УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ И СОПРЯЖЕННОСТИ ИНЪЕКТОРОВ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ

Е.Д. Волкова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В работе все рассматриваемые группы конечны. Основополагающим результатом в теории классов Фиттинга является теорема Гашюца–Фишера–Хартли, которая обобщает классические теоремы Силова и Холла и состоит в следующем: для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Развитие и обобщение теоремы Гашюца–Фишера–Хартли приводит к задаче о существовании инъекторов в группе (в общем случае неразрешимой) и нахождения классов Фиттинга, в которых любые два инъектора сопряжены. Используя метод σ-свойств А.Н. Скибы в теории классов Фиттинга, в настоящей работе такую задачу решим для $\mathfrak{H}$-инъекторов, где $\mathfrak{H}$ – σ-класс Хартли, определяемый постоянной H_σ-функцией, и σ – произвольное разбиение множества всех простых чисел. Доказано, что если $\mathfrak{H}$ – σ-класс Хартли, определяемый H_σ-функцией h такой, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X} \neq \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi = \sigma(\mathfrak{H})$, и группа G такова, что фактор $G/G_{\mathfrak{X}}$ Π-скован, то в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.

Материал и методы. *Материалом для исследования являются инъекторы в группе и их свойства. При этом использованы терминология и методы абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, теории классов Фиттинга.*

Результаты и их обсуждение. *Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Группу G называют $\mathfrak{F}$-скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Класс Фиттинга называется σ-классом Хартли, если $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для некоторого отображения (H_σ-функции) $f: \sigma \to$ {классы Фиттинга}, где $\Pi = \{\sigma_i \in \sigma : h(\sigma_i) \neq \emptyset\}$. Пусть $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех Π-разложимых групп, т.е. класс всех σ-нильпотентных Π-групп. Доказано, что если $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для некоторого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и всех $\sigma_i \in \Pi$ и G – группа такая, что фактор $G/G_{\mathfrak{X}}$ Π-скован, то в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Заключение. *В работе решена задача существования инъекторов и их сопряженности для σ-класса Хартли, определяемого постоянной H_σ-функцией.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, σ-класс Хартли, $\mathfrak{H}$-инъектор.*

ON EXISTENCE AND CONJUGACY OF INJECTORS IN A FINITE GROUP

E.D. Volkova
Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”

All groups in this paper are finite. The fundamental result in the theory of Fitting classes is the theorem of Gaschütz–Fischer–Hartley which is in fact a generalization of the classical Sylow and Hall theorems and is as follows: for any Fitting class $\mathfrak{F}$ each soluble group G has $\mathfrak{F}$-injectors and every two of them are conjugate in G. The development and generalization of Gaschütz–Fischer–Hartley theorem leads to the problem about the existence of injectors in a group (generally unsolvable) and finding Fitting classes in which any two injectors are conjugate. Using the method of σ-properties of A.N. Skiba in the theory of Fitting classes, in this paper such problem is solved for $\mathfrak{H}$-injectors, where $\mathfrak{H}$ is a σ-class Hartley, defined by invariable H_σ-function and σ be a partition of the set of all primes. It is proved that if $\mathfrak{H}$ is a σ-class Hartley, defined by H_σ-function h such that $h(\sigma_i) = \mathfrak{X} \neq \emptyset$ for all $\sigma_i \in \Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ and G is a group such that factor $G/G_{\mathfrak{X}}$ is Π-constrained, group G has $\mathfrak{F}$-injectors and every two of them are conjugate.

Material and methods. *The material for the research is injectors in a group and their properties. The paper used the terminology and methods of abstract group theory and the theory of classes of groups, in particular, the theory of Fitting classes.*

Findings and their discussion. *A Fitting class is a class of $\mathfrak{F}$ groups that is closed in relation to taking normal subgroups and products of normal $\mathfrak{F}$-subgroups. A group G is called $\mathfrak{F}$-constrained, if $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. Let σ be a partition of the set of all primes $\mathbb{P}$. The Fitting class $\mathfrak{F}$ is called σ-class Hartley, if $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ for some mapping (H_σ-function) $f: \sigma \to$ {Fitting classes}, where $\Pi = \{\sigma_i \in \sigma : h(\sigma_i) \neq \emptyset\}$. Let $\mathfrak{N}_\Pi$ be a class of all Π-decomposable groups, that is, a class of all σ-nilpotent Π-groups. It is proved that if $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ for some nonempty Fitting class $\mathcal{X}$ and all $\sigma_i \in \Pi$ and G is a group such that factor $G/G_{\mathfrak{X}}$ is Π-constrained, then G has $\mathfrak{F}$-injectors and every two of them are conjugate.*

