Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

С.М. Бородич, Т.В. Кавитова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2023

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
Б83

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 10.03.2023.

Авторы: старший преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич;** старший преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.В. Кавитова**

Н а у ч н ы й р е д а к т о р:
доцент кафедры прикладного и системного программирования
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук,
доцент *Т.Л. Сурин*

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой математики и информационных технологий
УО «ВГТУ», кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*

Бородич, С.М.
Б83 Теория вероятностей и математическая статистика : методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова ; под науч. ред. Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – 53 с.

Данное учебное издание содержит краткий теоретический материал и демонстрационные примеры, помогающие лучше усвоить основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики. Оно может использоваться для организации самостоятельной работы студентов, а также при проведении практических занятий.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальностям «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)», «Программное обеспечение информационных технологий», «Прикладная математика», «Прикладная информатика», «Математика и информатика», «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)», «Управление информационными ресурсами», «Физика (научно-педагогическая деятельность)».

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью методических рекомендаций является ознакомление студентов с основными понятиями, фактами и методами теории вероятностей и математической статистики, а также с их возможными приложениями для статистической обработки реальных данных.

Назначение данного издания – оказать студентам помощь в самостоятельном овладении основными методами и приемами изучаемой дисциплины. Как источник необходимого теоретического материала оно может использоваться также при проведении практических занятий. Предназначено прежде всего для обучающихся по специальностям «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)», «Программное обеспечение информационных технологий», «Прикладная математика», «Прикладная информатика», «Математика и информатика», «Компьютерная безопасность (радиофизические методы и программно-технические средства)», «Управление информационными ресурсами», «Физика (научно-педагогическая деятельность)».

Методические рекомендации состоят из четырех разделов: «Случайные события и их вероятности», «Случайные величины», «Предельные теоремы теории вероятностей», «Элементы математической статистики». Материал каждой последующей части опирается на понятия, определяемые в предыдущих частях. Краткое изложение теоретического материала сопровождается демонстрационными примерами, способствующими лучшему пониманию и усвоению учебной дисциплины.

В конце издания размещен список литературы, изучение которой поможет студентам подробнее разобраться в отдельных вопросах теории вероятностей и математической статистики.

Часть I. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Случайные события. Пространство элементарных событий

Случайным событием (или просто: *событием*) называется любой факт, который может произойти или не произойти в результате некоторого эксперимента (испытания, опыта, наблюдения).

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в данном эксперименте, и *невозможным*, если до эксперимента заведомо известно, что это событие не произойдёт.

Достоверное событие будем обозначать буквой Ω, а невозможное – символом $\varnothing$.

Пример 1.1. Эксперимент состоит в однократном подбрасывании игральной кости (кубика). Примерами событий являются: событие A – выпадет 4 очка, событие B – выпадет чётное число очков, событие C – выпадет 7 очков, событие D – выпадет целое число очков. Событие C является невозможным, а событие D – достоверным. ●

Простейшие события, являющиеся непосредственными исходами данного эксперимента и обладающие тем свойством, что в результате эксперимента происходит одно и только одно из них, называются *элементарными событиями (элементарными исходами)*.

Элементарные события, при наступлении которых происходит событие A, называются *благоприятствующими событию* A. Любое событие, связанное с данным экспериментом, может быть представлено как совокупность всех благоприятствующих ему элементарных исходов.

Пример 1.2. Эксперимент: один раз подбрасывается игральная кость. В этом эксперименте 6 элементарных событий: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, где ω_i означает выпадение i очков, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пусть событие A – это выпадение чётного числа очков. Тогда благоприятствующими событию A будут элементарные события $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, и значит, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. ●

Очевидно, что достоверное событие представляется совокупностью всех элементарных событий.

Множество всех элементарных событий данного эксперимента называется *пространством элементарных событий* и обозначается, как и достоверное событие, буквой Ω.

1.2. Отношения между событиями

События A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же эксперименте. В противном случае события A и B называются *совместными*.

Очевидно, что несовместные события не имеют общих благоприятствующих им элементарных исходов.

События $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.

Если при наступлении события A обязательно происходит и событие B, то говорят, что событие A *влечёт* событие B. При этом пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

События и отношения между ними удобно иллюстрировать с помощью *диаграмм Эйлера – Венна*. При этом пространство элементарных исходов (достоверное событие) Ω изображается прямоугольником, элементарные исходы – точками этого прямоугольника, а случайные события – областями внутри него. На рис. 1 показано отношение $A \subset B$.

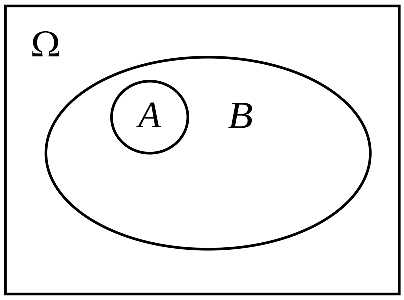


Рис. 1

Пример 1.3. Эксперимент: однократное подбрасывание игральной кости. Событие A – выпадение 2 очков, событие B – выпадение чётного числа очков. При наступлении события A наступает и событие B, т. е. $A \subset B$. ●

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называют *эквивалентными (равносильными, равными)*; пишут: $A = B$.

1.3. Операции над событиями

Суммой событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие A, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Записывают:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \text{ или } A = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Произведением событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие A, состоящее в появлении каждого из этих событий. Пишут:

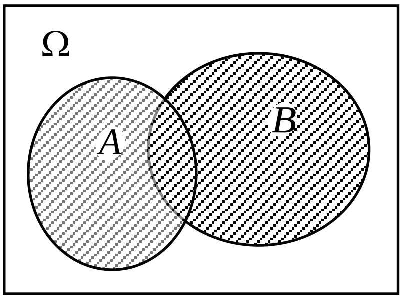
$$A = A_1 A_2 \ldots A_n \quad \text{или} \quad A = \prod_{i=1}^{n} A_i .$$

Разностью двух событий A и B называется событие C, состоящее в том, что событие A произошло, а событие B не произошло. Записывают:

$$C = A - B.$$

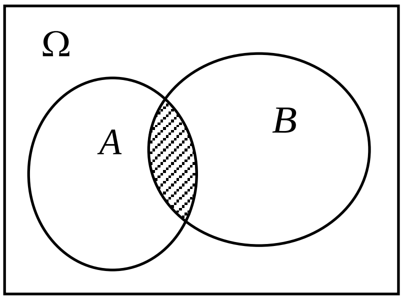
Противоположным событию A называется событие $\overline{A} = \Omega - A$, заключающееся в том, что событие A в данном эксперименте не произошло. Очевидно, что $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

На рисунках 2–5 с помощью диаграмм Эйлера – Венна представлены сумма, произведение и разность событий A и B, а также событие, противоположное событию A (соответствующие области заштрихованы).



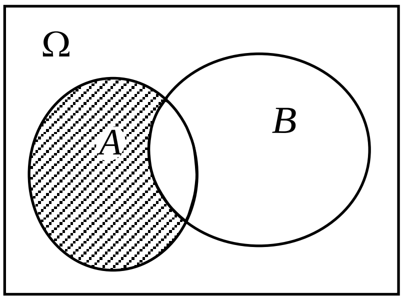
$A+B$

Рис. 2



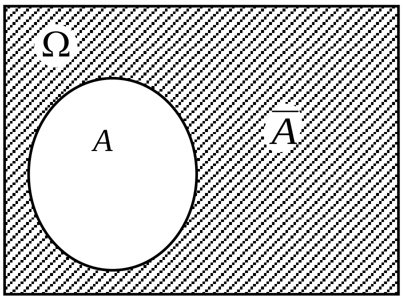
AB

Рис. 3



$A-B$

Рис. 4



$\overline{A}$

Рис. 5

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

$$A+B=B+A, \qquad AB=BA,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C), \qquad (AB)C=A(BC),$$
$$(A+B)C=AC+BC, \qquad AB+C=(A+C)(B+C),$$
$$A+A=A, \qquad AA=A,$$
$$A+\Omega=\Omega, \qquad A\Omega=A,$$
$$A+\varnothing=A, \qquad A\varnothing=\varnothing,$$
$$A+\overline{A}=\Omega, \qquad A\overline{A}=\varnothing,$$
$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A_i}, \qquad \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

Пример 1.4. Эксперимент: один раз подбрасывают игральную кость. В данном случае $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, где ω_i – элементарный исход, заключающийся в выпадении i очков. Рассмотрим следующие события:

A – выпадет чётное число очков, т. е. $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$;

B – выпадет число очков, большее 3, т. е. $B=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

Найдём $A+B$, AB, $A-B$ и $\overline{A}$:

$$A+B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}, \qquad AB=\{\omega_4,\omega_6\},$$
$$A-B=\{\omega_2\}, \qquad \overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}. \ \bullet$$

1.4. Вероятность события. Классическое определение вероятности

Вероятность события – это числовая характеристика степени возможности его появления в рассматриваемом опыте. Вероятность события A обозначается символом $P(A)$.

Рассмотрим так называемую *классическую вероятностную модель*, которая используется для описания опытов с конечным числом равновозможных элементарных исходов.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие.

Пусть пространство элементарных событий эксперимента состоит из конечного числа элементарных событий, причём все они равновозможны. Пусть A – произвольное событие, связанное с данным экспериментом. *Вероятность (классическая вероятность) события A* определяется формулой

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1.1}$$

где $|\Omega|$ – число всех элементарных событий, $|A|$ – число элементарных событий, благоприятствующих событию A.

Из определения (1.1) вытекают следующие свойства вероятности:

1. $0 \le P(A) \le 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\varnothing) = 0$;
4. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$;
5. Если A и B – несовместные события (т. е. $AB = \varnothing$), то
$$P(A+B) = P(A) + P(B);$$
6. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Пример 1.5. Из урны, содержащей 6 белых и 8 чёрных шаров (шары отличаются лишь цветом), наугад вынимают один шар. Какова вероятность события A, заключающегося в том, что вынутый шар будет белым?

Решение. Число всех элементарных событий в данном опыте совпадает с общим числом шаров в урне: $|\Omega| = 6 + 8 = 14$. Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно 6, т.е. $|A| = 6$. Таким образом, по формуле (1.1) имеем

$$P(A) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \bullet$$

1.5. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда пространство элементарных событий Ω не является конечным множеством.

