

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.548

ГАЛЬМАК
Александр Михайлович

n-АРНЫЕ ГРУППЫ И ИХ КЛАССЫ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2011

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.548

ГАЛЬМАК
Александр Михайлович

n-АРНЫЕ ГРУППЫ И ИХ КЛАССЫ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2011

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Научный консультант:

Шеметков Леонид Александрович,
доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Беларуси, профессор, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», заведующий кафедрой алгебры и геометрии

Официальные оппоненты:

Артамонов Вячеслав Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, профессор кафедры высшей алгебры

Щербаков Виктор Алексеевич,
доктор физико-математических наук, Институт математики и информатики Академии наук Молдовы, главный научный сотрудник

Селькин Михаил Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», профессор кафедры высшей математики

Оппонирующая организация – Белорусский государственный университет

Защита состоится «01» июля 2011 года в 15⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: 57-37-91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале №1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан «31» мая 2011 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций



Ходанович Д.А.

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Начало развитию теории n -арных групп положила опубликованная в 1928 году в журнале "Mathematische Zeitschrift" статья В. Дёрнте¹, в которой впервые было введено понятие n -группы, называемой также n -арной или полиадической группой. Уже из названия статьи видно, что истоки теории n -арных групп лежат в теории групп. Непосредственное отношение к возникновению новой теории имела также Эмми Нётер, по инициативе которой, как отмечает Дёрнте, он и занялся реализацией лежащей почти на поверхности идеи о замене в определении группы ассоциативной и однозначно обратимой слева и справа бинарной операции на ассоциативную и однозначно обратимую на каждом месте n -арную операцию.

n -Арную операцию $[\]$, определенную на множестве A , называют: ассоциативной, если для любого $i = 1, 2, \dots, n$ в A выполняется тождество

$$[[a_1 \dots a_n] a_{n+1} \dots a_{2n-1}] = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+n}] a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}];$$

однозначно обратимой на i -ом месте, где $i = 1, 2, \dots, n$, если для любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$[a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_n] = b;$$

однозначно обратимой, если она обратима на i -ом месте для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

До В. Дёрнте такие тернарные, то есть 3-арные операции, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, изучал Х. Прюфер², опубликовавший в 1924 году в том же "Mathematische Zeitschrift" статью, в которой применял введенные им тернарные операции для исследования бесконечных абелевых групп. Впоследствии алгебры с такими операциями стали называть грудами Прюфера. Дёрнте установил, что груды Прюфера являются частным случаем n -арных групп, а именно, полуабелевыми тернарными группами, все элементы которых являются идемпотентами.

Первым, кто обратил серьезное внимание на указанную выше статью В. Дёрнте, был Э. Пост, который сумел разглядеть в небольшой статье зачатки многообещающей теории. В 1940 году Э. Пост опубликовал в "Trans. Amer. Math. Soc." объемную статью³, которая по важности полученных результатов и

¹Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. - 1928. Bd. 29. - S. 1-19.

²Prüfer, H. Theorie der abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften / H. Prüfer // Math. Z. - 1924. - Bd. 20. - S. 165-187.

³Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. - 1940. - Vol. 48, №2. - P.208-350.

предложенных идей является одним из краеугольных камней теории n -арных групп и во многом предопределила тематику современных исследований по n -арным группам. Одним из важнейших достижений Э. Поста является теорема, утверждающая, что любая n -арная группа является смежным классом некоторой группы по её нормальной подгруппе, факторгруппа по которой является циклической порядка $n - 1$; при этом n -арная операция является производной от бинарной операции. Значение указанной теоремы для теории n -арных групп заключается в том, что она дает удобный инструмент для их изучения, позволяя во многих случаях, в основном при получении n -арных аналогов бинарных результатов, сводить его к исследованию групп. При получении результатов, не имеющих аналогов в теории групп, или вырождающихся при $n = 2$ в тривиальные утверждения, используются другие подходы и методы, отличные от тех, которые предлагает теорема Поста о смежных классах.

К числу основополагающих работ по n -арным группам относится также статья С.А. Чунихина⁴ "К теории неассоциативных n -групп", опубликованная в 1945 году в журнале "Доклады АН СССР".

Авторитет Э. Поста имел решающее значение для привлечения свежих сил к изучению n -арных групп. Число изучающих n -арные группы стало постепенно возрастать, хотя тематика исследований расширялась незначительно, группируясь в основном вокруг аксиоматики n -арных групп и приводимости n -арных групп к группам. После Э. Поста наибольший вклад в теорию n -арных групп внесли В.А. Артамонов^{5,6,7}, К. Глазек^{8,9,10}, а также С.А. Русаков, многочисленные результаты которого по n -арным группам, посвященные в основном силовскому строению n -арных групп и приложениям n -арных групп, систематизированы в двух его монографиях^{11,12}.

Интерес к n -арным группам в значительной мере возрос после того, как А.Г. Курош включил в свою книгу¹³ отдельный раздел, посвященный n -арным группам. Информация по n -арным группам имеется в книгах А.К. Сушкевича¹⁴,

⁴Чунихин, С.А. К теории неассоциативных n -групп / С.А. Чунихин // Доклады АН СССР. – 1945. – Т. 48, №1. С.7–10.

⁵Артамонов, В.А. Свободные n -арные группы / В.А. Артамонов // Мат. заметки. – 1970. – Т.8, №4. – С. 499–507.

⁶Артамонов, В.А. Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1976. – С. 191–248.

⁷Артамонов, В.А. О шрайеровых многообразиях n -групп и n -полугрупп / В.А. Артамонов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 5. – 1979. – С. 193–202.

⁸Glazek, K. Bibliographi of n -groups (polindic groups) and same group like n -ary systems / K. Glazek // Proc. of the sympos. n -ary structures. – Skopje, 1982. – P. 259–289.

⁹Glazek, K. Abelian n -groups / K. Glazek, B. Gleichgewicht // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai. – Esztergom. – 1977. – P. 321–329.

¹⁰Gleichgewicht, B. Remarks on n -groups as abstract algebras / B. Gleichgewicht, K. Glazek // Collq Math. – 1967. – Vol. 17, №2. – P. 209–219.

¹¹Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Наука і тэхніка, 1992. – 245 с.

¹²Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 167 с.

¹³Курош, А.Г. Общая алгебра : Лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1974. – 160 с.