Conclusion. *In the paper the problem of the existence of injectors and their conjugacy for σ-class Hartley, defined by H_σ-function is solved.*

Key words: *Fitting class, σ-class Hartley, $\mathfrak{H}$-injector.*

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. *Классом групп* называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой *G* и все группы, изоморфные *G*. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе *G* существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Подгруппу *V* группы *G* называют $\mathfrak{F}$-*инъектором*, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп *G*, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы *N* группы *G*.

Основополагающий результат в теории классов Фиттинга разрешимых групп – теорема Гашюца, Фишера и Хартли [2], которая обобщает классические теоремы Силова и Холла и состоит в следующем: *для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G*.

Развитие теоремы Гашюца–Фишера–Хартли осуществлялось в двух направлениях. Во-первых, это ослабление условия разрешимости, во-вторых, описание структуры инъекторов и их характеризация. Решению первой задачи были посвящены работы Л.А. Шеметкова [3], В. Го и Н.Т. Воробьева [4]. Кроме того, в [5–7] описывалось решение проблемы существования $\mathfrak{X}$-инъекторов в произвольной группе [8, вопрос 11.117].

Во многих случаях определяющим в решении указанных задач является локальный метод изучения разрешимых групп посредством радикалов и классов Фиттинга, который впервые был предложен Б. Хартли [9]. В работах А.Н. Скибы [10–11] был предложен оригинальный метод исследования групп и их классов при помощи наличия у них σ-свойств, дуализированный для локальных классов Фиттинга в [12] и состоящий в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа *n*, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы *G*. Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа *G* называется *σ-нильпотентной* или *σ-разложимой,* если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

Напомним, что *произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *классов групп* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G: \exists\, N \lhd G, N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F})$; *произведением* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – класс групп $\left(G: G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}\right)$. Хорошо известно, что если $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ [1, p. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Всякое отображение вида $h: \sigma \rightarrow \{$классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто H_σ-*функцией* [12]. Если *h* – H_σ-функция, то символом $Supp(h)$ обозначают носитель *h*, т.е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Пусть $\Pi = Supp(h)$ и $LH_\sigma(h) = \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно.

Определение. *Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем σ-классом Хартли, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, то $\mathfrak{H}$ называют классом Хартли* [4].

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Группу *G* назовем Π-*разложимой*, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots G_k$, где G_i – σ_i-группа для всех $\sigma_i \in \Pi$. Напомним, что *G* называют Π-*группой*, если $|G|$ является Π-числом. Символом $\mathfrak{N}_\Pi$ будем обозначать класс всех Π-разложимых групп, т.е. класс всех σ-нильпотентных Π-групп.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то группа *G* $\mathfrak{F}$-*скованна*, если $C_G\left(G_{\mathfrak{F}}\right) \leq G_{\mathfrak{F}}$. В частности, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\Pi$ и $C_G\left(G_{\mathfrak{N}_\Pi}\right) \leq G_{\mathfrak{N}_\Pi}$, группу *G* назовем Π-*скованной*.

Представляет интерес задача существования и сопряженности $\mathfrak{H}$-инъекторов для σ-класса Хартли в Π-скованных группах. Ее решение представляет

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс Фиттинга, h –* H_σ*-функция такая, что* $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ *для любого* $\sigma_i \in \Pi = Supp(h)$ *и G – группа. Если* $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ *и фактор* $G/G_\mathfrak{X}$ П*-скован, то справедливы следующие утверждения:*

1) подгруппа V группы G является $\mathfrak{H}$*-инъектором G в точности тогда, когда* $V/G_\mathfrak{X}$ *–* $\mathfrak{N}_\Pi$*-инъектор* $G/G_\mathfrak{X}$*;*

2) в G существуют $\mathfrak{H}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены*.