Рассматривается случайный эксперимент с бесконечным числом равновозможных элементарных исходов. Допустим, что каждому элементарному исходу ставится в соответствие некоторая точка на прямой, плоскости или в пространстве, причём разным исходам соответствуют разные точки. Пусть Ω – множество всех таких точек. Таким образом, рассматриваемый эксперимент можно интерпретировать как случайный выбор точки $X \in \Omega$, а множество Ω – как пространство его элементарных исходов. Случайным событиям данного эксперимента соответствуют различные подмножества множества Ω, при этом подмножество A интерпретируется как случайное событие, заключающееся в том, что $X \in A$.

Будем предполагать, что и для самого множества Ω, и для всех рассматриваемых его подмножеств определена мера μ (длина, площадь, объём), причём предполагаем, что мера $\mu(\Omega)$ конечна.

Геометрической вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Пример 1.6. Два лица M и N условились встретиться в определённом месте между 10 и 11 часами утра, причём договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Примем 10 часов утра за начало отсчёта времени. Элементарное событие в нашей задаче – приход лиц M и N в условленное место в моменты времени x и y соответственно ($0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$). Представим его точкой с координатами (x, y) в декартовой системе координат на плоскости. Тогда пространство элементарных событий представится в виде квадрата

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

(см. рис. 6). Число элементарных событий бесконечно. Условие их равновозможности заключено в фразе «момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа». Таким образом, можно применить геометрическое определение вероятности.

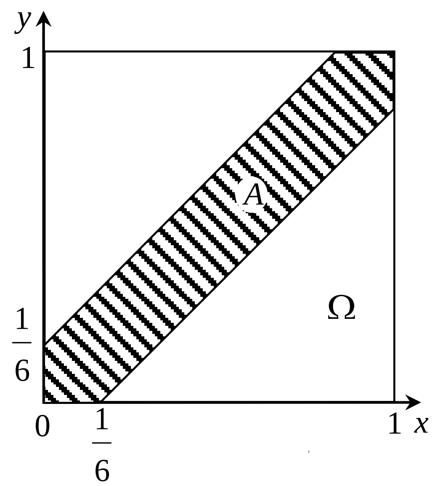


Рис. 6

Событие A (встреча состоится) произойдёт, если моменты прихода M и N отличаются по абсолютной величине не более чем на 10 минут, т.е. на $\frac{1}{6}$ часа. Поэтому событие A представимо в следующем виде:

$$A=\left\{(x,y)\in\Omega:\ |x-y|\le\frac{1}{6}\right\}=\left\{(x,y):\ x-\frac{1}{6}\le y\le x+\frac{1}{6}\right\}$$

(на рис. 6 эта область заштрихована). Площадь квадрата, представляющего пространство элементарных событий, $S(\Omega)=1$. Находим площадь области, представляющей событие A:

$$S(A)=1-2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}.$$

Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{11}{36}.\ \bullet$$

Геометрическая вероятность обладает всеми перечисленными в пункте 1.4 свойствами классической вероятности. Однако имеются также и отличия в свойствах этих вероятностей. Например, если классическая вероятность события равна нулю, то это событие невозможно, а для геометрической вероятности это, вообще говоря, не так: геометрическая вероятность любого элементарного исхода равна нулю.

1.6. Вероятность суммы событий

Как известно (см. пункты 1.4, 1.5), вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2}$$

Эта формула легко обобщается на случай n попарно несовместных событий $A_1,\ \ldots,\ A_n$:

$$P(A_1+\ldots+A_n)=P(A_1)+\ldots+P(A_n). \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. Для любых событий A и B имеет место формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.4}$$

Теорема 1.2. Для любых событий $A_1, A_2, \ldots,\ A_n$ имеет место формула

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+ \\ +\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n). \tag{1.5}$$

Пример 1.7. Правильная монета подбрасывается 2 раза. Найти вероятность события A, означающего появление герба хотя бы один раз.

Решение. Обозначим события: A_1 – появление герба при первом подбрасывании, A_2 – появление герба при втором подбрасывании. Ясно, что

$$A = A_1 + A_2.$$

Согласно классическому определению вероятности,

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_1A_2) = \frac{1}{4}.$$

Используя теорему 1.1, находим искомую вероятность:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \bullet$$

1.7. Условная вероятность. Вероятность произведения событий

Условной вероятностью $P(A|B)$ события *A* относительно события *B* называется вероятность события *A*, вычисленная в предположении, что событие *B* уже произошло.

В случае, если $P(B) \neq 0$, имеет место формула

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.6}$$

(ее можно легко получить, исходя, например, из классического определения вероятности).

Из формулы (1.6) следует равенство

$$P(AB) = P(B)P(A|B), \tag{1.7}$$

которое называют *формулой (теоремой) умножения вероятностей*.

Формула (1.7) обобщается на случай *n* событий:

Теорема 1.3. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_1A_2 \ldots A_{n-1}) \neq 0$. Тогда

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1A_2) \ldots P(A_n | A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Пример 1.8. В урне находится 5 белых, 4 синих и 3 чёрных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-й шар будет белым, 2-й – синим, 3-й – чёрным?

Решение. Введём обозначения событий: A_1 — первый вынутый шар – белый, A_2 — второй – синий, A_3 — третий – чёрный. Находим $P(A_1) = \frac{5}{12}$, $P(A_2 | A_1) = \frac{4}{11}$, $P(A_3 | A_1A_2) = \frac{3}{10}$. В силу теоремы 1.3

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1A_2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}. \bullet$$

1.8. Независимые события

События A и B, вероятности которых $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$, называются *независимыми*, если

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{и} \quad P(B \mid A) = P(B). \tag{1.8}$$

Замечание 1.1. Легко доказать, что если выполняется одно из равенств (1.8), то выполняется и другое.

Теорема 1.4. События A и B, имеющие ненулевую вероятность, являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.9}$$

С учётом этой теоремы можно дать также следующее определение независимости событий, распространяющееся и на события с нулевой вероятностью.

События A и B называются *независимыми*, если для них выполнено равенство (1.9).

События $A_1, \ldots, A_n$ называют *независимыми в совокупности* (или просто: *независимыми*), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и всевозможные произведения остальных.

Формула (1.9) распространяется на n событий, независимых в совокупности:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы.

Из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 1.9. Игральная кость подбрасывается два раза. Рассматриваются события: A – оба раза выпадет число очков, меньшее 4, B – оба раза выпадет число очков, кратное 3. Являются ли эти события независимыми?

Решение. Элементарное событие в нашей задаче представим упорядоченной парой чисел (i, j), где i и j – цифры, выпавшие соответственно при первом и втором подбрасываниях. Тогда пространство элементарных событий

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = \overline{1, 6}\}.$$

Число всех элементарных событий $|\Omega| = 36$. Очевидно, что все элементарные исходы являются равновозможными. Следовательно, для вычисления вероятностей событий можно применить классическое определение вероятности.

Представим события A, B и AB в виде множеств благоприятствующих им элементарных исходов:

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\},$$

$$B = \{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}, \quad AB = \{(3,3)\}.$$

Таким образом,

$$|A| = 9, \quad |B| = 4, \quad |AB| = 1.$$

По формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(AB) = \frac{|AB|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

Проверяем независимость событий A и B:

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(AB).$$

Следовательно, события A и B независимы. ●

1.9. Формула полной вероятности. Формула Байеса (формула гипотез)

Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующие полную группу, называются *гипотезами*.

Теорема 1.5. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда для любого события A имеет место формула

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i),$$

называемая *формулой полной вероятности*.

Пример 1.10. В первой коробке содержится 20 ламп, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённая из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Введём обозначения событий: A – из первой коробки извлечена стандартная лампа, H_1 – лампа, переложенная из второй коробки в первую, была стандартной, H_2 – эта лампа была нестандартной. Тогда

$$P(H_1) = \frac{9}{10}, \quad P(H_2) = \frac{1}{10}, \quad P(A \mid H_1) = \frac{19}{21}, \quad P(A \mid H_2) = \frac{18}{21}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9. \bullet$$

Теорема 1.6. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Тогда условная вероятность события H_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ при условии, что в результате эксперимента произошло событие A, может быть вычислена по формуле

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Эта формула называется *формулой Байеса* (*формулой гипотез*).

Пример 1.11. В условиях примера 1.10 лампа, извлечённая наудачу из первой коробки после того, как в неё переложили лампу из второй, оказалась стандартной. Какова вероятность того, что из второй коробки в первую переложили нестандартную лампу?

Решение. Определим вероятность события (гипотезы) H_2 при условии, что событие A (извлечённая из первой коробки лампа стандартна) уже произошло:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21}}{0{,}9} = \frac{2}{21}. \bullet$$

1.10. Схема Бернулли. Формула Бернулли

Пусть проводится серия n испытаний, в каждом из которых может произойти (успех) или не произойти (неудача) некоторое событие A. При этом предполагается, что вероятность наступления события A в каждом отдельном испытании не зависит от исходов других испытаний и равна одному и тому же числу p $(0 < p < 1)$. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*.

Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях, проведённых по схеме Бернулли, событие A произойдёт ровно k раз $(0 \le k \le n)$, находится по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q = 1 - p). \tag{1.10}$$

Пример 1.12. Правильная монета подбрасывается 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 3 раза.

Решение. Здесь $n = 10$, $k = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. По формуле Бернулли находим искомую вероятность:

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}. \bullet$$

Наивероятнейшее число k_0 наступлений события A в серии из n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, определяется из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p. \qquad (1.11)$$

Пример 1.13. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстродвижущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. Здесь $n = 50$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$. В силу неравенства (1.11)

$$50 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 50 \cdot 0{,}9 + 0{,}9, \text{ т. е. } 44{,}9 \le k_0 \le 45{,}9.$$

Следовательно, $k_0 = 45$. ●

1.11. Приближенные формулы в схеме Бернулли

Использование формулы Бернулли (1.10) при больших значениях n затруднительно в вычислительном плане. В этом случае возникает необходимость в применении приближённых формул для вычисления вероятности $P_n(k)$.

Формула Пуассона. Приближённая *формула Пуассона* имеет вид

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Эта формула применяется, когда вероятность успеха p мала, число испытаний n достаточно велико, но при этом значение произведения $np = \lambda$ незначительно. Обычно ее рекомендуют использовать при $p \le 0{,}1$, $n \ge 100$ и $np \le 10$.