¹⁴Сушкевич, А.К. Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. - Харьков, Киев: Гос. научно-техн. изд-во Украины, 1937. – 176 с.

В.Д. Белоусова¹⁵, Р. Брака¹⁶, Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы¹⁷, Н. Бурбаки¹⁸ и Я. Ушана¹⁹, а также в обзорах В.А. Артамонова²⁰ и К. Глазека²¹.

К настоящему времени теория n -арных групп, несмотря на свой довольно почтенный возраст, значительно уступает в своем развитии теории групп. Одной из причин сложившегося положения является бытующее заблуждение об отсутствии принципиальных различий между теорией групп и теорией n -арных групп при $n \geq 3$. На самом деле это не так. В теории n -арных групп наряду со свойствами, общими для групп и n -арных групп, систематически изучаются и свойства n -арных групп, отсутствующие у групп. Например, в n -арной группе при $n \geq 3$ может быть несколько единиц. Существуют n -арные группы, у которых все элементы являются единицами. Э. Пост установил существование циклических n -арных групп, в которых нет собственных n -арных подгрупп, в том числе и одноэлементных. Понятно, что в таких n -арных группах вообще нет единиц.

В качестве еще одного отличия n -арного случая ($n \geq 3$) от бинарного случая ($n = 2$) можно указать отсутствие при $n \geq 3$ взаимно однозначного соответствия между конгруэнциями n -арной группы и её подалгебрами, являющимися n -арными аналогами нормальных подгрупп в группе. Можно привести еще много примеров, показывающих отличие n -арных групп от групп, но и уже сказанного достаточно для того, чтобы убедиться в том, что, в сравнении с группами, n -арные группы – более сложно устроенные математические объекты. Поэтому методы, которые используются в теории групп, часто не применимы в теории n -арных групп.

Изучение свойств n -арных групп, отсутствующих у групп, среди которых встречаются и довольно экзотические свойства, является одной из главных задач теории n -арных групп, причем не менее важной, чем получение n -арных аналогов известных групповых результатов.

Еще одной причиной замедленного развития теории n -арных групп ($n \geq 3$) является неразработанность или слабая разработанность многих её разделов, развитие которых приведет к значительному прогрессу как в изучении самих n -арных групп, так и в их приложениях. К числу таких слабо разработанных или почти не разработанных разделов, требующих своего развития, можно отнести:

¹⁵Белоусова, В.Д. *n*-Арные квазигруппы / В.Д. Белоусова. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 228 с.

¹⁶Bruck, R.H. A survey of binary systems / R.H.Bruck. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1966. – 185 p.

¹⁷Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба М.: Наука, 1989. – 246 с.

¹⁸Бурбаки, Н. Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. / Н. Бурбаки. М.: Физматгиз. 1962. – 516 с.

¹⁹Ušan, J. *n*-Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan // *Mathematika Moravica*. – 2003. – Special Vol. – 162 p.

²⁰Артамонов, В.А. Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1976. – С. 191–248.

²¹Glazek, K. Bibliographi of *n*-groups (poliadic groups) and same group like *n*-ary systems / K. Glazek // *Proc. of the sympos. n-ary structures*. – Skopje, 1982. – P. 259–289.

распознавание n -арных групп в классах универсальных алгебр с ассоциативной n -арной операцией; представление n -арных групп автоморфизмами подходящих универсальных алгебр; n -арные группы с идемпотентами; конгруэнции n -арных групп; классы n -арных групп.

Таким образом, до последнего времени оставалась открытой следующая актуальная проблема: развитие общей теории n -арных групп в таких направлениях как распознавание n -арных групп в классах универсальных алгебр, n -арные аналоги морфизмов универсальных алгебр, n -арные группы с идемпотентами, конгруэнции n -арных групп, классы n -арных групп. На реализацию этой актуальной задачи и направлено данное диссертационное исследование.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем:

“Структурная теория формаций и других классов алгебр” Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 88 от 23 ноября 1995г. (номер госрегистрации в БелИСА – 19963987), тема выполнялась в 1996 – 2000гг.;

“Структурная теория классов групп и других алгебр” Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001г. Государственная программа фундаментальных исследований “Математические структуры” (номер госрегистрации в БелИСА – 20011225), тема выполнялась в 2001 – 2005гг.;

“Исследование n -арных групп с идемпотентами” Могилевского технологического института (номер госрегистрации в БелИСА – 19981035), тема выполнялась в 1998г.;

“Исследование n -арных групп как универсальных алгебр с перестановочными конгруэнциями” Могилевского технологического института (номер госрегистрации в БелИСА – 1999959), тема выполнялась в 1999 – 2000гг.;

“Классы полиадических групп” Могилевского государственного университета продовольствия (номер госрегистрации в БелИСА – 20021704), тема выполнялась в 2002 – 2005гг.;

“Универсальные алгебры с одной основной операцией” Могилевского государственного университета продовольствия (номер госрегистрации в БелИСА – 2006953), тема выполнялась в 2006 – 2010гг.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является создание новых методов изучения n -арных групп и их классов и их применение к развитию теории n -арных групп. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

- разработать методы распознавания n -арных групп в классах универсальных алгебр с ассоциативной n -арной операцией с помощью уравнений с числом неизвестных большим единицы;
- определить n -арные аналоги морфизмов универсальных алгебр и изучить важнейшие свойства этих новых понятий;
- развить теорию конгруэнций n -арных групп;
- исследовать строение n -арных групп с идемпотентами;
- разработать общие методы построения и описания классов n -арных групп.