Материал и методы. Материалом для исследования являются инъекторы в группе и их свойства. При этом использованы терминология и методы абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, теории классов Фиттинга.

Предварительные сведения. Напомним, если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе *G* существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют $\mathfrak{F}$*-радикалом G* и обозначают $G_\mathfrak{F}$.

Лемма 1.1 [1, лемма IX.1.1(a)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга. Если* $N \trianglelefteq G$*, то* $N_\mathfrak{F} = N \cap G_\mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы *N* группы *G*. Если класс групп $\mathfrak{F}$ является одновременно гомоморфом и классом Фиттинга, то его называют *радикальным гомоморфом*.

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– непустые классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ [1, замечание IX.1.11];

2) пусть $\mathfrak{M}$ *– радикальный гомоморф. Если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$*, то* $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$ [13, лемма 4].

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппу *V* группы *G* называют $\mathfrak{F}$*-максимальной* в *G*, если $H \in \mathfrak{F}$ и из условий $V \leq H \leq G$ и $H \in \mathfrak{F}$ следует, что $V = H$.

Лемма 1.3 [1, замечание IX.1.3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и G – группа. Тогда справедливы утверждения:*

1) если V – $\mathfrak{F}$*-инъектор G и* $K \trianglelefteq G$*, то* $V \cap K$ *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор K*;

2) если V – $\mathfrak{F}$*-максимальная подгруппа G и* $V \cap M$ *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G*;

3) если V – $\mathfrak{F}$*-инъектор G и* $\alpha: G \to G\alpha$ *– изоморфизм, то* $V\alpha$ *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор* $G\alpha$.

Лемма 1.4 [3, лемма 5]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и группа G* $\mathfrak{F}$*-скована. Если K – нормальная подгруппа группы G, то K является* $\mathfrak{F}$*-скованной*.

Лемма 1.5 [3, теорема 1]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_t$ $(t \geq 2)$*, где все* $\mathfrak{F}_i$ *являются непустыми классами Фиттинга и* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \emptyset$ *при* $i \neq j$*. Пусть G такая группа, что* $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$*. Пусть* $\mathfrak{H}_i = \times_{i \neq j} \mathfrak{F}_j$ *и* $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$*. Для каждого* i, $1 \leq i \leq t$ *выберем* $\mathfrak{F}_i$*-подгруппу* V_i *в* C_i*, содержащую* $G_{\mathfrak{F}_i}$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $V_i \leftthreetimes V_j = 1$ *для всех* $i \neq j$*;*

2) $V_1 V_2 \ldots V_t = V_1 \times V_2 \times \ldots V_t$ *–* $\mathfrak{F}$*-подгруппа, содержащая* $G_\mathfrak{F}$*;*

3) если V_i $\mathfrak{F}_i$*-максимальна в* C_i *для любого* i*, то* $V_1 V_2 \ldots V_t$ $\mathfrak{F}$*-максимальна в G*;

4) если для каждого i *подгруппа* V_i *является* $\mathfrak{F}_i$*-инъектором в* C_i*, то* $V_1 V_2 \ldots V_t$ *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор в G*;

5) если S – $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G, то* $S_{\mathfrak{F}_i}$ *–* $\mathfrak{F}_i$*-инъектор в* C_i *для любого* i*;*

6) если для каждого i *подгруппа* V_i *сопряжена в* C_i *с некоторой подгруппой* U_i *из* C_i*, то* $U_1 U_2 \ldots U_t$ *является подгруппой, сопряженной с* $V_1 V_2 \ldots V_t$ *в G*.

Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ и $\Pi = Supp(h)$. Тогда H_σ-функцию h назовем:

(1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;

(2) *устойчивой*, если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \neq j$ и $\sigma_i, \sigma_j \in \Pi$;

(3) *постоянной*, если $h(\sigma_i) = h(\sigma_j)$ для всех $\sigma_i, \sigma_j \in \Pi$.

Лемма 1.6 [14, лемма 2.1]. *Если* $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ *для* H_σ*-функции h, то* $\sigma(\mathfrak{H}) = \Pi$*, где* $\Pi = Supp(h)$.

Лемма 1.7 [14, лемма 2.4]. *Каждый* σ*-класс Хартли* $\mathfrak{H}$ *определяется устойчивой приведенной* H_σ*-функцией*.

