\left\langle a^i\left[\psi^{(i)}(0)+a\varphi^{(i+1)}(0)\right]+\sum_{j=0}^{i-1}a^jf^{(j;i-j-1)}(0,0)\right\rangle+\right.$$

$$+a\gamma^{(\nu-i)}(0)\left\langle a^{i-1}\frac{1-(-1)^{i-1}}{2}\left[\psi^{(i-1)}(0)+a\varphi^{(i)}(0)\right]+\sum_{k=0}^{i-2}a^k\frac{1-(-1)^{k+1}}{2}f^{(k;i-k-2)}(0,0)+\right.$$

$$\left.\left.+(-a)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right\rangle\right\}=a\mu^{(\nu)}(0),\ \nu=0,1,\ldots,m-1, \tag{38}$$

$$S_m\equiv\left\langle\beta^{(m)}(0)\left[\psi(0)+a\varphi'(0)\right]+a\gamma^{(m)}(0)\varphi(0)\right\rangle+$$

$$+m\left\{\beta^{(m-1)}(0)\left\langle a\left[\psi'(0)+a\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+a\gamma^{(m-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{m}C_m^i\left\{\beta^{(m-i)}(0)\left\langle a^i\left[\psi^{(i)}(0)+a\varphi^{(i+1)}(0)\right]+K_m(0)\right\rangle+\right.$$

$$+a\gamma^{(m-i)}(0)\left\langle a^{i-1}\frac{1-(-1)^{i-1}}{2}\left[\psi^{(i-1)}(0)+a\varphi^{(i)}(0)\right]+\sum_{k=0}^{i-2}a^k\frac{1-(-1)^{k+1}}{2}f^{(k;i-k-2)}(0,0)+\right.$$

$$\left.\left.+(-a)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right\rangle\right\}=a\mu^{(m)}(0).$$

Теперь к разностям (34) прибавляем и отнимаем значения величин S_{k+l-i} для $\nu=3,4,\ldots,m-1$ из (38) и применяем формулы (36), (37)

$$\frac{(-1)^k}{a^{k+1}}\left\{\frac{-1+\left(-1\right)^{k+l+1}}{2}a^{k+l+1}\varphi^{(k+l)}\left(0\right)+\frac{-1+\left(-1\right)^{k+l}}{2}a^{k+l}\psi^{(k+l-1)}\left(0\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k+l-2}(1-(-1)^{i+1})a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^ig^{(i)}\left(0\right)\left\{a\mu^{(k+l-i)}\left(0\right)-S_{k+l-i}\right\}+\sum_{i=0}^{k+l}C_{k+l}^ig^{(i)}\left(0\right)\left[S_{k+l-i}-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=0}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\beta^{(k+l-i-j)}\left(0\right)\left\langle a^j\left(a\varphi^{(j+1)}\left(0\right)+\psi^{(j)}\left(0\right)\right)+\sum_{s=0}^{j-1}a^sf^{(s;j-s-1)}(0,0)\right\rangle\right]\right\}, \tag{39}$$

где

$$S_{k+l-i}=\left\langle\beta^{(k+l-i)}(0)\left[\psi(0)+a\varphi'(0)\right]+a\gamma^{(k+l-i)}(0)\varphi(0)\right\rangle+$$

$$+(k+l-i)\left\{\beta^{(k+l-i-1)}(0)\left\langle a\left[\psi'(0)+a\varphi''(0)\right]+f(0,0)\right\rangle+a\gamma^{(k+l-i-1)}(0)\psi(0)\right\}+$$

$$+\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^j\left\{\beta^{(k+l-i-j)}(0)\left\langle a^j\left[\psi^{(j)}(0)+a\varphi^{(j+1)}(0)\right]+\sum_{s=0}^{j-1}a^sf^{(s;j-s-1)}(0,0)\right\rangle+\right.$$

$$+a\gamma^{(k+l-i-j)}(0)\left\langle a^{j-1}\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}\left[\psi^{(j-1)}(0)+a\varphi^{(j)}(0)\right]+\sum_{r=0}^{j-2}a^r\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}f^{(r;j-r-2)}(0,0)+\right.$$

$$\left.\left.+(-a)^{j-1}\psi^{(j-1)}(0)\right\rangle\right\}.$$

Одинаковые слагаемые в (38) и (39) сразу сокращаются и получаем следующие выражения:

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\left\{a\mu^{(k+l-i)}(0)-S_{k+l-i}\right\}+$$

$$+\frac{-1+(-1)^{l-k+1}}{2}a^{k+l+1}\varphi^{(k+l)}(0)+\frac{-1+(-1)^{l}}{2}a^{k+l}\psi^{(k+l-1)}(0)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k+l-2}(1-(-1)^{i+1})a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\Big[a\gamma^{(k+l-i)}(0)\varphi(0)+(k+l-i)\,a\gamma^{(k+l-i-1)}(0)\psi(0)+\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^{j}\gamma^{(k+l-i-j)}(0)\times$$

$$\times\left\langle a^{j}\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}\left(\psi^{(j-1)}(0)+a\varphi^{(j)}(0)\right)+\sum_{r=0}^{j-2}a^{r+1}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}f^{(r;j-r-2)}(0,0)+(-a)^{j-1}a\psi^{(j-1)}(0)\right\rangle\Big].$$

Наконец, докажем, что оставшиеся слагаемые также обращаются в нуль. Ввиду формулы Лейбница производных от произведения двух функций, равного единице, верны очевидные равенства

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i)}(0)\varphi(0)=(g(t)\gamma(t))^{(k+l)}\Big|_{t=0}=\left(\gamma(t)\frac{1}{\gamma(t)}\right)^{(k+l)}\Bigg|_{t=0}=0,$$

$$\sum_{i=0}^{k+l}(k+l-i)\,C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i-1)}(0)\psi(0)=(k+l)\sum_{i=0}^{k+l-1}C_{k+l-1}^{i}g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i-1)}(0)=$$

$$=(k+l)(g(t)\gamma(t))^{(k+l-1)}\Big|_{t=0}=0.$$

Перегруппируя слагаемые, также приходим к равенствам

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^{j}\gamma^{(k+l-i-j)}(0)\sum_{r=0}^{j-2}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}a^{r+1}f^{(r;j-r-2)}(0,0)-\sum_{i=0}^{k+l-2}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)=$$

$$=\sum_{j=2}^{k+l}C_{k+l}^{j}\sum_{r=0}^{j-2}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}a^{r+1}f^{(r;j-r-2)}(0,0)\sum_{i=0}^{k+l-j}C_{k+l-j}^{i}g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-j-i)}(0)-\sum_{i=0}^{k+l-2}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)=$$

$$=\sum_{j=2}^{k+l-1}C_{k+l}^{j}\sum_{r=0}^{j-2}\frac{1-(-1)^{r+1}}{2}a^{r}f^{(r;j-r-2)}(0,0)(g(t)\gamma(t))^{(k+l-j)}\Big|_{t=0}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k+l-2}\frac{1-(-1)^{i+1}}{2}a^{i+1}f^{(i;k+l-i-2)}(0,0)(g(t)\gamma(t)-1)=0.$$

Учитывая справедливость следующей формулы

$$a^{j}\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}\left(\psi^{(j-1)}(0)+a\varphi^{(j)}(0)\right)-(-a)^{j}\psi^{(j-1)}(0)=a^{j}\left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}\psi^{(j-1)}(0)+\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}a\varphi^{(j)}(0)\right),$$

получаем равенства

$$\sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^{i} g^{(i)}(0)\sum_{j=2}^{k+l-i}C_{k+l-i}^{j}\gamma^{(k+l-i-j)}(0)a^{j}\left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}\psi^{(j-1)}(0)+\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}a\varphi^{(j)}(0)\right)+$$

$$+\frac{-1+(-1)^{k+l+1}}{2}a^{k+l+1}\varphi^{(k+l)}(0)+\frac{-1+(-1)^{k+l}}{2}a^{k+l}\psi^{(k+l-1)}(0)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k+l-1}C_{k+l}^{j}a^{j}\left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2}\psi^{(j-1)}(0)+\frac{1-(-1)^{j-1}}{2}a\varphi^{(j)}(0)\right)\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{k+l-j}C_{k+l-j}^{j}g^{(i)}(0)\gamma^{(k+l-i-j)}(0)+a^{k+l}\left(\frac{-1+(-1)^{k+l}}{2}\psi^{(k+l-1)}(0)+\frac{-1-(-1)^{k+l}}{2}a\varphi^{(k+l)}(0)\right)=$$

