УДК 517.983

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

С.А. Шлапаков*, О.В. Скоромник**
**Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*
***Учреждение образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»*

Дробное исчисление – это часть современного математического анализа, которая в настоящее время интенсивно развивается. Важность изучения дифференциальных уравнений дробного порядка обусловлена их широким применением в задачах биологии, химии, физики, механики и, собственно, в самой теории дробного исчисления. В задачах прикладного характера нередко возникает необходимость рассматривать аналоги задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе исследуется краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка.

Цель статьи – показать равносильность задачи типа Коши и интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

***Материал и методы.** Рассматривается задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка общего вида. При этом используются методы функционального анализа и дробного исчисления.*

***Результаты и их обсуждение.** В работе исследуется задача типа Коши для уравнения с дробной производной Адамара, показана ее эквивалентность интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а также доказаны существование и единственность решения задачи в пространстве интегрируемых функций.*

***Заключение.** Полученные результаты обобщают таковые для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка.*

***Ключевые слова:** дробное интегрирование и дифференцирование Адамара, задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, пространство интегрируемых функций.*

THE CAUCHY TYPE PROBLEM FOR THE EQUATION WITH FRACTIONAL HADAMARD DERIVATIVE

S.A. Shlapakov*, O.V. Skoromnik**
**Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”*
***Education Establishment “Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk”*

Fractional calculation is a part of modern mathematical analysis which is rapidly developing at present. The significance of the study of fractional oder differential equations is due to their wide application in Biology, Chemistry, Physics, Mechanics problems as well as in the theory of fractional calculation itself. In applied character problems it is often necessary to consider Cauchy problem analogues for differential equations of fractional order. We consider a boundary value problem of Cauchy type for a differential equation of fractional order.

The purpose of the article is to demonstrate the equality of the Cauchy type problem and the second order Volterra integral equation.

***Material and methods.** The Cauchy type problem for the general type differential equation of fractional order is considered. Methods of functional analysis and fractional calculation are used.*

***Findings and their discussion.** The Cauchy type problem for the equation with fractional Hadamard derivative is studied in the paper. Its equivalence to the second order Volterra integral equation is demonstrated. The existence and the only possible solution of the problem in the space of integrated functions are proved.*

***Conclusion.** The obtained findings generalize those for convetional differential n-order equations.*

***Key words:** fractional Hadamard integration and differentiation, Cauchy type problem for a differential equation of fractional order, the second order Volterra integral equation, space of integrated functions.*

В настоящей работе исследуется задача типа Коши, постановка которой производится для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка с дробной производной Адамара [1; 2]. Естественно, возникает проблема интегрирования такого уравнения с учетом начальных условий. Работа посвящена этому аспекту.

Цель статьи – показать равносильность задачи типа Коши и интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Материал и методы. Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, используемые при интегрировании дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дробного интегродифференцирования.

Результаты и их обсуждение. В [1] рассматривалась задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$\left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(x) = f(x, y(x)),\, n-1 < \alpha \le n,\, n \in N,\, n = -[-\alpha] \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k} y\right)(0+) = b_k,\, k = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{2}$$

где D_{0+}^{α} – дробная производная Римана–Лиувилля [1]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}y(t)dt\,,\, n-1<\alpha\le n,\, n\in N,\, a>0 \quad , \quad \Gamma(\beta)=\int_{0}^{\infty}x^{\beta-1}e^{-x}dx \quad -$$

гамма-функция, $f(x,y)$ – заданная функция в некоторой области $D \subset R^2$; $\alpha, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – постоянные вещественные числа. Введем в рассмотрение множество $R_n \subset D$:

$$\begin{aligned} &R_n = \left\{(x,y)\in D : 0 < x \le h\,, \left|x^{n-\alpha}y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)}\right| \le a\right\}, \\ &a > \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{n-k}b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $a, h, b_k \in R$.

Левые части в (2) представляют собой пределы в правосторонней окрестности $(0, 0+\varepsilon), \varepsilon > 0,$ точки 0:

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k} y\right)(0+) = \lim_{x\to 0+}\left(D_{0+}^{\alpha-k} y\right)(x),\, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 1. *Пусть $f(x,y)$ является вещественнозначной и непрерывной в области D функцией, причем она удовлетворяет по второй переменной условию Липшица*

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|, \quad L > 0,$$

и ограничению

$$\underset{(x,y)\in D}{Sup}\left|f(x,y)\right| = b_0 < +\infty\,.$$

Тогда решение задачи (1)–(2) для значений $n = 1, 2, \ldots$ в (3) существует, является непрерывным и единственным.

В ходе доказательства этого утверждения было показано, что задача типа Коши (1)–(2) эквивалентна уравнению

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt\,.$$

Данный факт согласуется с тем, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\dots+a_n(x)u=F(x),\ x>0$$

с начальными условиями при значении $x=0$

$$u(0)=c_0,\ u'(0)=c_1,\ u''(0)=c_2,\ \dots,\ u^{(n-1)}(0)=c_{n-1}$$

эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра [3]

$$\phi(x)+\int_0^x K(x,s)\phi(s)ds=f(x),$$

где

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$f(x)=F(x)-c_{n-1}a_1(x)-(c_{n-1}x+c_{n-2})a_2(x)-\dots-\left(c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+c_1x+c_0\right)a_n(x).$$

Дробное интегрирование и дифференцирование по Адамару порядка $\alpha>0$ определяется следующим образом:

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,\mu}h\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1}h(t)\frac{dt}{t},\ \alpha>0,\ x>a\ge 0,\ \mu\in R, \tag{4}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+,\mu}h\right)(x)=x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+,\mu}h\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1,\ \mu\in R. \tag{5}$$