Объектами исследования являются n -арные группы и их классы.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации разработаны новые методы исследования n -арных групп и их классов, на основе которых установлены новые закономерности и свойства, включающие в себя:

1. Распознавание n -арных групп в классах универсальных алгебр с ассоциативной n -арной операцией с помощью уравнений с числом неизвестных равным $n - 1$, теорема 2.1.4 [3–А];

2. Исследование свойств последовательностей морфизмов однотипных универсальных алгебр:

– представлении n -арной группы n -арными подстановками, теорема 3.2.5 [8–А];

– представлении n -арной группы n -арными автоморфизмами подходящей последовательности однотипных универсальных алгебр, теорема 3.2.10 [8–А];

3. Развитие теории конгруэнций n -арных групп:

– доказательство равносильности классов конгруэнции, определенной на n -арной группе, теорема 4.3.3 [1–А, с. 137];

– доказательство для n -арных групп первой теоремы об изоморфизмах, теорема 4.4.5 [1–А, с. 125] и теорема 4.4.18 [13–А]; второй теоремы об изоморфизмах, теорема 4.4.10 [1–А, с. 131] и теорема 4.4.19 [13–А];

– доказательство для n -арных групп теорем Шрайера, теорема 4.5.11 [1–А, с. 157] и Жордана-Гёльдера, следствие 4.5.12 [1–А, с. 160];

4. Исследование связи между коммутантом (полукоммутантом) и центром (полуцентром) n -арной группы:

– доказательство конечности коммутанта (полукоммутанта) n -арной группы, в которой центр (полуцентр) имеет конечный индекс, теорема 5.4.2

[27–А] (теорема 5.4.3 [27–А]);

5. Исследование свойств n -арных групп с идемпотентами:

– описание множества всех единиц n -арной группы, теоремы 6.1.1 и 6.1.9 [30–А];

– описание множества всех идемпотентов n -арной группы, теоремы 6.2.7 и 6.2.9 [31–А];

– описание силовского строения идемпотентных n -арных групп, теорема 6.4.3 [32–А];

– описание n -арных групп, допускающих автоморфизм с единственным неподвижным элементом, теоремы 6.5.20 и 6.5.21 [34–А];

– описание силовского строения полуабелевых n -арных групп с идемпотентами, теорема 6.6.2 [35–А];

6. Развитие теории классов n -арных групп:

– исследование связей между многообразиями групп и многообразиями n -арных групп, теоремы 7.2.9 [43–А] и 7.2.20 [44–А];

– исследование связей между формациями групп и формациями n -арных групп, теоремы 7.2.27 [45–А] и 7.2.31 [45–А];

– решение аналога задачи А.Ю. Олышанского о существовании неабелевого многообразия групп, все конечные группы которого абелевы, для случая n -арных групп, теоремы 7.2.17 [43–А] и 7.4.21 [48–А];

– исследование Σ -замкнутых классов n -арных групп, теоремы 7.6.2 [49–А] и 7.6.9 [49–А].

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Все результаты диссертации и разработанные в ней методы принадлежат соискателю, получены им самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– на семинарах кафедры алгебры и геометрии Учреждения образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»;

– на IV Международном семинаре «Универсальная алгебра, теория чисел и их приложения» (Волгоград, 2 октября 2009 г.);

– на семинаре кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 9 ноября 2009 г.);

– на алгебраическом семинаре в Институте математики НАН РБ (30 марта 2010 г.);

– Международная алгебраическая конференция, посвященная памяти А.И.

Ширшова (Новосибирск, 1991);

– Международная конференция по алгебре, посвященная памяти М.И. Каргаполова (Красноярск, 1993);

– VII Белорусская математическая конференция (Минск, 1996);

– Международная алгебраическая конференция в Украине, посвященная памяти профессора Л.А. Кулужнина (Винница, 1999);

– VIII Белорусская математическая конференция (Минск, 2000);

– IV Международная алгебраическая конференция, посвященная 60-летию профессора Ю.И. Мерзлякова (Новосибирск, 2000);

– Третья Международная алгебраическая конференция в Украине (Сумы, 2001);

– Международная математическая конференция, посвященная столетию начала работы Д.А. Граве (1863–1936) в Киевском университете (Киев, 2002);

– V Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Тула, 2003);

– Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 2004);

– VI Международная конференция, «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 100-летию Н.Г. Чудакова (Саратов, 2004);

– The 5th International Algebraic Conference in Ukraine (Odessa, 2005);

– Международная алгебраическая конференция «Классы групп и алгебр», посвященная 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина (Гомель, 2005);

– Международная алгебраическая конференция «Классы групп, алгебр и их приложения», посвященная 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова (Гомель, 2007);

– Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 2008).

Опубликованность результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 монографиях, 49 статьях в журналах, 4 препринтах и 19 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов – 70,0 авторских листа, в том числе в монографиях – 49,8, статей в научных журналах – 13,2, препринты и тезисы – 7,0.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, семи глав основной части, заключения и библиографии.

ческого списка в порядке цитирования в количестве 116 наименований использованных источников и 76 наименований публикаций соискателя. Объем диссертации – 199 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному консультанту – доктору физико-математических наук, член-корреспонденту НАН Беларуси Леониду Александровичу Шеметкову за консультации и внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации реализована исследовательская программа по развитию теории n -арных групп. Основные результаты диссертации следующие.

Во второй главе решена задача распознавания n -арных групп в классах универсальных алгебр с ассоциативной n -арной операцией с помощью уравнений с числом неизвестных большим единицы.

В разделе 2.1 доказана основная теорема 2.1.4 [3–А, с. 6] и показано, что в этой теореме разрешимость уравнений нельзя заменить однозначной разрешимостью (теорема 2.1.8 [3–А, с. 11]).

В разделах 2.2 и 2.3 приведены важнейшие следствия из основной теоремы и показано, что многие известные результаты по распознаванию n -арных групп являются ее следствиями.

В главе 3 изучены общие свойства конечных последовательностей биекций равноможных множеств и конечных последовательностей морфизмов однотипных универсальных алгебр.

В разделе 3.1 доказано, что множество всех n -арных автоморфизмов конечной последовательности $n - 1$ однотипных универсальных алгебр является n -арной группой (теорема 3.1.5 [7–А]). Доказано также, что n -арную полугруппу всех эндоморфизмов последовательности $n - 1$ однотипных коммутативных универсальных алгебр можно превратить в коммутативную универсальную алгебру, в которой выполняются n -арные аналоги тождеств ассоциативности и дистрибутивности (теорема 3.1.8 [7–А]).

В разделе 3.2 для n -арных групп доказана теорема Кэли, в которой роль симметрической группы играет полиадическая группа полиадических подстановок (теорема 3.2.5 [8–А]). Из этой теоремы получаются соответствующие результаты Э. Поста и Ф. Сиосона (следствия 3.2.7 и 3.2.9). Получен также n -арный аналог теоремы Биркгофа о представлении группы автоморфизмами подходящей универсальной алгебры (теорема 3.2.10 [8–А]).

В разделе 3.3 доказано (теорема 3.3.3 [9–А]), что множество всех n -арных эндоморфизмов последовательности $n - 1$ абелевых m -арных групп образуют (m, n) -кольцо.