Пример 1.14. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. Так как $n = 500$, $p = 0{,}002$, то $\lambda = 500 \cdot 0{,}002 = 1$. По формуле Пуассона находим

$$P_{500}(3) = \frac{1}{3!} e^{-1} \approx 0{,}06. \text{ ●}$$

Локальная формула Муавра – Лапласа. Если вероятности успеха p и неудачи q не очень малы, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ может быть вычислена приближённо по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.12)$$

где

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (функция Гаусса)}.$$

Для вычисления значений функции $\varphi(x)$ используется специальная таблица.

Формула (1.12) называется *локальной формулой Муавра – Лапласа*. На практике ее обычно используют при $n \geq 100,\ \ p \geq 0{,}1,\ \ q \geq 0{,}1$.

Пример 1.15. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна $0{,}7$. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Решение. Здесь $n = 200$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $k = 160$. Применим формулу (1.12). Вычисляем:

$$\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}=\sqrt{42}\approx 6{,}48,\quad \frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{160-200\cdot 0{,}7}{\sqrt{42}}\approx\frac{20}{6{,}48}\approx 3{,}09.$$

По таблице находим $\varphi(3{,}09) \approx 0{,}0034$. Следовательно,

$$P_{200}(160)\approx\frac{1}{6{,}48}\cdot 0{,}0034\approx 0{,}0005. \bullet$$

Интегральная формула Муавра – Лапласа. Пусть $P_n(k_1, k_2)$ – вероятность того, что в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз. При достаточно большом числе испытаний n и не слишком малых вероятностях p и q для нахождения приближенного значения вероятности $P_n(k_1, k_2)$ используют формулу

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi_0\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.13)$$

где

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ (нормированная функция Лапласа)}. \qquad (1.14)$$

Формула (1.13) называется *интегральной формулой Муавра – Лапласа.*

При нахождении значений функции $\Phi_0(x)$ пользуются специальной таблицей. Отметим некоторые важные свойства этой функции:

1. $\Phi_0(x)$ – нечётная функция, т. е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$;
2. $\Phi_0(x)$ монотонно возрастает;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi_0(x)=0{,}5$.

Так же как и локальная формула (1.12), интегральная формула Муавра – Лапласа даёт, как правило, приемлемую для практики погрешность при $n \geq 100,\ \ p \geq 0{,}1,\ \ q \geq 0{,}1$.

Пример 1.16. Вероятность получения с конвейера изделия высшего сорта равна $0{,}9$. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 520 до 535 изделий (включительно) будут изделиями высшего сорта.

Решение. Здесь $n = 600$, $k_1 = 520$, $k_2 = 535$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Искомую вероятность вычислим по формуле (1.13). Имеем:

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 600 \cdot 0{,}9}{\sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -\frac{20}{\sqrt{54}} \approx -2{,}72,$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{535 - 600 \cdot 0{,}9}{\sqrt{600 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -\frac{5}{\sqrt{54}} \approx -0{,}68.$$

Пользуясь таблицей значений функции $\Phi_0(x)$, находим

$$\Phi_0(-2{,}72) = -\Phi_0(2{,}72) \approx -0{,}4967, \qquad \Phi_0(-0{,}68) = -\Phi_0(0{,}68) \approx -0{,}2517.$$

Следовательно,

$$P_{600}(520, 535) \approx -0{,}2517 + 0{,}4967 = 0{,}2450. \bullet$$

Часть II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Понятия случайной величины и ее закона распределения. Виды случайных величин

Переменная величина, которая в зависимости от случайного исхода опыта принимает то или иное числовое значение, называется *случайной величиной* (сокращенно: с.в.).

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами (при необходимости с индексами): X, Y, Z_n, …, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами: $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$.

Под *законом распределения* (или просто *распределением*) *случайной величины* понимается любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности любых событий, связанных с этой с.в. (например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадёт в какой-то интервал числовой оси).

Различают два основных вида случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

Дискретной случайной величиной называют с.в., множество всех возможных значений которой состоит из отдельных, изолированных друг от друга точек на числовой прямой. Очевидно, что это множество является конечным или счетным (т. е. его элементы могут быть занумерованы натуральными числами).

Примеры дискретных случайных величин: с.в. X – сумма выпавших очков при подбрасывании двух игральных костей; с.в. Y – количество бракованных деталей в партии.

Непрерывной случайной величиной называют с.в., которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. (Более строгое определение непрерывной с.в. будет дано ниже.)

Примеры непрерывных случайных величин: с.в. Z – время безотказной работы некоторой аппаратуры (в часах); с.в. V – масса случайно выбранной детали (в граммах).

2.2. Закон распределения дискретной случайной величины. Основные дискретные распределения

Закон распределения дискретной с.в. X можно установить заданием соответствия между ее возможными значениями x_i $(i=1, 2, \ldots)$ и их вероятностями $p_i = P(X = x_i)$. Сделать это можно с помощью таблицы, формулы или графика. При табличном задании закона распределения первая строка содержит возможные значения с.в., а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Такую таблицу обычно называют *рядом распределения*. Так как события $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ несовместны и образуют полную группу, то $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример 2.1. В урне находится 4 белых и 6 чёрных шаров. Случайным образом из неё извлекается 3 шара. С.в. X – количество белых шаров среди трёх вынутых. Построить ряд распределения этой с.в.

Решение. С.в. X может принимать следующие значения: $0, 1, 2, 3$. Найдём вероятности этих значений, используя классическое определение вероятности:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1\cdot 20}{120} = \frac{1}{6}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4\cdot 15}{120} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6\cdot 6}{120} = \frac{3}{10}, \quad P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4\cdot 1}{120} = \frac{1}{30}.$$

Записываем ряд распределения с.в. X:

X	0	1	2	3
P	1/6	1/2	3/10	1/30

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1$.) ●

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся на практике законы распределений дискретных случайных величин.

Биномиальное распределение. Дискретная с.в. X имеет *биномиальное распределение* (*распределена по биномиальному закону*), если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Как видим, вероятности p_k находятся по формуле Бернулли (1.10). Поэтому с.в. X, распределённую по биномиальному закону, можно рассматривать как число успехов в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли; при этом p – вероятность успеха в каждом из испытаний.

Распределение Пуассона. Дискретная с.в. X имеет *распределение Пуассона* (*распределена по закону Пуассона*), если она принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $np = \lambda$ – постоянная величина.

Геометрическое распределение. Дискретная с.в. X имеет *геометрическое распределение*, если она принимает значения $k = 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(X = k) = pq^{k-1},$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$.

Геометрическое распределение также связано со схемой Бернулли: это распределение имеет с.в. X, равная числу испытаний, проведённых до первого успеха (p – вероятность успеха в каждом из испытаний).

2.3. Функция распределения случайной величины

Функцией распределения с.в. X называется функция $F(x)$, которая для любого $x \in \mathbf{R}$ равна вероятности события $X < x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$;
2. $F(x)$ – неубывающая функция на **R**;
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
4. $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
5. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

Для дискретной случайной величины X, возможными значениями которой являются $x_1, x_2, \ldots$, значение ее функции распределения в каждой точке x определяется равенством

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i \tag{2.1}$$

(суммирование ведется по всем i, для которых $x_i < x$).

Пример 2.2. Найти функцию распределения с.в. X из примера 2.1.

Решение. Используя построенный в примере 2.1 ряд распределения с.в. X и формулу (2.1), находим:

1) если $x \le 0$, то $F(x) = 0$;

2) если $0 < x \le 1$, то $F(x) = \dfrac{1}{6}$;

3) если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$;

4) если $2 < x \le 3$, то $F(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{29}{30}$;

5) если $x > 3$, то $F(x) = \dfrac{29}{30} + \dfrac{1}{30} = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 1/6 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 2/3 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 29/30 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases} \quad \bullet$$

2.4. Непрерывные случайные величины. Основные непрерывные распределения

В пункте 2.1 было дано понятие непрерывной с.в. Приведём теперь более строгое определение.

С.в. X называется *непрерывной*, если существует такая неотрицательная, интегрируемая по Риману на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $p(x)$, что при всех $x \in \mathbf{R}$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt,$$

где $F(x)$ – функция распределения с.в. X. Функция $p(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (*плотностью распределения* или просто *плотностью*) случайной величины X.

Функция распределения непрерывной с.в. непрерывна на всей числовой оси.

Плотность распределения вероятностей непрерывной с.в. обладает следующими свойствами:

1. $p(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ (условие нормировки);
3. $F'(x) = p(x)$ в точках непрерывности функции $p(x)$;
4. $P(a \leq X < b) = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$ при $a < b$.

Теорема 2.1. Если X – непрерывная с.в., то для любого $x_0 \in \mathbf{R}$

$$P(X = x_0) = 0.$$

Следствие. Для непрерывной с.в. X справедливы равенства

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b).$$

Замечание 2.1. Функцию распределения $F(x)$ непрерывной с.в. называют также *интегральным законом распределения*, а плотность $p(x)$ – *дифференциальным законом распределения* этой с.в.

Рассмотрим основные распределения непрерывных случайных величин.

Равномерное распределение. Непрерывная с.в. X имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$, если её плотность распределения задана формулой

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Находим функцию распределения с.в. X, распределённой по равномерному закону:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графики плотности $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ изображены на рис. 7.

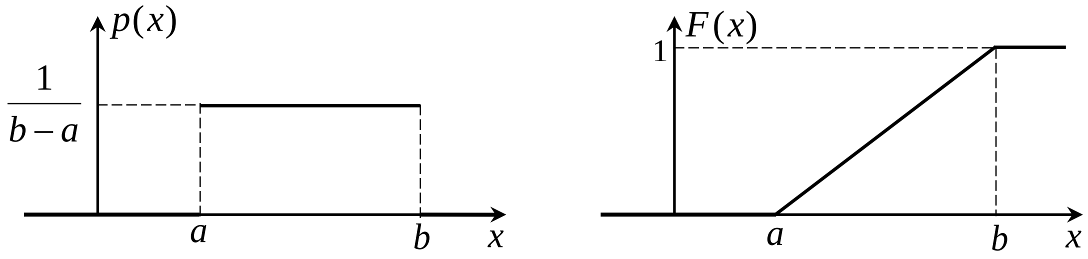


Рис. 7

Показательное распределение. Непрерывная с.в. X имеет *показательное* (*экспоненциальное*) распределение, если её плотность имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Для функции распределения с.в. X, распределённой по показательному закону, нетрудно получить следующее выражение:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

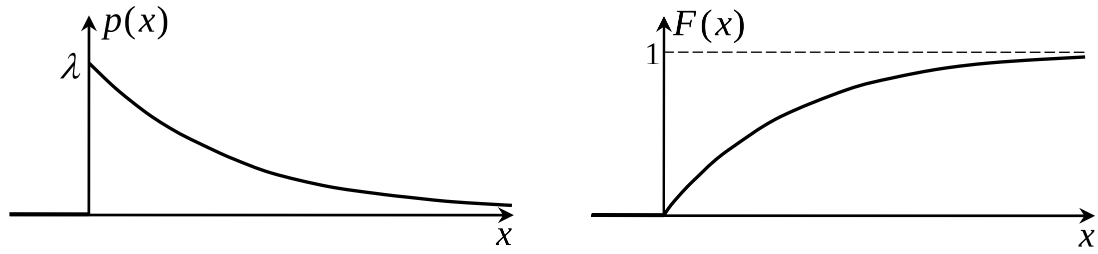


Рис. 8

Графики плотности $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ для показательного распределения изображены на рис. 8.