$$= \sum_{j=0}^{k+l-1} C_{k+l}^{j} a^{j} \left(\frac{1+(-1)^{j-1}}{2} \psi^{(j-1)}(0) + \frac{1-(-1)^{j-1}}{2} a\varphi^{(j)}(0) \right) (g(t)\gamma(t))^{(k+l-j)} \Big|_{t=0} +$$

$$+ a^{k+l} \left(\frac{1+(-1)^{k+l-1}}{2} \psi^{(k+l-1)}(0) + \frac{1-(-1)^{k+l-1}}{2} a\varphi^{(k+l)}(0) \right) (g(0)\gamma(0) - 1) = 0.$$

Итак, мы показали обращение в нуль оставшихся слагаемых и справедливость (34) при $\nu < m$.

Теперь докажем равенства (34) при $\nu = m$. Для более гладких функций $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(R_+)$, $\psi \in C^{m}(R_+)$ формула (34) при $\nu = m$ выводится аналогично предыдущим случаям $\nu < m$. Затем полученное равенство (34) при $\nu = m$ предельным переходом по f, φ, ψ распространяется с этих более гладких функций на функции f, φ, ψ меньшей гладкости из (20), но с дополнительной гладкостью (26), (27). Тем самым лемма 2 доказана.

В силу условий согласования (9), (10), (12), (28) для решений u_+ и u_- на критической характеристике $x = at$ равны нулю их разности и разности их всех частных производных до порядка $m \geq 2$ включительно:

$$(u_+ - u_-)\big|_{x=at} = \frac{a\mu(0) - S_0}{a\gamma(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_+}{\partial t} - \frac{\partial u_-}{\partial t} \right) \Bigg|_{x=at} = \frac{a\mu'(0) - S_1}{a\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)\left(S_0 - a\mu(0)\right)}{a\gamma^2(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_+}{\partial x} - \frac{\partial u_-}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=at} = \frac{-a\mu'(0) + S_1}{a^2\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)\left(a\mu(0) - S_0\right)}{a^2\gamma^2(0)} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} \right) \Bigg|_{x=at} = \frac{a\mu''(0) - S_2}{a\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)\left(S_1 - a\mu'(0)\right)}{a\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2\gamma'^2(0)}{a\gamma^3(0)} \left(S_0 - a\mu(0)\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} \right) \Bigg|_{x=at} = \frac{a\mu''(0) - S_2}{a^3\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)\left(S_1 - a\mu'(0)\right)}{a^3\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2\gamma'^2(0)}{a^3\gamma^3(0)} \left(S_0 - a\mu(0)\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t} \right) \Bigg|_{x=at} = \frac{S_2 - a\mu''(0)}{a^2\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)\left(a\mu'(0) - S_1\right)}{a^2\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2\gamma'^2(0)}{a^2\gamma^3(0)} \left(a\mu(0) - S_0\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^{i+j} u_+}{\partial x^i \partial t^j} - \frac{\partial^{i+j} u_-}{\partial x^i \partial t^j} \right) \Bigg|_{x=at} = \frac{(-1)^i}{a^{i+1}} \sum_{k=0}^{i+j} C_{i+j}^{k} \left(a\mu^{(i+j-k)}(0) - S_{i+j-k}\right)\left(\gamma^{-1}(0)\right)^{(k)} = 0, \; 0 \leq i + j \leq m.$$

Единственность гладкого решения u_+ на G_+ объясняется единственностью решения u_- задачи Коши (1), (2) на G_- и тем, что среди сужений всех гладких решений (31) уравнения (1) на G_+ это единственное решение u_+, удовлетворяющее двум граничным режимам решенной выше задачи Пикара.