В главе 4 развита теория конгруэнций n -арных групп.

В разделе 4.1 доказан n -арный аналог бинарного результата о совпадении подгруппы, порожденной некоторым подмножеством группы, со множеством всех конечных произведений элементов из этого подмножества и обратных к ним (теорема 4.1.6 [1–А, с. 19]).

В разделе 4.2 изучена связь между n -арными подгруппами n -арной группы и подгруппами группы, к которой она приводима; в частности, – между полуинвариантными n -арными подгруппами и нормальными подгруппами.

Раздел 4.3 посвящен изучению свойств конгруэнций n -арной группы. Здесь, в частности, доказано (теорема 4.3.3 [1–А, с. 137]), что все классы конгруэнций n -арной группы имеют одну и ту же мощность.

В разделе 4.4 для n -арных групп доказаны несколько вариантов первой (теорема 4.4.5 [1–А, с. 125]; теорема 4.4.18 [13–А]) и второй (теорема 4.4.10 [1–А, с. 131]; теорема 4.4.19 [13–А]) теорем об изоморфизмах.

В разделе 4.5 доказаны теоремы Шрайера (теорема 4.5.11 [1–А, с. 157]) и Жордана-Гёльдера (теорема 4.5.12 [1–А, с. 160]) для n -арных групп.

В главе 5 получен положительный ответ на вопрос: будет ли коммутант n -арной группы конечным, если центр этой n -арной группы имеет в ней конечный индекс? Показано, что результат останется верным, если центр заменить полуженителем, а коммутант – полуженителем.

В разделе 5.1 установлены соответствия между разложениями n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ по её n -арной подгруппе $\langle B, [] \rangle$ и разложениями A^* по $B^*(A)$ (предложение 5.1.1 [23–А]) и A_0 по $B_0(A)$ (предложение 5.1.2 [24–А]).

В разделе 5.2 теоремой 5.2.2 [3–А, с. 230] установлена связь между централизатором n -арной подгруппы $\langle B, [] \rangle$ в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$ и централизатором подгруппы $B^*(A)$ в универсальной обертывающей группе A^* .

Свойства коммутанта и полуженителя n -арной группы изучены в разделе 5.3 (предложения 5.3.10 и 5.3.11 [27–А]).

Результаты разделов 5.1 – 5.3 использованы в разделе 5.4 для доказательства теоремы 5.4.2 [27–А] о конечности коммутанта n -арной группы, в которой центр имеет конечный индекс, и теоремы 5.4.3 [27–А] о конечности полуженителя n -арной группы, в которой полуженитель имеет конечный индекс.

В главе 6 изучены n -арные группы с идемпотентами.

В разделе 6.1 доказано, что множество всех единиц n -арной группы является характеристической подалгеброй, лежащей в её центре (теорема 6.1.1 [30–А]). Явный вид множества всех единиц n -арной группы указан в теореме 6.1.9 [30–А]. Приведены многочисленные примеры n -арных групп с указанием для каждой из них n -арной подгруппы единиц.

В теореме 6.2.7 [31–А], раздела 6.2 сформулировано необходимое и достаточное условие для того, чтобы множество всех идемпотентов n -арной группы было её n -арной подгруппой. Явный вид множества всех идемпотентов n -арной группы указан в теореме 6.2.9 [31–А].

Критерий идемпотентности n -арной группы (теорема 6.3.11 [31–А]) является основным результатом раздела 6.3.

В разделе 6.4 изучено силовское строение идемпотентных n -арных групп. В частности, теорема 6.4.3 [32–А] утверждает, что если $n - 1$ и p – простые числа, а числа p и m – взаимно простые, то конечная идемпотентная n -арная группа

порядка $p^k m$ является объединением m своих непересекающихся полуинвариантных p -силовских p -арных подгрупп.

В разделе 6.5 приведены результаты об p -арных группах, допускающих регулярный автоморфизм. Здесь, в частности, доказано, что конечная p -арная группа, допускающая автоморфизм, оставляющий неподвижным единственный элемент, является полуразрешимой (теорема 6.5.20 [34–А]). Если же указанный автоморфизм имеет простой порядок, то p -арная группа является полунильпотентной (теорема 6.5.21 [34–А]).

Теорема 6.6.2 [35–А] из раздела 6.6 описывает силовское строение полуабелевых p -арных групп с идемпотентами.

В разделе 6.7 для всякого группоида A на декартовой степени A^{n-1} определена p -арная операция $[]_{n, n-1}$ и доказано, что, если группоид A является группой, то $\langle A^{n-1}, []_{n, n-1} \rangle$ – p -арная группа (теорема 6.7.3 [4–А, с. 77]). В теореме 6.7.4 [4–А, с. 105] указан явный вид множества всех идемпотентов этой p -арной группы.

Глава 7 посвящена развитию теории классов p -арных групп.

В разделе 7.1 для каждой совокупности групп \mathfrak{X} определены две совокупности $\mathfrak{X}'(n)$ и $\mathfrak{X}(n)$ p -арных групп и показано, что если \mathfrak{X} – класс групп, то $\mathfrak{X}'(n)$ и $\mathfrak{X}(n)$ – совпадающие классы p -арных групп. Необходимые в дальнейшем свойства класса $\mathfrak{X}(n)$ собраны в теореме 7.1.14 [42–А].

В разделе 7.2 доказано, что $\mathfrak{X}(n)$ является многообразием p -арных групп тогда и только тогда, когда \mathfrak{X} – многообразие групп (теорема 7.2.9 [43–А]). Доказано, что решётка всех многообразий групп изоморфно вкладывается в решётку всех многообразий p -арных групп (теорема 7.2.20 [44–А]). Аналогичные результаты имеют место для формаций (теорема 7.2.27 [45–А], теорема 7.2.31 [45–А]). Установлено существование неполуабелевого многообразия p -арных групп, все конечные p -арные группы которого полуабелевы (теорема 7.2.17 [43–А]). Это полиадический аналог соответствующего результата А.Ю. Ольшанского для групп.

В разделе 7.3 для каждого класса групп \mathfrak{X} определен класс $\mathfrak{X}^*(n)$ p -арных групп и изучена связь между классами $\mathfrak{X}^*(n)$ и $\mathfrak{X}(n)$. В частности, доказано, что имеет место строгое включение $\mathfrak{X}^*(n) \subset \mathfrak{X}(n)$, если \mathfrak{X} один из следующих классов групп: всех циклических групп; всех абелевых групп; всех нильпотентных групп; всех сверхразрешимых групп (теорема 7.3.19 [47–А]).