Нормальное распределение. Непрерывная с.в. X имеет *нормальное* распределение с параметрами $m \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$, если её плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Функция распределения с.в. X, распределённой по нормальному закону, выражается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ \ (\textit{функция Лапласа}).$$

Замечание 2.2. Функция Лапласа $\Phi(x)$ связана с нормированной функцией Лапласа $\Phi_0(x)$ (п. 1.11, формула (1.14)) равенством

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0{,}5.$$

Графики плотности и функции распределения для нормального распределения изображены на рис. 9.

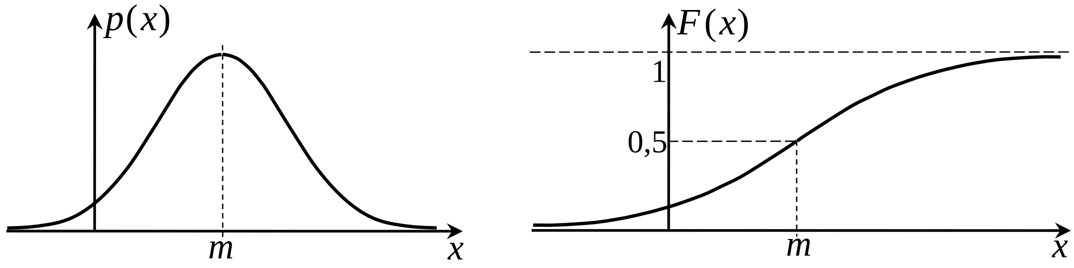


Рис. 9

Вероятность попадания с.в. X, распределённой по нормальному закону, в интервал (a, b) находится по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{2.2}$$

Пример 2.3. Вычислить вероятность попадания с.в. X, распределённой по нормальному закону с параметрами m и σ, в интервал $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$.

Решение. Полагая в формуле (2.2) $a = m - 3\sigma,\ b = m + 3\sigma$, получаем

$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = \Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3)$$

(здесь была учтена нечётность функции $\Phi_0(x)$). По таблице значений функции $\Phi_0(x)$ находим: $\Phi_0(3) = 0{,}49865$. Следовательно,

$$P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = 0{,}9973.$$

Таким образом, практически достоверно, что с.в. X принимает свои значения в промежутке $(m-3\sigma,\ m+3\sigma)$. Полученный результат называется «правилом трёх σ». ●

2.5. Понятие многомерной случайной величины. Дискретная двумерная случайная величина и ее закон распределения

Пусть в некотором эксперименте одновременно наблюдается n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогда их упорядоченный набор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *n-мерной (многомерной) случайной величиной* или *n-мерным случайным вектором*.

Одномерные случайные величины X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются *компонентами (составляющими)* n-мерной с.в. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Рассмотрим двумерную с.в. (X, Y), компонентами которой являются дискретные случайные величины X и Y. Такая случайная величина называется *дискретной двумерной случайной величиной*. Пусть с.в. X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots$, а с.в. Y – только значения $y_1, y_2, \ldots$. Тогда множество возможных значений двумерной с.в. (X, Y) составляют пары значений (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$.

Перечень всех возможных пар значений (x_i, y_j) и соответствующих этим парам вероятностей

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

называется *законом распределения дискретной двумерной с.в.* (X, Y).

Если множества возможных значений случайных величин X и Y конечны, то распределение дискретной двумерной с.в. (X, Y) можно задать в виде *таблицы совместного распределения*:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	…	p_{nm}

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Одномерные законы распределения отдельных компонент выражаются через вероятности совместных значений по формулам

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Пример 2.4. Распределение вероятностей дискретной двумерной с.в. (X, Y) задано таблицей

X \ Y	2	4	6
–1	0,08	0,12	0,20
1	0,12	0,18	0,30

Найти одномерные законы распределения компонент X и Y.

Решение. Суммируя вероятности в таблице совместного распределения сначала по строкам, а затем по столбцам, получаем законы распределения случайных величин X и Y:

X	–1	1
P	0,4	0,6

Y	2	4	6
P	0,2	0,3	0,5

(Контроль: $0{,}4+0{,}6=1$; $0{,}2+0{,}3+0{,}5=1$.) ●

2.6. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства

Функцией распределения двумерной с.в. (X, Y) называется функция $F(x,y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности произведения событий $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрически функция распределения $F(x,y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке $M(x,y)$, лежащий левее и ниже её (заштрихованная область на рисунке 10).

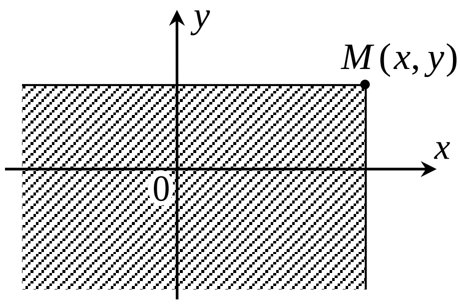


Рис. 10

Функция распределения $F(x,y)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$ в любой точке $(x,y) \in \mathbf{R}^2$;
2. $F(x,y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$;

4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y)=1;$

5. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)=F_X(x), \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=F_Y(y),$

где $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y, т. е. $F_X(x)=P(X<x)$, $F_Y(y)=P(Y<y)$;

6. $F(x,y)$ непрерывна слева в любой точке $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ по каждому из аргументов x и y.

Чтобы найти значение функции распределения дискретной двумерной с.в. (X,Y) в произвольной точке $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, нужно просуммировать вероятности p_{ij} по всем значениям i и j, для которых $x_i<x, y_j<y$:

$$F(x,y)=\sum_{\substack{i:x_i<x \\ j:y_j<y}} p_{ij}. \tag{2.3}$$

Пример 2.5. Найти функцию распределения дискретной двумерной с.в. (X,Y) из примера 2.4.

Решение. Поскольку $x_1=-1$ – наименьшее возможное значение с.в. X, то при $x\le-1$ событие $X<x$ невозможно. Аналогично устанавливаем, что при $y\le 2$ невозможным является событие $Y<y$. Следовательно, $F(x,y)=0$ при $x\le-1$ или $y\le 2$. Далее, используя формулу (2.3), находим:

1) если $-1<x\le1$, $2<y\le4$, то $F(x,y)=0{,}08$;

2) если $-1<x\le1$, $4<y\le6$, то $F(x,y)=0{,}08+0{,}12=0{,}2$;

3) если $-1<x\le1$, $y>6$, то $F(x,y)=0{,}2+0{,}20=0{,}4$;

4) если $x>1$, $2<y\le4$, то $F(x,y)=0{,}08+0{,}12=0{,}2$;

5) если $x>1$, $4<y\le6$, то $F(x,y)=0{,}2+0{,}12+0{,}18=0{,}5$;

6) если $x>1$, $y>6$, то $F(x,y)=0{,}5+0{,}20+0{,}30=1$.

Функцию распределения $F(x,y)$ удобно представить в виде следующей таблицы:

$x \backslash y$	$y\le2$	$2<y\le4$	$4<y\le6$	$y>6$
$x\le-1$	0	0	0	0
$-1<x\le1$	0	0,08	0,2	0,4
$x>1$	0	0,2	0,5	1

●

2.7. Непрерывные двумерные случайные величины

Двумерная случайная величина (X,Y) называется *непрерывной*, если её функция распределения $F(x,y)$ непрерывна в $\mathbf{R}^2$ и существует такая неотрицательная интегрируемая по Риману в бесконечных пределах по каждой из переменных функция $p(x,y)$, что

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} p(s,t)dt.$$

Функция $p(x,y)$ называется *плотностью распределения* (или *совместной плотностью*) двумерной с.в. (X,Y).

Плотность $p(x,y)$ обладает следующими свойствами:

1. $p(x,y) \geq 0$ при всех $(x,y) \in \mathbf{R}^2$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,t)dt = 1$;
3. $p(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, если $(x,\ y)$ – точка непрерывности функции $p(x,y)$;
4. $P((X,Y) \in G) = \iint\limits_G p(x,y)dxdy$, G – область в $\mathbf{R}^2$.

Компоненты непрерывной двумерной с.в. (X,Y) являются непрерывными случайными величинами, плотности которых выражаются через совместную плотность $p(x,y)$ следующим образом:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy, \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx.$$

Пример 2.6. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид

$$p(x,y) = \begin{cases} axy & \text{при } (x,y) \in D, \\ 0 & \text{при } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$. Найти:

а) постоянную a;

б) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область $G = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

в) одномерные плотности распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ случайных величин X и Y соответственно.

Решение. а) Область D представляет собой треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$ и $y=2-x$ (см. рис. 11). Постоянную a найдём из условия

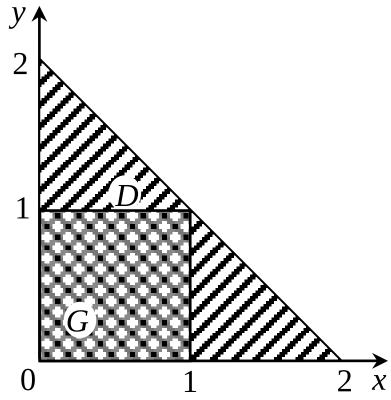


Рис. 11

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} axy\,dy = \frac{a}{2}\int_0^2 xy^2\Big|_0^{2-x} dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^2 x(2-x)^2\,dx = \frac{a}{2}\int_0^2 (4x-4x^2+x^3)\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}a.$$

Таким образом, должно выполняться равенство $\frac{2}{3}a = 1$, откуда находим $a = 3/2$.

б) Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область G найдем по формуле

$$P((X,Y)\in G) = \iint_G p(x,y)\,dx\,dy.$$

В нашем случае область G – квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$ и $y=1$ (на рис. 11 имеет двойную штриховку). Очевидно, $G\subset D$, и поэтому $p(x,y)=\frac{3}{2}xy$ при $(x,y)\in G$. Таким образом,

$$P((X,Y)\in G) = \iint_G \frac{3}{2}xy\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 xy\,dy = \frac{3}{4}\int_0^1 xy^2\Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 x\,dx = \frac{3}{8}x^2\Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

в) Найдем одномерную плотность $p_X(x)$ случайной величины X по формуле

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy.$$

Заметим, что в нашей задаче совместная плотность $p(x,y)=0$ при $x\notin[0,2]$ и $y\in\mathbf{R}$. Поэтому $p_X(x)=0$ при $x\notin[0,2]$. При $x\in[0,2]$ имеем:

$$p_X(x) = \int_0^{2-x} \frac{3}{2}xy\,dy = \frac{3}{4}xy^2\Big|_0^{2-x} = \frac{3}{4}x(2-x)^2.$$

Таким образом,

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x(x-2)^2 & \text{при } x\in[0,2],\\ 0 & \text{при } x\notin[0,2].\end{cases}$$

Аналогично рассуждая, найдём одномерную плотность $p_Y(y)$ случайной величины Y:

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}y(y-2)^2 & \text{при } y\in[0,2],\\ 0 & \text{при } y\notin[0,2].\end{cases}\quad\bullet$$

2.8. Независимые случайные величины

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми* (по-другому: *независимыми в совокупности, взаимно независимыми*), если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ являются независимыми в совокупности события $X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n$ (см. п. 1.8).

Теорема 2.2. Для независимости случайных величин X и Y необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in \mathbf{R}$ выполнялось равенство

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

где $F(x,y)$ – функция распределения двумерной с.в. (X,Y), $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно.

Теорема 2.3. Дискретные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых $x,\ y \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$P(X=x, Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y).$$

Теорема 2.4. Непрерывные случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда двумерная с.в. (X,Y) непрерывна и для любых $x,\ y \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y),$$

где $p(x,y)$ – плотность распределения двумерной с.в. (X,Y), $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ – плотности случайных величин X и Y соответственно.

Используя теоремы 2.3 и 2.4, можно легко установить, что случайные величины X и Y из примера 2.4 являются независимыми, а компоненты непрерывной двумерной с.в. (X,Y) из примера 2.6 зависимы.

2.9. Функции случайных величин. Закон распределения функции одной случайной величины

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – случайные величины, связанные с некоторым опытом, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ – действительнозначная функция n действительных переменных, область определения которой содержит все возможные значения n-мерной с.в. $(X_1, \ldots, X_n)$. Тогда можно определить с.в. Y, которая принимает свои значения в зависимости от того, какие значения принимают случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, а именно: если в результате опыта случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ приняли значения $x_1, \ldots, x_n$, то с.в. Y принимает значение $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. При этом Y называют *функцией случайных величин* $X_1, \ldots, X_n$ и записывают: $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$.

Рассмотрим вопрос о том, как найти закон распределения функции $Y = f(X)$, если известен закон распределения аргумента X.

1. Пусть X – дискретная с.в., принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Множество возможных значений с.в. Y образуют все различные числа среди чисел $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Пусть y_j – одно из возможных значений с.в. Y. Событие $Y = y_j$ эквивалентно сумме тех событий $X = x_i$, для которых $f(x_i) = y_j$. Поскольку все слагаемые в этой сумме – попарно несовместные события, то

$$P(Y = y_j) = \sum_{i: f(x_i) = y_j} P(X = x_i) = \sum_{i: f(x_i) = y_j} p_i$$

(суммирование ведётся по всем i, для которых $f(x_i) = y_j$).

2. Пусть X – непрерывная с.в. с плотностью распределения $p_X(x)$. Найдем функцию распределения с.в. Y.

Согласно определению $F_Y(y)$, для любого $y \in \mathbf{R}$ имеем

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(f(X) < y).$$

Пусть G_y – множество всех точек оси Ox, для которых $f(x) < y$. Тогда события $f(X) < y$ и $X \in G_y$ эквивалентны, и следовательно,

$$F_Y(y) = P(X \in G_y).$$

Если $G_y = \varnothing$, то $F_Y(y) = 0$. В противном случае G_y представляет собой, как правило, промежуток или объединение некоторого количества попарно непересекающихся промежутков. Пусть $G_y = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$, где Δ_i– промежуток оси Ox с концами в точках a_i и b_i $(a_i < b_i)$, причём $\Delta_i \bigcap \Delta_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Тогда событие $X \in G_y$ эквивалентно сумме событий $X \in \Delta_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Так как все слагаемые в этой сумме – попарно несовместные события, то

$$P(X \in G_y) = \sum_{i=1}^{m} P(X \in \Delta_i).$$

Поскольку

$$P(X \in \Delta_i) = \int_{a_i}^{b_i} p_X(x) dx$$

(см. п. 2.4), то

$$F_Y(y) = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i}^{b_i} p_X(x)dx.$$

Подчеркнем, что количество интервалов Δ_i и их расположение на оси Ox зависит от y.

Пример 2.7. С.в. X распределена равномерно на отрезке $[0;3]$. Найти плотность распределения с.в. $Y = X^2$.

Решение. Найдём сначала функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y. По определению

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y).$$

Решаем неравенство $x^2 < y$ относительно x. Если $y \le 0$, то это неравенство решений не имеет; если $y > 0$, то его решением является интервал $(-\sqrt{y}, \sqrt{y})$. Следовательно, $F_Y(y) = 0$ при $y \le 0$, а при $y > 0$

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p_X(x)dx,$$

где $p_X(x)$ – плотность с.в. X. Согласно условию (см. также п. 2.4),

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{при } x \in [0,3], \\ 0 & \text{при } x \notin [0,3]. \end{cases}$$

Поэтому при $0 < y \le 9$

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p_X(x)dx = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{3}dx = \sqrt{y}/3,$$

а при $y > 9$

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p_X(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}dx = 1.$$

Таким образом,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \le 0, \\ \sqrt{y}/3 & \text{при } 0 < y \le 9, \\ 1 & \text{при } y > 9. \end{cases}$$

Находим плотность с.в. Y:

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt{y}} & \text{при } 0 < y \le 9, \\ 0 & \text{при } y \le 0 \text{ или } y > 9. \end{cases} \quad \bullet$$

2.10. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание. *Математическим ожиданием дискретной с.в. X*, имеющей закон распределения $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$, называется число $M(X)$, определяемое формулой

$$M(X) = \sum_i x_i p_i.$$

Математическим ожиданием непрерывной с.в. X с плотностью распределения вероятностей $p(x)$ называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $M(C) = C$, если C – константа (дискретная с.в., принимающая значение C с вероятностью 1);
2. $M(kX) = kM(X)$, если k – константа;
3. $M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$;
4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$ для независимых в совокупности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$;
5. Если $X \geq 0$ (т. е. с.в. X принимает только неотрицательные значения), то $M(X) \geq 0$.

Теорема 2.5. Пусть $f(X)$ – функция с.в. X. Тогда

$$M(f(X)) = \begin{cases} \sum_i f(x_i) p_i, & \text{если с.в. } X \text{ дискретная,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx, & \text{если с.в. } X \text{ непрерывная,} \end{cases}$$

где x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ – возможные значения дискретной с.в. X, p_i – вероятности этих значений; $p(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной с.в. X.

Дисперсия. *Дисперсией* с.в. X называется число $D(X)$, определяемое формулой

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] =$$

$$= \begin{cases} \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i, & \text{если с.в. } X \text{ дискретная,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 p(x) dx, & \text{если с.в. } X \text{ непрерывная.} \end{cases}$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(X) \geq 0$;
2. $D(C) = 0$, если C – константа;

3. $D(kX) = k^2 D(X)$, если k – константа;

4. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$ для независимых в совокупности случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$;

5. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ для независимых случайных величин X и Y;

6. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Среднее квадратическое отклонение. *Средним квадратическим отклонением* с.в. X называется число

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 2.8. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной с.в. X из примера 2.1.

Решение. Используя построенный в примере 2.1 ряд распределения с.в. X, находим

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = 1{,}2,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - M^2(X) =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} - (1{,}2)^2 = 0{,}56$$

(при нахождении $M(X^2)$ применили формулу из теоремы 2.5),

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}748. \ \bullet$$

Пример 2.9. С.в. X имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda = 3$. Найти математическое ожидание и дисперсию с.в. $Y = e^X$.

Решение. Согласно условию, плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$p_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 2.5

$$M(Y) = M(e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x p_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^x 3e^{-3x} dx = 1{,}5.$$

Вычисляем дисперсию

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} p_X(x)\,dx - (1{,}5)^2 =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{2x} 3e^{-3x} dx - 2{,}25 = 3 - 2{,}25 = 0{,}75. \ \bullet$$

Приведём выражения для математических ожиданий и дисперсий основных распределений, рассмотренных нами в пунктах 2.2 и 2.4.

Распределение с.в. X	$M(X)$	$D(X)$
Биномиальное	np	npq
Пуассона	λ	λ
Геометрическое	$1/p$	q/p^2
Равномерное	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Показательное	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Нормальное	m	σ^2

Часть III. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Неравенства Маркова и Чебышёва. Теоремы Чебышёва и Бернулли

Теорема 3.1 (неравенство Маркова). Пусть X – неотрицательная с.в., имеющая математическое ожидание $M(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Неравенство Маркова можно записать в другой форме:

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Пример 3.1. Суточный расход воды в типовом девятиэтажном доме составляет в среднем 1200 м^3. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды в доме будет меньше 3000 м^3.

Решение. Пусть с.в. X – суточный расход воды в доме (в м^3). Это неотрицательная с.в. По условию $M(X) = 1200.$ Применяя неравенство Маркова с $\varepsilon = 3000,$ получаем

$$P(X < 3000) \geq 1 - \frac{1200}{3000} = 0{,}6,$$

т. е. вероятность интересующего нас события не менее 0,6. ●

Теорема 3.2 (неравенство Чебышёва). Пусть X – с.в., имеющая математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{3.1}$$

Другая форма неравенства Чебышёва:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 3.3 (теорема Чебышёва). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, обладающих математическими ожиданиями $M(X_i)$ и дисперсиями $D(X_i)$, причём существует такая константа $C > 0$, что $D(X_i) \leq C$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Следствие. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $M(X_i) = m$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{3.2}$$

Утверждение теоремы 3.3 устанавливается предельным переходом при $n \to \infty$ в неравенстве

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}, \tag{3.3}$$

которое, в свою очередь, получается в результате применения неравенства (3.1) к с.в.