Нетрудно заметить, что если H_σ-функция h σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$ постоянна, то она является устойчивой приведенной. Действительно, поскольку $h(\sigma_i) = h(\sigma_j)$ для всех $\sigma_i \neq \sigma_j$, $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_j'} = h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ и поэтому $h(\sigma_i) \subseteq \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\mathfrak{E}_{\sigma_j} = \mathfrak{H}$.

Основной результат работы доказывается в несколько этапов. Вначале для его доказательства установим справедливость трех лемм.

Пусть G – группа и h – H_σ-функция с носителем П. Подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in \Pi} G_{h(\sigma_i)}$ назовем h_σ-*радикалом* G.

Напомним, что группу G называют:

1) П-*группой*, если для любого $\Pi \subseteq \sigma$ верно включение $\pi(G) \subseteq \Pi$;

2) σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;

3) σ-*нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times \dots G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, \dots, G_n$.

Пусть $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех П-разложимых групп, т.е. класс всех σ-нильпотентных П-групп; $\mathfrak{E}_\Pi$ – класс всех П-групп; $\mathfrak{E}_{\Pi'}$ – класс всех Π'-групп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия факторгрупп и подпрямых произведений.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ – σ-класс Хартли для некоторой устойчивой приведенной H_σ-функции h, $\Pi = Supp(h)$. Если G такая группа, что фактор G/G_h П-скован и $G_\mathfrak{H} \le V$, то $V \in \mathfrak{H}$ в том и только том случае, если фактор V/G_h является $\mathfrak{N}_\Pi$-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V \in \mathfrak{H}$ и $G_\mathfrak{H} \le V$. Тогда $V_{h(\sigma_i)} \cap G_\mathfrak{H} = (G_\mathfrak{H})_{h(\sigma_i)} = G_{h(\sigma_i)}$. Значит, $[V_{h(\sigma_i)}, G_\mathfrak{H}] \le V_{h(\sigma_i)} \cap G_\mathfrak{H} = G_{h(\sigma_i)}$. Следовательно, $V_{h(\sigma_i)} \le C_G(G_\mathfrak{H}/G_{h(\sigma_i)})$ для любого $\sigma_i \in \Pi$.

Докажем, что $G_\mathfrak{H}/G_h = (G/G_h)_{\mathfrak{N}_\Pi}$. Пусть $(G/G_h)_{\mathfrak{N}_\Pi} = R/G_h$. Так как по определению σ-класса Хартли $G_\mathfrak{H} \in \mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $G_\mathfrak{H} \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Поэтому $G_\mathfrak{H}/G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Поскольку $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация, ввиду изоморфизма

$$(G_\mathfrak{H}/G_{h(\sigma_i)})/(G_h/G_{h(\sigma_i)}) \cong G_\mathfrak{H}/G_h,$$

$G_\mathfrak{H}/G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, $G_\mathfrak{H}/G_h \in \cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_\Pi$. Таким образом, $G_\mathfrak{H}/G_h \le (G/G_h)_{\mathfrak{N}_\Pi}$ и $G_\mathfrak{H} \le R$.

Докажем обратное включение. Так как $R/G_h \in \mathfrak{N}_\Pi$, то $R/G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Ввиду изоморфизма $(R/G_h)/(R_{h(\sigma_i)}G_h/G_h) \cong R/R_{h(\sigma_i)}G_h$, $R/R_{h(\sigma_i)}G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Поскольку $G_h \trianglelefteq R$, по лемме 1.1 $G_{h(\sigma_i)} = (G_h)_{h(\sigma_i)} = G_h \cap R_{h(\sigma_i)} \le R_{h(\sigma_i)}$. Пусть $\sigma_i \ne \sigma_j$. Тогда

$$G_{h(\sigma_i)}G_{h(\sigma_j)}/G_{h(\sigma_i)} \cong G_{h(\sigma_j)}/G_{h(\sigma_j)} \cap G_{h(\sigma_i)} = G_{h(\sigma_j)}/\left(G_{h(\sigma_j)}\right)_{h(\sigma_i)}.$$