В разделе 7.4 доказано, что если \mathfrak{F} – формация групп, то $\mathfrak{F}^*(n)$ – формация p -арных групп (теорема 7.4.15 [49–А]). В доказательстве теоремы 7.4.15 существенно используется теорема 7.4.10 [29–А], описывающая свойства обертывающей группы Поста. Теорема 7.4.20 [48–А] утверждает, что если \mathfrak{X} – многообразие групп, то $\mathfrak{X}^*(n)$ – многообразие p -арных групп, а согласно теореме 7.4.21 если \mathfrak{X} – неабелево многообразие групп, все конечные группы которого абеле-

вы. то $\mathfrak{X}^*(n)$ – неабелево многообразие n -арных групп все конечные n -арные группы которого абелевы.

В разделе 7.5 для всякого многообразия групп \mathfrak{X} , определяемого системой тождеств Σ , решена задача нахождения систем тождеств $\Sigma(n)$ и $\Sigma^*(n)$, определяющих соответственно многообразия $\mathfrak{X}(n)$ и $\mathfrak{X}^*(n)$ (теоремы 7.5.3 [50–А] и 7.5.171 [51–А]).

Теорема 7.6.2 [49–А] из раздела 7.6 утверждает, что если \mathfrak{X} – Σ_1 -замкнутый класс групп, то $\mathfrak{X}^*(n)$ и $\mathfrak{X}(n)$ – Σ_1 -замкнутые классы n -арных групп, а ввиду теоремы 7.6.9 [49–А], для классов $\mathfrak{X}(n)$ верно и обратное утверждение. Из теоремы 7.6.2 вытекают соответствующие результаты Г. Виландта для конечных разрешимых групп, О. Кегеля для конечных нильпотентных групп и К. Дёрка для конечных сверхразрешимых групп.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории n -арных групп и их классов, проводимых в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, в Волгоградском государственном университете, в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Основные результаты диссертации опубликованы либо в англоязычных [5–А, 9–А, 16–А, 21–А], либо российских и украинских переводных журналах [8–А, 27–А, 32–А], что делает их доступными для использования не только в научных центрах Беларуси, но и за её пределами.

Результаты диссертации могут быть использованы при изучении n -арных полугрупп, n -арных квазигрупп, топологических n -арных групп и других близких к n -арным группам универсальных алгебр, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

- 1–А. Гальмак, А. М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: «Беларуская навука», –1999. – 182 с.
- 2–А. Гальмак, А. М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 196 с.
- 3–А. Гальмак, А. М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – 323 с.
- 4–А. Гальмак, А. М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2009. – 265 с.

Статьи в научных журналах

- 5–А. Galmak, A.M. Remarks on polyadic groups / A.M.Galmak // Quasigroups and related Systems. – 2000. – Vol. 7. – P. 67–70.
- 6–А. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в n -арной полугруппе / А.М. Гальмак // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. —2007. – №3, – С. 36–41.
- 7–А. Гальмак, А.М. Обобщённые морфизмы алгебраических систем / А.М.Гальмак // Вопросы алгебры. Гомель. – 1998. – Вып. 12. – С.36–46.
- 8–А. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги теорем Кэли и Биркгофа / А.М.Гальмак // Известия ВУЗов. Математика. – 2001. – №2 (465). – С. 13 – 18.
- 9–А. Galmak, A.M. Generalized morphisms of abelian m -ary groups / A.M.Galmak // Discussiones Mathematicae. General Algebra and Applications. – 2001. – №21, – P. 47–55.
- 10–А. Гальмак, А.М. О решетке конгруэнций n -арной группы / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2000. – № 3 (17) – С. 60–62.
- 11–А. Гальмак, А.М. О классах конгруэнции полиадической группы / А.М.Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2004. – №1 (17). – С. 118–123.
- 12–А. Гальмак, А.М. О смежных классах конгруэнции полиадической группы / А.М. Гальмак // Весник ВДУ ім. П.М. Машерова. – 2002. – №2 (24). – С. 114–118.
- 13–А. Гальмак, А.М. Теоремы об изоморфизмах для полиадических групп / А.М. Гальмак // Весці НАНБ. – 2001. – №1. – С. 26–31.
- 14–А. Гальмак, А.М. К определению инвариантных подмножеств в n -арной группе / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 1999. – № 2 – 3(3). – С. 88–90.
- 15–А. Гальмак, А.М. n -Арные аналоги нормальных подгрупп. / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2003. – № 2-3 (15). – С. 153–159.

16–А. Galmak, A.M. Some n -ary analogs of the notion of normalizer of an n -ary subgroup in a group / A.M. Galmak // *Buletinul academiei de stiinta a republicii Moldova. – Matematica.* – 2005. – № 3 (49). – P. 63–70.

17–А. Гальмак, А.М. m -Полунормализаторы в n -арной группе / А.М. Гальмак // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2006. – №5 (38). – С. 33–38.

18–А. Гальмак, А.М. Σ -нормальные n -арные подгруппы / А.М. Гальмак // *Вестник МДУ им. А.А. Куляшова.* – 2008. – №1 (29). – С. 130–137.

19–А. Гальмак, А.М. О Σ -нормальных n -арных подгруппах / А.М. Гальмак // *Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С.* – 2008. – №3. – С. 30–36.

20–А. Гальмак, А.М. О конгруэнциях и трансляциях n -арной группы / А.М. Гальмак // *Вестник ВДУ им. П.М. Машэрава.* – 2005. – № 3 (17). – С. 109–112.

21–А. Galmak, A.M. On congruences of n -ary groups / A.M. Galmak // *East Asian Mathematical Journal.* – 2005. – V. 21, №2. – P.211–248.

22–А. Гальмак, А.М. n -Арные аналоги холловских подгрупп / А.М. Гальмак // *Вестник МДУ им. А.А. Куляшова.* – 2001. – №2-3 (9). – С. 117–123.

23–А. Гальмак, А.М. Разложения обёртывающей группы Поста / А.М. Гальмак // *Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С.* 2005. – №3(49). – С. 14–18.