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

В задачах с большим числом случайных величин, дисперсии которых ограничены сверху одной и той же константой *C*, кроме неравенства (3.3) используют также неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \tag{3.4}$$

получаемое из (3.3) переходом к противоположному событию.

Пример 3.2. Среднее квадратическое отклонение каждой из 2500 независимых случайных величин не превосходит 3. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет меньше, чем 0,3.

Решение. Поскольку $D(X_i) = \sigma^2(X_i) \leq 9$ для каждого *i*, то можно воспользоваться неравенством (3.4), полагая в нем $C = 9$, $n = 2500$, $\varepsilon = 0{,}3$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<0{,}3\right)\geq 1-\frac{9}{2500\cdot 0{,}09}=0{,}96.$$

Итак, вероятность рассматриваемого события не менее 0,96. ●

Последовательность случайных величин $Y_1,\ Y_2,\ \ldots$ называется *сходящейся по вероятности* к числу b, если для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|Y_n-b\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

(или $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|Y_n-b\right|<\varepsilon\right)=1$); символическая запись:

$$Y_n\xrightarrow{P}b.$$

Таким образом, заключение следствия теоремы 3.3 можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}m.$$

Теорема 3.4 (теорема Я. Бернулли). Пусть k – число наступлений события A в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли. Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0,$$

где p – вероятность появления события A в каждом из испытаний.

3.2. Центральная предельная теорема

Теорема 3.5. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих математическое ожидание $M(X_i)=m$ и дисперсию $D(X_i)=\sigma^2>0$, $i=1,\ 2,\ \ldots$. Тогда для любого $x\in\mathbf{R}$

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-nm}{\sqrt{n\sigma^2}}<x\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (3.5)$$

Замечание 3.2. Функция Лапласа $\Phi(x)$ является функцией распределения с.в. X, распределенной нормально с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$. Поэтому соотношение (3.5) означает, что при $n\to\infty$ закон распределения с.в.

$$Z_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

неограниченно приближается к нормальному закону распределения с параметрами 0 и 1.

С учётом этого замечания теорема 3.5 позволяет использовать для вычисления вероятности события $a < Z_n < b$ при больших n следующую приближённую формулу:

$$P(a < Z_n < b) \approx \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a).$$

Отсюда вытекает, что

$$P(\alpha < \sum_{i=1}^{n} X_i < \beta) = P\left(\frac{\alpha - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < Z_n < \frac{\beta - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{\beta - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}\right). \quad (3.6)$$

Пример 3.3. Случайная величина *Y* является суммой 3200 независимых одинаково распределённых случайных величин: $Y = \sum_{i=1}^{3200} X_i$, причём $M(X_i) = 3$, $D(X_i) = 2$, $i = \overline{1, 3200}$. Найти вероятность того, что случайная величина *Y* попадёт в интервал $(9360; 9840)$.

Решение. Используя приближённую формулу (3.6), находим

$$P(9360 < Y < 9840) \approx \Phi\left(\frac{9840 - 3200 \cdot 3}{\sqrt{3200 \cdot 2}}\right) - \Phi\left(\frac{9360 - 3200 \cdot 3}{\sqrt{3200 \cdot 2}}\right) =$$

$$= \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3) \approx 0{,}9973. \; \bullet$$

Часть IV. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4.1. Выборка. Статистическое распределение выборки и ее графическое представление

Будем предполагать, что каждый исход некоторого случайного эксперимента характеризуется одним из возможных значений с.в. *X*. Повторив n раз эксперимент в одинаковых условиях, получим последовательность из n наблюдённых значений этой с.в.: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *выборкой*.

Числа x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются *элементами выборки*, а их количество n – *объёмом выборки*.

Выборку можно упорядочить, расположив её элементы в неубывающем порядке:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}.$$

Полученная таким образом последовательность чисел

$$x_{(1)},\ x_{(2)},\ \ldots,\ x_{(n)}$$

называется *вариационным рядом.*

Различные значения с.в. X, представленные в выборке, называются *вариантами*.

Если в выборке объема n варианта x_i встретилась n_i раз, то число n_i называется *частотой*, а число $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ – *относительной частотой (частостью)* этой варианты. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = n, \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Статистическим рядом распределения выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит варианты x_i, а вторая – их частоты n_i (или относительные частоты w_i). При этом варианты располагаются в порядке возрастания.

Как правило, статистический ряд распределения составляется в случае, когда наблюдаемая с.в. X является дискретной.

Графически статистический ряд распределения выборки изображается следующим образом. В прямоугольной декартовой системе координат строят точки с координатами $(x_i,\ n_i)$. Последовательно соединив их отрезками, получают ломаную линию, называемую *полигоном частот*. Аналогично строится *полигон относительных частот*.

Пример 4.1. Имеется выборка значений случайной величины X объёма $n = 15$:

$$0,\ 3,\ -5,\ -3,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 0,\ 0,\ -3,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1.$$

Вариационным рядом для неё будет последовательность

$$-5,\ -3,\ -3,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3.$$

Статистический ряд распределения данной выборки имеет вид

x_i	-5	-3	-1	0	1	3
n_i	1	2	2	5	3	2

или

x_i	-5	-3	-1	0	1	3
w_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Полигон частот изображён на рис. 12.

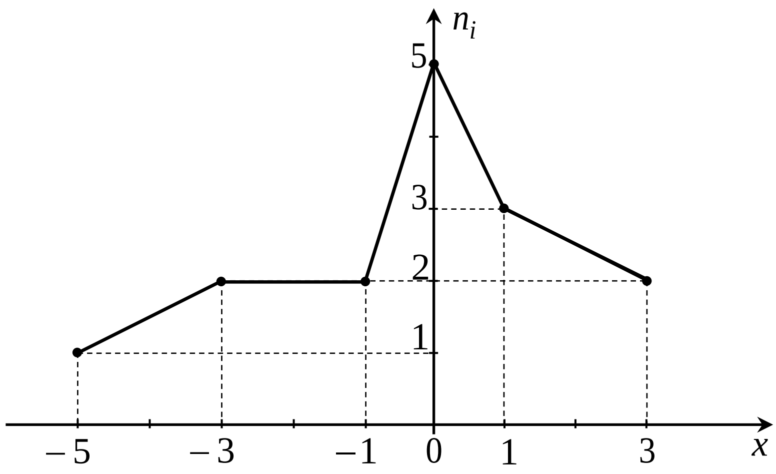


Рис.12

В случае, когда X является непрерывной с.в. или же вариационный ряд имеет большое количество вариант, элементы выборки объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде *интервального (группированного) статистического ряда распределения*. Для этого интервал, содержащий все значения выборки, разбивают на k непересекающихся интервалов

$$[a_0, a_1), \ [a_1, a_2), \ \dots, \ [a_{k-1}, a_k].$$

Затем для каждого интервала разбиения определяют *частоту* – количество элементов выборки, попавших в этот интервал: n_i – частота, соответствующая i-му интервалу разбиения $(i = 1, 2, \dots, k)$. Наряду с частотами находят также *относительные частоты*

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

(n – объём выборки). Интервальный статистический ряд записывают в виде таблицы, в первой строке которой содержатся интервалы группировки, а во второй – соответствующие частоты n_i или относительные частоты w_i.

Интервальный статистический ряд распределения изображают с помощью *гистограммы частот*. Для этого на оси абсцисс откладывают интервалы группировки и на них, как на основании, строят прямоугольники с высотами

$$h_i = \frac{n_i}{a_i - a_{i-1}} \ (i = 1, 2, \dots, k).$$

Аналогично строится *гистограмма относительных частот*.

Пример 4.2. Выборка 100 значений наблюдаемой непрерывной случайной величины X представлена в виде следующего интервального статистического ряда распределения:

Интервал	[22, 24)	[24, 26)	[26, 28)	[28, 30)	[30, 32)	[32, 34]
Частота	2	14	34	40	8	2

Построить гистограмму частот.

Решение. В данном случае $a_i - a_{i-1} = 2$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$. Находим высоты прямоугольников:

$$h_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad h_2 = \frac{14}{2} = 7, \quad h_3 = \frac{34}{2} = 17,$$

$$h_4 = \frac{40}{2} = 20, \quad h_5 = \frac{8}{2} = 4, \quad h_6 = \frac{2}{2} = 1.$$

Гистограмма частот изображена на рис. 13.

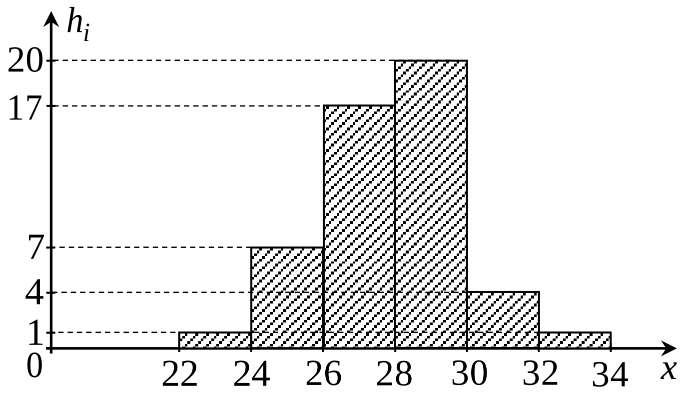


Рис. 13 ●

4.2. Эмпирическая функция распределения

Эмпирической (выборочной) функцией распределения с.в. X, построенной по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называют функцию $F_n^*(x)$, которая при каждом $x \in \mathbf{R}$ равна относительной частоте события $X < x$, т. е.

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число элементов выборки, меньших x.

Эмпирическая функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F_n^*(x) \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$;

2. $F_n^*(x)$ не убывает на $\mathbf{R}$;

3. $F_n^*(x)=0$ при $x \le x_{\min}$, $F_n^*(x)=1$ при $x > x_{\max}$, где $x_{\min}$ и $x_{\max}$ – соответственно наименьший и наибольший элементы выборки;

4. $F_n^*(x)$ непрерывна слева в любой точке $x_0 \in \mathbf{R}$.