По лемме 1.7 H_σ-функция h является устойчивой. Значит, $G_{h(\sigma_j)} \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Следовательно, $G_{h(\sigma_j)}/\left(G_{h(\sigma_j)}\right)_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. Таким образом, $G_{h(\sigma_i)}G_{h(\sigma_j)}/G_{h(\sigma_i)}$ – σ_i'-группа для всех $\sigma_i \ne \sigma_j$. Поэтому $G_h/G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Ввиду изоморфизма

$$R_{h(\sigma_i)}G_h/R_{h(\sigma_i)} \cong G_h/G_hR_{h(\sigma_i)} \cong (G_h/G_{h(\sigma_i)})/(G_h \cap R_{h(\sigma_i)}/G_{h(\sigma_i)})$$

получаем $R_{h(\sigma_i)}G_h/R_{h(\sigma_i)}$ – σ_i'-группа для всех $\sigma_i \in \Pi$. Поскольку $G_h \le R_{h(\sigma_i)}$, $R_{h(\sigma_i)}G_h = R_{h(\sigma_i)}$ и $R/R_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $R \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{H}$. Итак, $G_\mathfrak{H}/G_h = (G/G_h)_{\mathfrak{N}_\Pi}$.

Так как фактор G/G_h П-скован по условию и $G_\mathfrak{H}/G_h = (G/G_h)_{\mathfrak{N}_\Pi}$, то $C_{G/G_h}(G_\mathfrak{H}/G_h) \le G_\mathfrak{H}/G_h$. Тогда $C_G(G_\mathfrak{H}/G_h) \le G_\mathfrak{H}$. Из $V_{h(\sigma_i)} \le C_G(G_\mathfrak{H}/G_{h(\sigma_i)}) \le C_G(G_\mathfrak{H}/G_h)$ следует $V_{h(\sigma_i)} \le G_\mathfrak{H}$. Более того, $V_{h(\sigma_i)} = G_{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Поскольку $V \in \cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, $V/V_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $V/V_{h(\sigma_i)} = V/G_{h(\sigma_i)} \in \cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_\Pi$. Следовательно, $V/G_h \in \mathfrak{N}_\Pi$.

Обратно, пусть $V/G_h \in \mathfrak{N}_\Pi$. Тогда, используя рассуждения, аналогичные приведенному выше доказательству включения $L \le G_\mathfrak{H}$, получаем, что $V \in \mathfrak{H}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ – σ-класс Хартли для некоторой устойчивой приведенной H_σ-функции h, $\Pi = Supp(h)$. Если фактор G/G_h П-скован и V/G_h – $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор G/G_h, то V – $\mathfrak{H}$-инъектор G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства будем использовать индукцию по порядку группы G. Если G – единичная группа, то утверждение очевидно. Пусть $G \ne 1$ и M – произвольная максимальная нормальная подгруппа G. Докажем вначале, что $G_h/G_{h(\sigma_j)}$ – σ_j'-группа. По лемме 1.7 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $\sigma_i \ne \sigma_j$. Тогда ввиду изоморфизма

$$G_{h(\sigma_j)}G_{h(\sigma_i)}/G_{h(\sigma_j)} \cong G_{h(\sigma_i)}/\left(G_{h(\sigma_i)}\right)_{h(\sigma_j)}$$

имеем $G_{h(\sigma_j)}G_{h(\sigma_i)}/G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. По определению класса Фиттинга $G/G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $\sigma_j \in \Pi$. Пусть $M_h = \prod_{\sigma_i \in \Pi} M_{h(\sigma_i)}$. Тогда, используя изоморфизм

$$(G_h \cap M)G_{h(\sigma_j)}/G_{h(\sigma_j)} \cong (G_h \cap M)G_{h(\sigma_j)}/M_{h(\sigma_j)},$$

получаем $(G_h \cap M)/M_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для любого $\sigma_j \in \Pi$. Поскольку

$$(G_h \cap M)/M_{h(\sigma_j)}/M/M_{h(\sigma_i)} \cong (G_h \cap M)/M_h,$$

то $(G_h \cap M)/M_h \in \cap_{\sigma_j \in \Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_j'} = \mathfrak{E}_{\Pi'}$. Так как $\sigma(G_h) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ и по лемме 1.6 $\sigma(\mathfrak{H}) = \Pi$, то $(G_h \cap M)/M_h \in$ $\in \mathfrak{E}_{\Pi'} \cap \mathfrak{E}_{\Pi} = (1)$. Таким образом, $G_h \cap M = M_h$.