24–А. Гальмак, А.М. О разложениях в обёртывающей группе Поста / А.М. Гальмак // *Вестник МДУ им. А.А. Куляшова.* – 2006. – № 2-3 (24). – С. 182–189.

25–А. Гальмак, А.М. n -Арные аналоги центра группы / А.М. Гальмак // *Вестник МДУ им. А.А. Куляшова.* – 2005. – №1(20). – С. 90–97.

26–А. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги центра группы / А.М. Гальмак // *Вестник Полоцкого гос. ун-та. Серия С.* – 2004. – №11. – С. 24–28.

27–А. Гальмак, А.М. О теореме Шура для n -арных групп / А.М. Гальмак // *Украинский мат. журнал.* – 2006. – Т. 58. – №6. – С. 730–741.

28–А. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги коммутанта группы / А.М. Гальмак // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2008. – №2 (47). – С. 56–62.

29–А. Гальмак, А.М. Об обёртывающей группе полиадической группы / А.М. Гальмак // *Вестник НАНБ.* – 2006. – №3. – С. 15–20.

30–А. Гальмак, А.М. n -Арная подгруппа единиц / А.М. Гальмак // *Вестник НАН РБ.* – 2003. – №2. – С. 25–30.

31–А. Гальмак, А.М. Идемпотентные n -арные группы / А.М. Гальмак // *Вестник НАН РБ.* – 2000. – №2. – С. 42–45.

32–А. Гальмак, А.М. Силовское строение идемпотентных n -арных групп / А.М. Гальмак // *Укр. мат. журнал.* – 2001. – №11. – С. 1488–1494.

33–А. Гальмак, А.М. Холловы конгруэнции n -арных групп / А.М. Гальмак // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2004. – №6 (27). – С. 93–100.

34–А. Гальмак, А.М. Полиадические группы, допускающие регулярный автоморфизм / А.М. Гальмак // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2002. – № 5. Вопросы алгебры-18. – С. 104–111.

- 35–А. Гальмак, А.М. Полуабелевыe n -арные группы с идемпотентами / А.М.Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 1999. – № 2(12). – С. 5–60.
- 36–А. Гальмак, А.М. Многoместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАНБ. – 2008. – №3. – С. 28–34.
- 37–А. Гальмак, А.М. Многoместные неассоциативные операции на декартовых степенях // А.М. Гальмак / Весник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. – 2008. – №9. – С. 66–72.
- 38–А. Гальмак, А.М. О многoместных операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2008. – №2-3 (30). – С. 134–139.
- 39–А. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях n -арных групп / А.М. Гальмак // Весник Полоцкого гос. ун-та. Серия С. – 2009. – №3. – С. 57–62.
- 40–А. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях n -арных группоидов / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2009. – №2-3 (33). – С. 172–178.
- 41–А. Гальмак, А.М. Об операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. Серия В. – 2010. – №1 (35). – С. 34–38.
- 42–А. Гальмак, А.М. . К определению класса $\mathfrak{X}(n)$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2000. – №2-3 (6). – С. 74–78.
- 43–А. Гальмак, А.М. Многообразия $\mathfrak{X}(n)$ / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава, – №1(15), – 2000. – С. 74–78.
- 44–А. Гальмак, А.М. О решетке многообразий n -арных групп / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2002. – №2-3. – С. 67–69.
- 45–А. Galmak, А.М. Formations of palyadic groups / А.М. Galmak // Известия ГГУ им Ф. Скорины. – 2000. – № 3 (16). – С. 199–200.
- 46–А. Гальмак А.М. К определению класса $\mathfrak{X}^*(n)$ / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2001. – №2 (20). – С. 100–104.
- 47–А. Гальмак, А.М. Классы n -арных групп, определяемые классами групп / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2004. – №4. – С. 35–37.
- 48–А. Гальмак, А.М. Многообразия полиадических групп / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі – 2002. – №2. – С. 39–40.
- 49–А. Гальмак, А.М. Лемма Фраттини для n -арных групп / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2009. – №3. – С. 62–67.
- 50–А. Гальмак, А.М. Σ_c - замкнутые классы полиадических групп / А.М.Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2002. – №1. – С. 30–34.
- 51–А. Гальмак, А.М. Тождества многообразия $\mathfrak{X}(n)$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2002. – №1 (11). – С. 81–89.
- 52–А. Гальмак, А.М. Тождества многообразия. $\mathfrak{X}^*(n)$ / А.М. Гальмак // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4. – С. 45–50.

53–А. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги подгрупповых функторов / А.М. Гальмак // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2010. – № 1(58). – С.174–184.

Препринты

54–А. Гальмак, А.М. Определения n -арной группы / А.М. Гальмак. – Гомель, 1994. – 43 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 16.)

55–А. Гальмак, А.М. n -Арная подгруппа единиц / А.М. Гальмак. – Гомель, 1998. – 23 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 77.)

56–А. Гальмак, А. М. Идемпотенты в n -арных группах / А.М. Гальмак. – Гомель, 1998. – 28 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 81.)

57–А. Гальмак, А. М n -Арные аналоги центра группы / А.М. Гальмак. – Могилев, 2004. – 35 с. – (Препринт / Ин-т оптики НАН Беларуси; № 16.)

Тезисы докладов конференций

58–А. Гальмак, А.М. Об определении n -арной группы / А.М. Гальмак // Междунар. алгебраич. конф., посвящ. памяти А. И. Ширшова (1921–1981): тез. докл., Новосибирск, 20–25 авг. 1991 г. / Ин-т математики Сибирск. отдел. АН СССР, Алтайский гос. ун-т. – Новосибирск, 1991. – С. 30.

59–А. Гальмак, А.М. О некоторых новых определениях n -арной группы / А.М. Гальмак // Третья Междунар. конф. по алгебре, посвящ. памяти М.И. Карганолова (1928–1976): тез. докл., Красноярск, 23–28 авг. 1993 г. / Красноярский гос. ун-т, ин-т математики Сибирск. отдел. Российск. акад. наук. – Красноярск, 1993 – с. 33–34. -

60–А. Гальмак, А. М. n -Арные аналоги теоремы Биркгофа / А.М. Гальмак // Междунпр. конф. « Проблемы алгебры и кибернетики», посвящ. памяти академика С.А. Чунихина: материалы конф., Гомель. / Мин-во обр. и науки Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т. им. Ф. Скорины, Белорусский гос. ун-т, Гомельский филиал ин-т математики АН Беларуси, Белорусское республиканское агенство научнб-техн. и деловой информации. – Гомель, 1995. – С. 49

61–А. Гальмак, А.М. Аналоги теоремы Поста / А.М. Гальмак // VII Бел. матем. конф. : тез. докл., Минск, 18–22 ноября 1996 г. / Мин-во обр. и науки Республики Беларусь, Бел. матем. общ-во, Бел. гос.ун-т, Ин-т математики акад. наук. Беларуси. – Минск, 1996 – Ч.1 – с. 61–62.