График эмпирической функции распределения имеет ступенчатый вид. В промежутках между соседними вариантами выборки $F_n^*(x)$ сохраняет постоянное значение. В точках оси Ox, равных вариантам выборки, $F_n^*(x)$ претерпевает скачки; величина скачка в точке $x = x_i$ равна относительной частоте варианты x_i.

Пример 4.3. В условиях примера 4.1 найти эмпирическую функцию распределения с.в. X и построить её график.

Решение. В данном случае $n = 15$. По статистическому ряду распределения находим

$$F_{15}^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -5, \\ \dfrac{1}{15} & \text{при} \quad -5 < x \le -3, \\ \dfrac{3}{15} & \text{при} \quad -3 < x \le -1, \\ \dfrac{5}{15} & \text{при} \quad -1 < x \le 0, \\ \dfrac{10}{15} & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ \dfrac{13}{15} & \text{при} \quad 1 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

График $F_{15}^*(x)$ изображён на рис. 14.

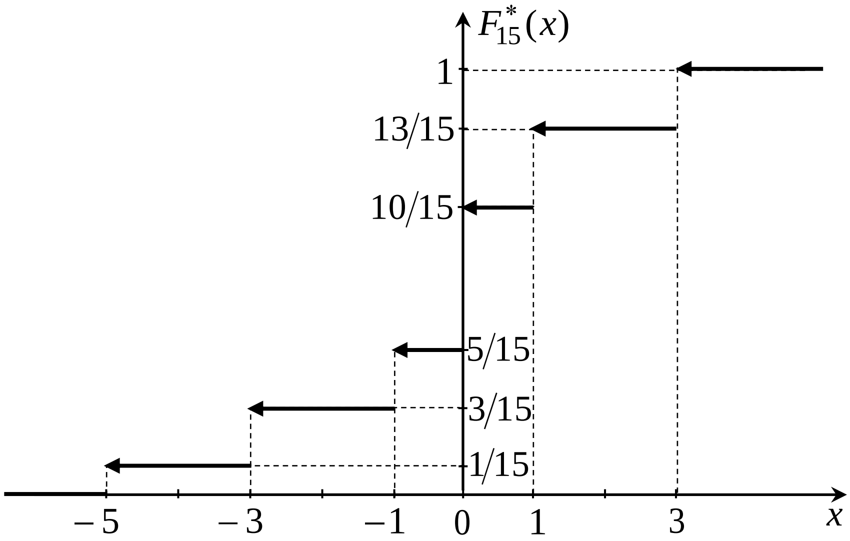


Рис. 14

●

4.3. Числовые характеристики выборки

Пусть $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – выборка объёма n.

Выборочным средним $\bar{x}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ .$$

Выборочной дисперсией s^2 называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\bar{x}$:

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\ .$$

Выборочную дисперсию можно вычислять также по формуле

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2\ .$$

Замечание 4.1. Если выборка представлена статистическим рядом распределения, то значения $\bar{x}$ и s^2 находят по формулам

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i\ , \tag{4.1}$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 n_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2 n_i-(\bar{x})^2\ , \tag{4.2}$$

где x_i – варианты, n_i – соответствующие им частоты.

Замечание 4.2. Для интервального статистического ряда выборочное среднее и выборочную дисперсию также вычисляют по формулам (4.1) и (4.2). В качестве x_i берут середины интервалов ряда, а в качестве n_i – частоты соответствующих интервалов.

Выборочное среднее квадратическое отклонение s определяется формулой

$$s=\sqrt{s^2}\ .$$

Модой M_o^* выборки называют варианту, имеющую наибольшую частоту.

Медианой M_e^* выборки называется число, которое делит вариационный ряд

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$$

на две части, содержащие равное число элементов, а именно: если $n=2k$ $(k\in\mathbf{N})$, то $M_e^*=\dfrac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}$; если $n=2k+1$, то $M_e^*=x_{(k+1)}$.

4.4. Точечные оценки неизвестных параметров распределения

Пусть $F(x, \theta)$ – функция распределения с.в. X, θ – неизвестный параметр. Предполагаем, что общий вид функции $F(x, \theta)$ известен.

Пусть в результате n наблюдений за случайной величиной X получена выборка

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n. \tag{4.3}$$

По выборке требуется найти приближённое значение параметра θ.

Элементы выборки (4.3) можно рассматривать последовательно как частные значения n независимых случайных величин

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,$$

каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и с.в. X.

Любая функция случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ называется *статистикой.*

Пусть $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ – некоторая статистика. Значение $\tilde{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принятое статистикой $\tilde{\theta}$ на выборке (4.3), называется её *выборочным значением*.

Важными примерами статистик являются *выборочное среднее*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

и *выборочная (статистическая) дисперсия*

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 .$$

Определённые в пункте 4.3 числовые характеристики выборки $\bar{x}$ (выборочное среднее) и s^2 (выборочная дисперсия) являются выборочными значениями одноимённых статистик $\overline{X}$ и S^2.

Статистика $\tilde{\theta}$, выборочное значение которой принимается за приближённое значение неизвестного параметра θ, называется его *точечной оценкой* или просто *оценкой*.

Основными свойствами оценок, характеризующими их качество, являются *несмещённость*, *состоятельность* и *эффективность*.

Оценку $\tilde{\theta}$ параметра θ называют *несмещённой*, если

$$M(\tilde{\theta}) = \theta.$$

В противном случае оценка называется *смещённой*.

Разность $M(\tilde{\theta}) - \theta$ называется *смещением*.

Несмещённость оценки гарантирует, что при оценивании неизвестного параметра не будет систематических ошибок в сторону завышения или занижения.

Оценку $\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ параметра θ называют *состоятельной*, если она сходится по вероятности к θ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0\,.$$

Свойство состоятельности означает, что с ростом объёма выборки выборочные значения оценки приближаются к неизвестному значению параметра.

Теорема 4.1. Выборочное среднее $\overline{X}$ является несмещённой и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$.

Теорема 4.2. Выборочная дисперсия S^2 является смещённой и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$.

При установлении смещённости оценки S^2 приходят к равенству

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n} D(X),$$

из которого следует, что статистика

$$S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad (4.4)$$

является уже несмещённой оценкой дисперсии $D(X)$. Можно доказать также состоятельность этой оценки.

Статистика S_0^2, определённая формулой (4.4), называется *исправленной выборочной дисперсией*.

Отметим, что при больших значениях n выборочные значения статистик S^2 и S_0^2 отличаются мало. Поэтому на практике оценку S_0^2 используют для оценки дисперсии в основном лишь при малых объёмах выборки (обычно при $n \leq 30$).

Несмещённая оценка $\tilde{\theta}$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок параметра θ.

Эффективность оценки означает, что статистика, используемая в качестве точечной оценки неизвестного параметра, обеспечивает минимальный среди всех несмещённых оценок разброс приближённых значений параметра около его истинного значения.

Рассмотрим один из наиболее распространённых методов получения точечных оценок неизвестных параметров распределения – метод максимального правдоподобия.

Предположим, что известен вид закона распределения случайной величины X, но неизвестен параметр θ, которым определяется этот закон (параметр θ может быть и векторным: $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка наблюдений случайной величины X, по которой требуется оценить параметр θ.

Функцией правдоподобия для оценки параметра θ называется функция

$$L(\theta) = p(x_1, \theta)\, p(x_2, \theta) \ldots p(x_n, \theta),$$

где $p(x, \theta)$ – плотность распределения случайной величины X, если эта величина непрерывная, и $p(x, \theta) = P(X = x)$, если случайная величина X дискретная.

Метод максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки параметра θ принимается статистика $\tilde{\theta}$ (векторная статистика $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r)$, если $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$), выборочное значение которой $\tilde{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ доставляет максимум функции правдоподобия. Такую оценку называют *оценкой максимального правдоподобия* (коротко: *МП-оценкой*).

Для упрощения вычислений, связанных с получением МП-оценки, в некоторых случаях удобно использовать логарифмическую функцию правдоподобия $\ln L(\theta)$.

Пример 4.4. Найти МП-оценки математического ожидания m и дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности.

Решение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка наблюдений случайной величины X с плотностью распределения

$$p(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем функцию правдоподобия $L(m, \sigma^2)$:

$$L(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{\sum (x_i-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\ln L(m, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma^2 - \frac{\sum (x_i - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Используя необходимые условия максимума $L(m, \sigma^2)$, получаем систему уравнений для нахождения оценок максимального правдоподобия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(m, \sigma^2)}{\partial m} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum (x_i - m) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L(m, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\sum (x_i - m)^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим
$$m=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}\,.$$
Подставляя это значение во второе уравнение, получаем
$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2=s^2\,.$$
Таким образом, $\tilde{m}=\bar{X}$, $\tilde{\sigma}^2=S^2$ – искомые оценки. ●

4.5. Интервальное оценивание. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Пусть θ – неизвестный параметр распределения случайной величины X.

Пусть статистики $\tilde{\theta}_1=\tilde{\theta}_1(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ и $\tilde{\theta}_2=\tilde{\theta}_2(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ таковы, что интервал $(\tilde{\theta}_1,\ \tilde{\theta}_2)$ содержит (накрывает) истинное значение параметра θ с заданной вероятностью $p=1-\alpha$:
$$P(\tilde{\theta}_1<\theta<\tilde{\theta}_2)=1-\alpha\,.$$
Тогда интервал $(\tilde{\theta}_1,\ \tilde{\theta}_2)$ называется *доверительным интервалом* для параметра θ, вероятность $p=1-\alpha$ – *доверительной вероятностью (надёжностью)*, а число α – *уровнем значимости*.

Пусть X – нормально распределённая случайная величина. Тогда:

1. Если среднее квадратическое отклонение σ известно, то доверительный интервал для математического ожидания m имеет вид
$$\left(\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$
где n – объём выборки, $\bar{X}$ – выборочное среднее, $u_{\alpha/2}$ находится по таблице значений функции Лапласа
$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
из условия
$$\Phi_0(u_{\alpha/2})=\frac{1-\alpha}{2}\,.$$

2. Если среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания m имеет вид
$$\left(\bar{X}-t_{\alpha/2,\,n-1}\frac{S_0}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2,\,n-1}\frac{S_0}{\sqrt{n}}\right),$$
где

$$S_0=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

(исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение), $t_{\alpha/2,n-1}$ находится по таблице квантилей распределения Стьюдента из условия

$$P\left(T_{n-1}>t_{\alpha/2,n-1}\right)=\alpha/2$$

(здесь T_{n-1} – случайная величина, распределённая по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы).