В случае $\mu=0$ формулы (4) и (5) принимают соответственно вид [4]:

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}h\right)(x)\equiv\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+,0}h\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{h(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad x>a\ge 0, \tag{6}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}h\right)(x)\equiv\left(D^{\alpha}_{a+,0}h\right)(x)=\delta^n\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}h\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1. \tag{7}$$

Задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Адамара ставится следующим образом:

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x)=f(x,y(x)),\ n-1<\alpha\le n,\ n\in N,\ a>0 \tag{8}$$

при начальных условиях

$$\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)=b_k,\ k=1,2,\dots,n=-[-\alpha]. \tag{9}$$

Задачу (8)–(9) будем рассматривать в пространстве регулярных функций

$$L^{\alpha}_{\delta}(a,b)=\left\{y\in L(a,b)\,\middle|\,D^{\alpha}_{a+}y\in L(a,b)\right\},\ 0<a<b<+\infty. \tag{10}$$

В (9) левые части, аналогично (2), означают пределы в правосторонней окрестности $(a,a+\varepsilon),\varepsilon>0$ точки a:

$$\left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(D^{\alpha-k}_{a+,\mu}y\right)(x),\ k=1,2,\dots,n-1,$$

$$\left(D^{\alpha-n}_{a+}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a+}y\right)(x),\ \alpha\ne n,$$

$$\left(D^{0}_{a+,\mu}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}y(x),\ \alpha=n.$$

Следует отметить, что при натуральном значении $\alpha = n \in N$ задача (8)–(9) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \delta^n y(x) = f(x, y(x)),\ \delta = x\frac{d}{dx},$$

$$\lim_{x \to a+} \left(\delta^{n-k} y\right)(x) = b_k,\ b_k \in R,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что функция $y(x)$ является абсолютно интегрируемой по Лебегу на промежутке (a, b), то есть $y(x) \in L(a, b)$, причем она удовлетворяет задаче (8)–(9). Но согласно соотношениям (6) и (7)

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \delta^m \left(\Im_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x),\ n = -[-\alpha],\ \left(\Im_{a+}^{0} y\right)(x) = y(x),$$

причем $\left(\Im_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x) \in AC_{\delta,0}^{n}[a, b]$ [4]. Применим оператор дробного интегрирования Адамара $\Im_{a+}^{\alpha}$, определенный в (6), к обеим частям уравнения (8). Интегрируя по Адамару левую часть уравнения (8) с учетом свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования по Адамару [4], будем иметь

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\delta^{n-k}(\Im_{a+}^{n-\alpha} y)\right)(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k},$$

а с учетом условий (9)

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}.$$

Если теперь $\|f(x, y)\|_{L_1} = M < \infty$, то $\left\|\left(\Im_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x)\right\|_{L_1} \le K \|f(x, y)\|_{L_1}$, где постоянная K приведена в [2]. Применим оператор дробного интегрирования по Адамару к правой части (8):

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t}.$$

Таким образом,

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t},\ x > a. \tag{11}$$

Конструкция (11) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Пусть теперь $y(x) \in L(a, b)$ и является решением уравнения (11). Применяя оператор дробного дифференцирования по Адамару D_{a+}^{α}, определенный в (7), к обеим частям уравнения (11), получим уравнение (8), поскольку

$$\left(D_{a+}^{\alpha} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} = 0 \quad (\beta - \alpha = 0, -1, -2, \ldots, 1 + [-\alpha]).$$

Подействуем оператором $D_{a+}^{\alpha-k}$ на обе части уравнения (11). Если $1 \le k \le n-1$, то

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(D_{a+}^{\alpha-k} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}\right)(x) + \left(D_{a+}^{\alpha-k} \Im_{a+}^{\alpha} f(t, y(t))\right)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-j} + \left(\Im_{a+}^{k} f(t, y(t))\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(k-j)!} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{k-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t}.$$

Если же $k = n$, то имеем

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{(n-j)!}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{n-j}+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-1}f(t,y(t))\frac{dt}{t}.$$

Переходя в последних двух равенствах к правостороннему пределу $x \to a+$, получаем условия (9). Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\alpha>0$, $n=-[-\alpha]$, $0<a<b<\infty$ *и функция* $f(x,y)\in L(a,b)$ *при любом действительном y. Вещественная функция* $y(x)\in L(a,b)$ *является почти всюду решением задачи типа Коши (8)–(9) тогда и только тогда, когда она почти всюду удовлетворяет интегральному уравнению (11).*

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится обращаться к теории дробного дифференцирования и теории дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе получено интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода и доказана его эквивалентность задаче типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с дробной производной Адамара.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. О дробном интегродифференцировании Адамара в весовых пространствах суммируемых функций / С.А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2009. – № 3. – С. 132–135.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
4. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI(63) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 16–17 марта 2011 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2011. – Т. 1. – С. 71–73.

REFERENCES

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozhaeniya [Integrals and Fraction Order Derivatives and Some Applications], Minsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Shlapakov S.A. Vesnik Vitsebskaga dziarzhaunaga universiteta [Journal of Vitebsk State University], 2009, 3, pp. 132–135.
3. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Directory on Conventional Differential Equations], M.: Nauka, 1966, 576 p.
4. Shlapakov S.A. Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike: materialy XVI(63) Region. nauch.-prakt. konf. prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 16–17 marta 2011 g. v 2 t. [Science – for Education, Industry, Economy: Regional Scientific and Practical Conference of Teachers, Researchers and Postgraduate Students, Vitebsk, March 16–17, 2011], Vitebsk State University, Vitebsk, 2011, 1, pp. 71–73.

Поступила в редакцию 06.10.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.