Таким образом, мы доказали существование, единственность и устойчивость гладкого решения $u \in C^m(G_\infty)$, которое выражается формулой (4) на G_- и формулой (6) на G_+. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *При характеристической первой косой производной в (3) не следует выносить общий множитель $\beta(t - x/a)$ за скобки в классическом решении (6) из-за требований гладкости (27) для всех $m \geq 2$. В условиях согласования (9), (10), (12) можно выносить общий множитель $\beta(0)$*

за скобки только при $l=\overline{0,m-1},\ m\ge 2.$ *Слагаемые из суммы (25) с завышенной на единицу гладкостью начальных данных* φ и ψ *явно отсутствуют в условии согласования (28), так как по предположениям теоремы 2 не существуют производные* $\varphi^{(m+1)}$ и $\psi^{(m)}$ *для* $m\ge 2.$ *Доказательство теоремы 2 упрощается при* $\gamma(t)\equiv 1,\ t\in R_+.$ *Для этого характеристическое граничное условие (3) приводится к соответствующему эквивалентному граничному условию делением его на* $\gamma(t)\ne 0,\ t\in R_+.$ *Но если коэффициент* $\beta(t)\ne const\times\gamma(t),\ t\in R_+,$ *то после деления граничного условия* (3) на $\gamma(t)\ne 0,\ t\in R_+,$ *эквивалентное характеристическое граничное условие тоже не допускает разделения переменных* x и t *при решении соответствующей эквивалентной смешанной задачи методом Фурье. Таким образом, в общем случае характеристическая смешанная задача (1)–(3) как для полуограниченной струны на* G_∞, *так и для ограниченной струны на* $G=[0,d]\times R_+$ *явно не решается методом Фурье, т.е. методом периодических продолжений (отражений) по* $x\in[0,d]$ *начальных данных* $\varphi,\ \psi$ *и правой части* f.

Так же, как в работе [1] и диссертации [5], доказываются

Следствие 1. *Если правая часть* f *уравнения (1) зависит только от* x *или* t *и* $f\in C^{m-2}(R_+)$ *по* x *или* t, *то утверждение теоремы 2 верно без интегральных требований гладкости (26) на* f.

В случае зависимости правой части уравнения (1) только от x или только от t интегральные требования гладкости (26) на правую часть всегда выполняются и поэтому эти интегральные требования гладкости (26) отсутствуют в формулировке следствия 1.

Следствие 2. *Для исходных данных* $f\in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi\in C^{m+1}(R_+),\ \psi\in C^m(R_+),\ \mu\in C^m(R_+)$ *теорема 2 дает достаточные условия корректности задачи (1)–(3) без требований гладкости (26), (27).*

Для исходных данных $f\in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi\in C^{m+1}(R_+),\ \psi\in C^m(R_+)$ с завышенной на единицу гладкостью по сравнению с (20) требования гладкости (26), (27) заведомо имеют место.

Следствие 3. *Из теоремы 2 при* $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ *имеем формулу решения и критерий корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) в классе гладких решений* $u\in C^m(G_\infty),\ m\ge 2.$

Когда $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ и $\gamma\ne 0,$ тогда граничное условие (3) становится условием $u(0,t)=\mu(t)/\gamma(t), t>0.$

Замечание 2. *Можно показать [5], что для смешанной задачи (1)–(3) указанная в требованиях (26) принадлежность интегралов множеству* $C^{m-1}(G_\infty)$ *от функции* $f\in C^{m-2}(G_\infty)$ *эквивалентна их принадлежности множествам* $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ *или* $C^{(0,m-1)}(G_\infty).$ *Здесь* $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$ – *соответственно множества непрерывно дифференцируемых* $m-1$ *раз по* x *или непрерывных по* t *и непрерывных по* t *или непрерывно дифференцируемых* $m-1$ *раз по* x *функций на* G_∞.

Замечание 3. *В определении 3 для всех четных* m *критериальными значениями являются [4]:*

$$K_m(0)\equiv\beta(0)\sum_{j=0}^{m-1}a^j f^{(j,m-1-j)}(0,t)\big|_{t=0}=\sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}}\left(\sum_{s=0}^{(m-2)/2}a^{2s}f^{(2s,m-2-2s)}(0,0)\right),\ m=2,4,6,..., \tag{40}$$

где символом $\partial\left(\sum\ \right)/\partial\vec{\nu}$ *обозначено значение производной по вектору* $\vec{\nu}=\{a,1\}$ *при* $x=0$ *и* $t=0$ *от указанной в (40) суммы частных производных порядка* $m-2$ *от функции* $f\in C^{m-2}(G_\infty).$

Заключение. В данной работе представлены формулы единственного и устойчивого гладкого решения смешанной задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме с характеристической первой косой производной. Для однозначной и устойчивой везде разрешимости этой характеристической смешанной задачи во множестве гладких решений впервые выведен полный критерий корректности: необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное и условия согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением.