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $G_h \leq M$. Тогда $G_h = M_h$. Поскольку V/G_h – $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор G/G_h, по утверждению 1 леммы 1.3 $V \cap M/M_h$ – $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор M/M_h. Так как фактор G/G_h П-скован, то по лемме 1.4 M/M_h П-скован. Следовательно, по индукции $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор M.

Пусть $V < V_1$ и V_1 – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа G. Поскольку $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа в M, $V \cap M = V_1 \cap M$. Значит, $V_1 \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор M для любой максимальной подгруппы M в G. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.3 V_1 является $\mathfrak{H}$-инъектором G. Тогда $G_{\mathfrak{H}} \leq V_1$. По лемме 2.1 $V_1/G_h \in \mathfrak{N}_\Pi$. Так как V/G_h – $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор G/G_h, V/G_h – максимальная $\mathfrak{N}_\Pi$-подгруппа G/G_h, что противоречит $V/G_h < V_1/G_h$. Таким образом, $V = V_1$ и V – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа G. По утверждению 2 леммы 1.3 V – $\mathfrak{H}$-инъектор G.

Пусть теперь $G_h \not\leq M$. Тогда $G = G_h M$. Ввиду изоморфизма $G/G_h \cong M/G_h \cap M = M/M_h$, по утверждению 3 леммы 1.3 $V \cap M/M_h$ $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор M/M_h. По индукции $V \cap M$ является $\mathfrak{H}$-инъектором M. По аналогии с предыдущим случаем получаем, что V – $\mathfrak{H}$-инъектор G.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $\Pi \subseteq \sigma$, $\mathfrak{N}_\Pi$ *– класс всех* П*-разложимых групп и группа* G П*-скована. Тогда в любой группе* G *существуют* $\mathfrak{N}_\Pi$*-инъекторы и любые два из них сопряжены*.

Доказательство. Для доказательства существования и сопряженности $\mathfrak{N}_\Pi$-инъекторов группы G проверим выполнимость условий леммы 1.5. Заметим, что класс $\mathfrak{N}_\Pi$ представим в виде $\mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{E}_{\sigma_1} \times \ldots \times \mathfrak{E}_{\sigma_k}$, где все $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – непустые классы Фиттинга, и $\pi(\sigma_i) \cap \pi(\sigma_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Теперь будем использовать обозначения, введенные в лемме 1.5. Пусть $\mathfrak{H}_i = \times_{j \neq i} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $C_i = C_G\left(G_{\mathfrak{H}_i}\right)$.

Поскольку по условию группа G П-скована, то по лемме 1.4 ее подгруппа C_i является П-скованной. Следовательно, C_i П-разложима и для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ в группе C_i существует холлова σ_i-подгруппа V_i, которая является $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$-инъектором в C_i. Тогда по утверждению 4) леммы 1.5 подгруппа $H = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k$ – $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор группы G и по утверждению 5) леммы 1.5 каждый $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор строится таким образом. Сопряженность $\mathfrak{N}_\Pi$-инъекторов в группе G следует по утверждению 6) леммы 1.5, поскольку любые два $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$-инъектора сопряжены в C_i.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. 1. Пусть M – максимальная нормальная подгруппа G. Поскольку h – постоянная H_σ-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$, h является устойчивой приведенной H_σ-функцией. Ввиду П-скованности фактора $G/G_{\mathfrak{X}}$ по лемме 2.3 в $G/G_{\mathfrak{X}}$ существует $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектор $V/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, по лемме 2.2 V – $\mathfrak{H}$-инъектор G.

Обратно покажем, что если V – $\mathfrak{H}$-инъектор G, то $V/G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектором $G/G_{\mathfrak{X}}$. Поскольку V – $\mathfrak{H}$-инъектор G, подгруппа $V \cap S$ является $\mathfrak{H}$-максимальной подгруппой G для любой субнормальной подгруппы S группы G. Так как $V \cap S \in \mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $(V \cap S)/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Значит,

$$(V \cap S)/G_{\mathfrak{X}} \in \cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_\Pi.$$

Поэтому достаточно показать, что $V/G_{\mathfrak{X}} \cap S/G_{\mathfrak{X}} = (V \cap S)/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}_\Pi$-максимальная подгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$.