Пример 4.5. По результатам 6 независимых наблюдений над нормально распределённой случайной величиной *X* найдены выборочное среднее $\bar{x}=5{,}63$ и исправленная выборочная дисперсия $s_0^2=0{,}0625$. Требуется найти доверительный интервал для математического ожидания случайной величины *X*, соответствующий доверительной вероятности $1-\alpha=0{,}99$.

Решение. Находим $s_0=\sqrt{s_0^2}=\sqrt{0{,}0625}=0{,}25$. В нашем случае $n-1=5$, $\alpha/2=0{,}005$. По таблице квантилей распределения Стьюдента находим значение $t_{\alpha/2,n-1}=t_{0{,}005;5}=4{,}03$. Вычисляем

$$t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_0}{\sqrt{n}}=4{,}03\cdot\frac{0{,}25}{\sqrt{6}}\approx 0{,}41.$$

Искомый доверительный интервал таков: $(5{,}63-0{,}41;\ 5{,}63+0{,}41)$, т.е. $(5{,}22;6{,}04)$. ●

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ нормально распределённой случайной величины *X* имеет вид

$$\left(S_0\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}},\ S_0\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}}\right),$$

где $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ и $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ находятся по таблице квантилей χ^2-распределения из условий

$$P(\chi^2_{n-1}<\chi^2_{1-\alpha/2,n-1})=\alpha/2,\quad P(\chi^2_{n-1}>\chi^2_{\alpha/2,n-1})=\alpha/2$$

(здесь χ^2_{n-1} – случайная величина, имеющая χ^2-распределение с $n-1$ степенью свободы).

4.6. Проверка гипотез о законе распределения

Пусть необходимо проверить гипотезу, состоящую в том, что наблюдаемая в эксперименте с.в. X распределена по некоторому известному закону (нормальному, биномиальному, Пуассона и т.д.). Проверяемая гипотеза называется *нулевой* и обозначается H_0.

Для проверки гипотезы H_0 производится выборка значений с.в. X. Требуется сделать заключение: согласуются ли данные выборки с высказанным предположением. Для этого используют специально подобранную статистику $Z(X_1, \ldots, X_n)$, по выборочному значению которой судят о справедливости гипотезы H_0.

Правило, согласно которому проверяемая гипотеза H_0 принимается или отвергается, называется *критерием согласия*, а статистика $Z(X_1, \ldots, X_n)$, с помощью которой это правило определяется, называется *статистикой критерия*.

Поскольку проверка статистической гипотезы осуществляется на основании выборочных данных, носящих случайный характер, то всегда присутствует возможность ошибочно отвергнуть гипотезу H_0, когда на самом деле она верна. Поэтому заранее задаётся малое число α – вероятность, с которой мы можем позволить себе отвергнуть верную гипотезу H_0. Это число называют *уровнем значимости критерия*. Обычно для α используются стандартные значения: $\alpha = 0{,}001;\ 0{,}005;\ 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}1$.

Критериев согласия существует много. Рассмотрим наиболее часто используемый на практике критерий согласия – *критерий χ^2 Пирсона*.

Предположим, что сформулирована гипотеза H_0, состоящая в том, что случайная величина X имеет закон распределения известного вида, зависящий от параметров $\theta_1, \ldots, \theta_r$ (например, нормальный закон с параметрами m и σ или закон Пуассона с параметром λ).

Пусть в результате наблюдений за случайной величиной X получена выборка объёма n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для проверки гипотезы H_0 с помощью критерия χ^2 Пирсона поступают следующим образом.

1. Выбирают уровень значимости α (вероятность отвергнуть гипотезу H_0 в случае, если она верна).

2. По выборке методом максимального правдоподобия (см. п. 4.4) оценивают параметры предполагаемого закона распределения.

3. Область возможных значений случайной величины X разбивают на k непересекающихся множеств $S_1, S_2, \ldots S_k$, которые представляют собой интервалы в случае, когда X – непрерывная случайная величина, либо группы отдельных значений, если эта величина дискретная.

4. Для каждого множества S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, подсчитывают число n_i элементов выборки, попавших в это множество (т. е. находят *эмпирические частоты*).

5. Используя предполагаемый закон распределения, вычисляют гипотетические вероятности p_i попадания случайной величины X в множества S_i:

$$p_i = P(X \in S_i), \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

6. Находят *теоретические частоты* n'_i попадания значений случайной величины X в множества S_i:

$$n'_i = np_i.$$

7. Вычисляют выборочное значение $\chi^2_в$ статистики критерия χ^2 Пирсона – случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}. \qquad (4.5)$$

Применение статистики (4.5) для проверки гипотезы H_0 основано на следующей теореме.

Теорема 4.3. Если гипотеза H_0 верна, то статистика (4.5) критерия χ^2 асимптотически при $n \to \infty$ распределена по закону χ^2 с $\nu = k - r - 1$ степенями свободы, где k – число множеств S_i, r – число параметров предполагаемого распределения, оцененных по выборке.

8. По таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ находят значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$, удовлетворяющее условию

$$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \alpha.$$

9. Сравнивают значения $\chi^2_в$ и $\chi^2_{\alpha,\nu}$. В соответствии с критерием χ^2 Пирсона гипотеза H_0 принимается, если $\chi^2_в \le \chi^2_{\alpha,\nu}$ (в этом случае говорят также, что гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений). Если $\chi^2_в > \chi^2_{\alpha,\nu}$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Замечание 4.3. Необходимым условием применения критерия χ^2 Пирсона является выполнение неравенства $n'_i \ge 5$ для всех множеств S_i. Если для некоторых множеств S_i это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними.

Пример 4.6. Результаты исследования прочности на сжатие 200 образцов бетона представлены в виде сгруппированного статистического ряда:

Интервалы прочности, МПа	19–20	20–21	22–23	23–24	24–25	25–26
Частоты n_i	10	26	56	64	30	14

С помощью критерия χ^2 Пирсона требуется проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении прочности на сжатие (случайной величины X). Уровень значимости принять равным 0,05.

Решение. Определяем значения x_i* серединн интервалов и находим точечные оценки математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ гипотетического нормального распределения:

$$\tilde{m} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i =$$

$$= \frac{1}{200}(19{,}5\cdot 10 + 20{,}5\cdot 26 + 21{,}5\cdot 56 + 22{,}5\cdot 64 + 23{,}5\cdot 30 + 24{,}5\cdot 14) =$$

$$= 22{,}1 \text{ МПа};$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i^* - \overline{x})^2 n_i =$$

$$= \frac{1}{200}((-2{,}6)^2\cdot 10 + (-1{,}6)^2\cdot 26 + (-0{,}6)^2\cdot 56 +$$

$$+ 0{,}4^2\cdot 64 + 1{,}4^2\cdot 30 + 2{,}4^2\cdot 14) = 1{,}52 \text{ МПа}^2;$$

$\tilde{\sigma} = \sqrt{s^2} = \sqrt{1{,}52} \approx 1{,}233$ МПа.

По формуле

$$u_i = (x_i - \tilde{m})/\tilde{\sigma}$$

вычисляем концы нормированных интервалов, при этом наименьшее значение u_i полагаем равным $-\infty$, а наибольшее — $+\infty$:

$$u_0 = -\infty; \quad u_1 \approx -1{,}70; \quad u_2 \approx -0{,}89; \quad u_3 \approx -0{,}08;$$

$$u_4 \approx 0{,}73; \quad u_5 \approx 1{,}54; \quad u_6 = +\infty.$$

Находим вероятности p_i попадания случайной величины X, имеющей нормальное распределение с параметрами $m = 22{,}1$, $\sigma = 1{,}233$, в частичные интервалы $[x_{i-1}, x_i)$ по формуле

$$p_i = P\{ x_{i-1} \le X < x_i \} = \Phi_0(u_i) - \Phi_0(u_{i-1}),$$

где

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Используем при этом таблицу значений функции Лапласа. Полученные результаты, а также дальнейшие вычисления, необходимые для определения выборочного значения статистики критерия χ^2, приведем в таблице:

Интервалы наблюдаемых значений с.в. X $[x_{i-1}, x_i)$	Частоты n_i	Нормированные интервалы $[u_{i-1}, u_i)$	p_i	$n_i' = np_i$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
19 – 20	10	$(-\infty; -1{,}70)$	0,045	9	1	0,11
20 – 21	26	$[-1{,}70; -0{,}89)$	0,142	28,4	5,76	0,20
21 – 22	56	$[-0{,}89; -0{,}08)$	0,281	56,2	0,04	0,00
22 – 23	64	$[-0{,}08; 0{,}73)$	0,299	59,8	17,64	0,29
23 – 24	30	$[0{,}73; 1{,}54)$	0,171	34,2	17,64	0,52
24 – 25	14	$[1{,}54; +\infty)$	0,062	12,4	2,56	0,23
$\sum$	$n = 200$		1,000	200,0		$\chi^2_в =$ $= 1{,}35$

В результате вычислений получили $\chi^2_в = 1{,}35$. Находим по таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ критическое значение $\chi^2_{0{,}5,\,3} = 7{,}815$. Так как $\chi^2_в < \chi^2_{0{,}5,\,3}$, то гипотеза о нормальном распределении предела прочности на сжатие принимается. ●

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородич, С.М. Теория вероятностей и математическая статистика: методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2015. – 51 с.

2. Бородич, С.М. Теория вероятностей и математическая статистика: методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – 52 с.

3. Бородич, С.М. Математическая статистика: методические рекомендации / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 48 с.

4. Бородич, С.М. Теория вероятностей: задания для самостоятельной работы / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 52 с.

5. Бочаров, П.П. Теория вероятностей. Математическая статистика / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 296 с.

6. Герасимович, А.И. Математическая статистика / А.И. Герасимович, Я.И. Матвеева. – Мн.: Выш. шк., 1978. – 200 с.

7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.

9. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей: учебник / Б.В. Гнеденко. – 8-е изд., испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

10. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – 2-е изд., стер. – СПб. [и др.]: Лань, 2007. – 332 с.

11. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.

12. Максимов, Ю.Д. Математика. Выпуск 8. Математическая статистика: опорный конспект / Ю.Д. Максимов. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. – 96 с.

13. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / А.В. Печинкин [и др.]; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 456 с.

14. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. – М.: Агар, 2000. – 255 с.