Работа выполнена при поддержке ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломовцев, Ф.Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
2. Шлапакова, Т.С. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т.С. Шлапакова, Н.И. Юрчук // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2013. – № 2. – С. 84–90.
3. Ломовцев, Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Международная математическая конференция «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
4. Ломовцев, Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
5. Новиков, Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Е.Н. Новиков; Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.
6. Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
7. Юрчук, Н.И. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны / Н.И. Юрчук, Е.Н. Новиков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 116–120.
8. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
9. Ломовцев, Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф.Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
10. Ломовцев, Ф.Е. Гладкие решения начально-граничной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косой производной / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Воронежс. зимн. матем. школа: материалы междунар. конф., Воронеж, 28 янв. – 2 февр. 2021 г. / Воронежс. гос. ун-т; под общ. ред. Б.С. Кашина, Д.А. Ендовицкого, П.А. Бородина. – Воронеж, 2021. – С. 195–198.

REFERENCES

1. Lomovtsev F.E. Vestsi NAN Belarusi Ser. fiz.-mat. navuk [Journal of the NAS of Belarus. Physical and Mathematical Sciences], 2016, 1, pp. 21–27.
2. Shlapakova T.S., Yurchuk N.I. Vestnik BGU. Ser. 1 [Journal of BSU. Ser. 1], 2013, 2, pp. 84–90.
3. Lomovtsev F.E. Mezhdunarodbnaya matematicheskaya konferentsiaya “Shestiye Bogdanovskiye chteniya po obuknovennym differentsialnym uravneniyam”: materialy mezhdunar. nauch. konf., Minsk, 7–10 dek. 2015 g.: v 2 ch. Belorus. gos. un-t [International Mathematical Conference “The 6th Bogdanov Readings on Conventional Differential Equations”: Proceedings of the International Scientific Conference, Minsk, December 7–10, 2015: in 2 Parts, Belarusian State University], Minsk, 2015, 2, pp. 74–75.
4. Lomovtsev F.E., Tochko T.S. Vesnik Grodzernskaga dziarzhaunaga universiteta imia Yanki Kupaly. Ser. 2, Matematika. Fizika. Infarmatyka, vylichalnaya tekhnika i kiravanne [Journal of Yanka Kupala State University of Grodno. Ser. 2, Mathematics. Physics. Information Science, Calculation Machines and Management], 2019, 9(2), pp. 56–75.
5. Novikov E.N. Smeshanniye zadachi dlia uravnenii vynuzhdennykh kolebani ogranichennoi struny pri nestatsionarnykh granichnykh usloviyakh s pervoi i vtoroi kosoi proizvodnymi: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Mixed Problems for the Equation of induced Vibrations of a Limited String under Non-Stationary Boundary Conditions with the First and the Second Oblique Derivatives: PhD (Pysics and Mathematics) Dissertation Summary], Institut matematiki NAN Belarusi, Minsk, 2017, 25 p.
6. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. Differents. Uravneniya [Differential Equations], 2009, 45(8), pp. 1188–1191.
7. Yurchuk N.I., Novikov E.N. Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk [Journal of the NAS of Belarus. Physical and Mathematical Sciences], 2016, 4, pp. 116–120.
8. Tikhonov A.N., Samarski A.A. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics], M.: Nauka, 2004, 798 p.
9. Lomovtsev F.E. Zhurn. Belorus. gos. un-ta. Matematika. Informatika [Journal of Belarusian State University. Mathematics. Information Science], 2017, 3, pp. 38–52.
10. Lomovtsev F.E., Tochko T.S. Sovremenniye metody teorii funktsii i smezhniye problemy: Voronezh. zimn. matem. shkola: materialy mezhdunar. konf., Voronezh, 28 yanv. – 2 fevr. 2021 g. Voronezh. gos. un-t [Contemporary Methods of the Theory of Functions and Boundary Problems: Voronezh Winter Mathematical School: Proceedings of the International Scientific Conference, Voronezh, January 28 – February 2, 2021. Voronezh State University], Voronezh, 2021, pp. 195–198.

Поступила в редакцию 04.04.2022
***Адрес для корреспонденции*:** e-mail: lomovcev@bsu.by – Ломовцев Ф.Е.