Предположим, что $(V \cap S)/G_{\mathfrak{X}}$ не является $\mathfrak{N}_\Pi$-максимальной подгруппой $G/G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $(V \cap S)/G_{\mathfrak{X}} < D/G_{\mathfrak{X}}$, где $D/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}_\Pi$-максимальная подгруппа $G/G_{\mathfrak{X}}$. Очевидно, $D \in \cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} =$ $= LH_\sigma(h) = \mathfrak{H}$. Поскольку $V \cap S$ – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа G, справедливо равенство $V \cap S = D$. Получили противоречие. Таким образом, $V/G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{N}_\Pi$-инъектором $G/G_{\mathfrak{X}}$.

2. Существование $\mathfrak{H}$-инъекторов следует из утверждения 1). Докажем их сопряженность. Допустим, что F – $\mathfrak{H}$-инъектор G, отличный от $\mathfrak{H}$-инъектора V группы G. Тогда по утверждению 1) $F/G_{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{N}_{\Pi}$-инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$. По лемме 2.3 подгруппы $F/G_{\mathfrak{X}}$ и $V/G_{\mathfrak{X}}$ сопряжены в $G/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $\mathfrak{H}$-инъекторы F и V сопряжены в G.

Теорема доказана.

Заключение. В работе решена задача существования инъекторов и их сопряженности для σ-класса Хартли, определяемого постоянной H_{σ}-функцией.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
3. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1(15). – С. 5–13.
4. Guo, W. On Injectors of Finite Soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob’ev // Comm. in Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
5. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. – P. 292–298.
6. Iranzo, M.J. Existenciade injectores en groups finites respecto de ciertas class de Fitting / M.J. Iranzo, F. Perez-Monazor // Publ. Mat. Univ. Autonima Barselona. – 1988. – Vol. 32. – P. 57–59.
7. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – P. 186–187.
8. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. – 18-е изд., доп. – Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. СО РАН, 2014.
9. Hartley, B. On Fischer’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
10. Skiba, A.N. On σ-properties of Finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – № 4(21). – P. 89–96.
11. Skiba, A.N. On σ-properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3(24). – P. 70–83.
12. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob’ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.
13. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
14. Воробьев, Н.Т. Инъекторы конечных σ-разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – Т. 54, № 1. – С. 75–84.

R E F E R E N C E S

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
3. Shemetkov L.A. *Izv. Gomel. gos. un-ta im. F. Skoryny. Voprosy algebry* [Journal of Gomel State University. Issues of Algebra], 1999, 1(15), pp. 5–13.
4. Guo, W. On Injectors of Finite Soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob’ev // Comm. in Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
5. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bull. Austral Math. Soc. – 1985. – Vol. 32. – P. 292–298.
6. Iranzo, M.J. Existenciade injectores en groups finites respecto de ciertas class de Fitting / M.J. Iranzo, F. Perez-Monazor // Publ. Mat. Univ. Autonima Barselona. – 1988. – Vol. 32. – P. 57–59.
7. Shemetkov L.A. *Izvestija Gomelskogo gos. un-ta im. F. Skoryny. Voprosy algebry* [Journal of Gomel State University. Issues of Algebra], 2000, 3(16), pp. 186–187.
8. *Nereshenniye voprosy teorii grupp. Kourovskaya tetrad* [Unresolved Problems in Group Theory. Kourov Notebook], Novosibirsk: Izd-vo in-ta matem. SO RAN, 2014.
9. Hartley, B. On Fischer’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
10. Skiba, A.N. On σ-properties of Finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – № 4(21). – P. 89–96.
11. Skiba, A.N. On σ-properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3(24). – P. 70–83.
12. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob’ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.
13. Vorobyev N.T. *Matem. zametki* [Mathem. Notes], 1988, 43(2), pp. 161–168.
14. Vorobyev N.T., Volkova E.D. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Issues of Physics, Mathematics and Technology], 2023, 54(1), pp. 75–84.

Поступила в редакцию 12.04.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: ekaterina.lancetova@gmail.com – Волкова Е.Д.