62–А. Гальмак, А.М. Полиадические группы, допускающие автоморфизм с единственным неподвижным элементом / А.М. Гальмак // Междунар. алгебр. конф. в Украине, посвящ. памяти профессора Л.А. Кулужнина (1914–1990): тез. докл., Киев–Винница, 9–16 мая 1999г. / Киевский ун-т им. Т. Шевченко, Львов-

ский гос. ун-т им. И. Франко, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Винницкий гос. пед. ун-т им. М. Коцюбинского. – Винница, 1999 – с. 69–70.

63–А. Гальмак, А.М. Первая теорема об изоморфизмах для n -арных групп / А.М. Гальмак // VIII Бел. математ. конф.: тез. докл. междунар. конф., Минск, 19-24 июня 2000 г. / Бел. математ. общ-во, Бел. гос. ун-т, Ин-т математики Нац. акад. наук Беларуси, Госкомитет по науке и технологиям, Мин-во обр. Республики Беларусь. – Минск, Беларусь, 2000. – Ч. 2. – С. 28.

64–А. Гальмак, А.М. Теоремы об изоморфизмах для n -арных групп / А.М. Гальмак // IV Междунар. алгебраич. конф., посвящ. 60-летию проф. Ю.И. Мерзлякова: тез. докл., Новосибирск, 7–11 авг. 2000 г. / Ин-т математики им. С.Л. Соболева Сибирск. отдел. Российской акад. наук; редкол.: В.Г. Бардаков [и др.]. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. – С. 57–59.

65–А. Гальмак, А.М. О решетке конгруэнций полиадической группы / А.М. Гальмак // Гашюцова теория классов групп и др. алгебраических систем: тез. докл. междунар. научн. конф., посвящ. 80-летию проф. В. Гашюца. Гомель, 16–21 окт. 2000 г. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; под общ. ред. Л.А. Шеметкова. – Гомель, 2000. – С. 25–26.

66–А. Гальмак, А.М. n -Арный аналог теоремы Виландта / А.М. Гальмак // Гашюцова теория классов групп и др. алгебраических систем: тез. докл. междунар. научн. конф., посвящ. 80-летию проф. В. Гашюца. Гомель, 16–21 окт. 2000 г. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; под общ. ред. Л.А. Шеметкова. — Гомель, 2000. – С. 26–27.

67–А. Гальмак А.М. Об n -арных подгруппах, определяемых конгруэнциями / А.М. Гальмак // Третья Междунар. алгебр. конф. в Украине: тез. докл., Сумы, 2-8 июля 2001 г. / Ин-т математики НАН Украины, Киевский нац. ун-т им. Т. Шевченко, Харьковский нац. ун-т им. В.Н. Кардина, Львовский нац. ун-т им. И. Франко, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Сумский гос. пед. ун-т им. А. А. Макаренко. – Сумы, 2001. – С. 152–153.

68–А. Гальмак, А.М. О классах n -арных групп / А.М. Гальмак // Третья Междунар. алгебр. конф. в Украине: тез. докл., Сумы, 2–8 июля 2001 г. / Ин-т математики НАН Украины, Киевский нац. ун-т им. Т. Шевченко, Харьковский нац. ун-т им. В.Н. Кардина, Львовский нац. ун-т им. И. Франко, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Сумский гос. пед. ун-т им. А. А. Макаренко. – Сумы, 2001. – С. 152–153.

69–А. Гальмак, А.М. Многообразия n -арных групп / А.М. Гальмак // Междунар. матем. конф., посвящ. столетию начала работы Д.А. Граве (1863–1936) в Киевском ун-те: тез. докл., Киев, 17–22 июня 2002 г. / Ин-т математ. НАН Украины, Киевский нац. ун-т им. Т. Шевченко. – Киев, 2002. – с. 79–80.

70–А. Гальмак, А.М. О конгруэнциях полиадической группы / А.М. Гальмак // V Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и

приложения»: тез. докл., Тула, 19–20 мая 2003 г. / Мин-во обр. Российской Федерации, Российская акад. наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, Матем. Ин-т. им. В.А. Стеклова, Российская акад. наук, Московский гос. пед. ун-т, Тульский гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, Тульский гос. ун-т, . – Тула, 2003. – С. 72–73.

71–А. Гальмак, А.М. О тождествах многообразия $\mathfrak{X}^*(n)$ / А.М. Гальмак // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Московского ун-та и 75-летию кафедры высшей алгебры: тез. докл., Москва, 2004 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова: Изд-во механико-математ. факультета МГУ. – Москва, 2004. – С. 34–35.

72–А. Гальмак, А.М. Холловы конгруэнции n -арных групп / А.М. Гальмак // VI Междунар. конф., по-свящ. 100-летию Н.Г. Чудакова «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тез. докл., Саратов, 13–17 сент. 2004 г. / Мин-во науки и обр. Российск. Федерации, Российск. акад. наук, Московск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, Математ. ин-т им. В.А. Стеклова Рос-сийск. акад. Наук, Мос-ковск. гос. пед. ун-т, Тульский гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, Саратовский гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского, Чебышевский Фонд. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2004. – С. 41–42.

73–А. Gal'mak, A.M. On congruences of polyadic groups / A.M. Gal'mak // 5th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts. Odessa, July 20–27, 2005. / Odessa I.I Mechnikov National University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Universite of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, Odessa A.S. Popov National Academy of Communication, Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University; редкол.: В.В. Кириченко [и др.]. – Odessa, 2005. – P. 72

74–А. Гальмак, А.М. Об одном изоморфизме в n -арных группах / А.М. Гальмак // Классы групп и алгебр: тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, Гомель, 5–7 окт. 2005 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики Нац. Акад. наук Беларуси, Луганский гос. пед. ун-т им. Т.Г. Шевченко; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 56–57.

75–А. Гальмак, А.М. n -Арные аналоги корадикала группы / А.М. Гальмак // Классы групп, алгебр и их приложения: тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9–11 июл. 2007 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т математики Нац. Акад. наук Белору-си, Луганский гос. пед. ун-т им. Т.Г. Шевченко; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 61–62.

76–А. Гальмак, А.М. Лемма Фраттини для n -арных групп / А.М. Гальмак // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша: тез. докл., Москва, 2008 г. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова: Изд-во механико-математ. факультета МГУ. – Москва, 2008. – С. 65–67.

РЭЗІЮМЭ

Гальмак Аляксандр Міхайлавіч

n-Арныя групы і іх класы

Ключавыя словы: *n*-арная аперацыя, *n*-арная група, *n*-арны гомамарфізм, ідэмпатэнт, кангруэнцыя, камутант, шматстайнасць, фармацыя.

У дысертацыі распрацаваны новыя метады даследвання *n*-арных груп і іх класаў. Вызначаны новыя ўласцівасці і заканамернасці кангруэнцый *n*-арных груп, *n*-арных груп з ідэмпатэнтамі, фармацый і шматстайнасцей *n*-арных груп. Развязана задача распазнання *n*-арных груп у класах універсальных алгебр з асацыятыўнай *n*-арнай аперацыяй з дапамогай раўнанняў з лікам невядомых большым за адзінку. Вызначаны і вывучаны *n*-арныя марфізмы. Атрыманы *n*-арны аналаг тэарэмы Біркгофа пра выяўленне групы аўтамарфізмамі падыходзячай універсальнай алгебры. Даказана, што *n*-арную паўгрупу ўсіх эндамарфізмаў паслядоўнасці $n - 1$ камутатыўных універсальных алгебр можна пераўтварыць ў камутатыўную універсальную алгебру, ў якой выконваюцца некаторыя сістэмы тэарэмаў. Развіта тэорыя кангруэнцый *n*-арных груп. Атрыманы тэарэмы Шрайера і Жардана-Гельдэра для *n*-арных груп. Атрыманы станоўчы адказ на пытанне: ці будзе камутант *n*-арнай групы канечным, калі цэнтр гэтай *n*-арнай групы мае ў ёй канечны індэкс? Разпрацавана тэорыя *n*-арных груп з ідэмпатэнтамі. Даказана, што рашотка ўсіх шматстайнасцей бінарных груп ізаморфна ўкладваецца ў рашотку ўсіх шматстайнасцей *n*-арных груп. Атрыманы *n*-арныя аналагі тэарэмы А.Ю. Альшанскага пра існаванне неабелевай шматстайнасці груп, усе канечныя групы якой абелевы. Развіта тэорыя фактарызацыі *n*-арных груп, у прыватнасці абагульнены тэарэмы Г. Віландта, О. Кегеля і К Дзёрка.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарытычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследваннях па тэорыі *n*-арных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Гальмак Александр Михайлович

n-Арные группы и их классы

Ключевые слова: *n*-арная операция, *n*-арная группа, *n*-арный гомоморфизм, идемпотент, конгруэнция, коммутант, многообразие, формация.

В диссертации разработаны новые методы исследования *n*-арных групп и их классов. Установлены новые свойства и закономерности конгруэнций *n*-арных групп, *n*-арных групп с идемпотентами, формаций и многообразий *n*-арных групп. Решена задача распознавания *n*-арных групп в классах универсальных алгебр с ассоциативной *n*-арной операцией с помощью уравнений с числом неизвестных большим единицы. Определены и изучены *n*-арные морфизмы. Получен *n*-арный аналог теоремы Биркгофа о представлении группы автоморфизмами подходящей универсальной алгебры. Доказано, что *n*-арную полугруппу всех эндоморфизмов последовательности $n - 1$ коммутативных универсальных алгебр можно преобразовать в коммутативную универсальную алгебру, в которой выполняются некоторые системы тождеств. Развита теория конгруэнций *n*-арных групп и даны некоторые приложения этой теории. Получены теоремы Шрайера и Жордана-Гёльдера для *n*-арных групп. Получен положительный ответ на вопрос: будет ли коммутант *n*-арной группы конечным, если центр этой *n*-арной группы имеет в ней конечный индекс? Разработана теория *n*-арных групп с идемпотентами. Доказано, что решётка всех многообразий бинарных групп изоморфно вкладывается в решётку всех многообразий *n*-арных групп. Получены *n*-арные аналоги теоремы А.Ю. Ольшанского о существовании неабелевого многообразия групп, все конечные группы которого абелевы. Развита теория факторизации *n*-арных групп, в частности обобщены теоремы Г. Виландта, О. Кегеля и К. Дёрка.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории *n*-арных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Alexander Galmak

n-Ary groups and their classes

Keywords: n-ary operation, n-ary group, n-ary homomorphism, idempotent, congruence, kommutator n-ary subgroup, variety, formation.

In this dissertation new methods for research of n-ary groups and their classes are developed. New laws and properties of congruences of n-ary groups, n-ary groups with idempotents, formations and varieties of n-ary groups are established. The problem of recognizing n-ary groups in the classes of universal algebras with associative n-ary operation by means of the equations with the number of unknowns greater than one is solved. The n-ary morphism are defined and studied. The n-ary analogue of the Birkhoff theorem on the representation of group by automorphisms of a suitable universal algebra is obtained. It is proved that the n-ary semigroup of all endomorphisms of a sequence of $n - 1$ commutative universal algebras can be transformed into a universal commutative algebra, in which some given systems laws are fulfilled. The theory of congruences of n-ary groups is developed and some applications of this theory are given. The theorems Schreier and Jordan-Holder for n-ary groups are obtained. A question that the kommutator n-ary subgroup has finite cardinality if the center of the n-ary group has finite index is solved positive. The theory of n-ary groups with idempotents is developed. It is proved that the lattice of all varieties of binary groups isomorphically embedded in the lattice of all varieties of n-ary groups. It is obtained n-ary analogues of A. Y. Olshansky theorem on the existence of nonabelian variety of groups in which all finite groups are abelian. The theory of factorization of n-ary groups are developed, in particular the H. Wielandt, O. Kegel and K. Derk's theorems are generalized.

All basic results of the dissertation are new. They have a theoretical character and may be used in the investigations in theories of n-ary groups and their classes, and also at reading special courses in universities.

