МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Устименко Владимир Викторович
учитель высшей категории, кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова
Молодечкина Анастасия Андреевна
магистрант кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова

Понимаем, решаем, доказываем.

В статье рассматриваются основные методы доказательства неравенств. Указывается схема их применения. Каждый метод проиллюстрирован на подробно разобранном примере.

Введение. Выполнение заданий на доказательство оказывает положительное влияние на развитие математического мышления школьников, формирование таких мыслительных операций как сравнение, аналогия, анализ, синтез, индукция, дедукция, а также умения совершать небольшие исследования. В современной школе этой теме уделяется мало внимания и задачи на установление истинности неравенств практически отсутствуют. Лишь в седьмом классе в параграфе «Числовые неравенства» рассматривается доказательство неравенств путем составления разности левой и правой частей неравенства. В связи с этим задачи на доказательство неравенств вызывают у учащихся непреодолимые трудности.

Цель исследования – выявить всевозможные методы доказательства неравенств, проиллюстрировав их примерами.

Основная часть. Существуют различные методы доказательства неравенств. Далее будут приведены некоторые из них, достаточно удобные и легкие для понимания учащимися.

Первый метод (по определению).

Основан на использовании определения:
$A > B$ $(A < B, A \le B,\ A \ge B)$

тогда и только тогда, когда
$A - B > 0$ $(A - B < 0, A - B \le 0, A - B \ge 0)$.

Чтобы доказать неравенство $A > B$, надо составить разность $A - B$, и путем тождественных преобразований выражений показать, что данная разность положительна.

Пример 3. Доказать неравенство
$a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$, если $a + b + c \ge 0$.

Доказательство. Составим разность

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) +$$

$$+ c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc =$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b + c) + c^3 =$$

$$= (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) -$$

$$- 3abc(a + b + c) =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) =$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \ge 0$$

Так как
$a + b + c \ge 0,\ (a - b)^2 \ge 0,\ (a - c)^2 \ge 0, (b - c)^2 \ge 0,$

то $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \ge 0$

Следовательно, неравенство
$a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$ доказано.

Второй метод (синтетический метод).

Основан на синтетическом расуждении по следующей схеме: $(A \wedge T) \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$, где A – условие доказываемого неравенства, T – совокупность ранее доказанных утверждений, $B_1, B_2,\ \dots\ , B_n$, B – выводимые друг за другом следствия, последнее из которых доказываемое неравенство. Самым сложным для учеников при использовании предложенного выше способа является начало доказательства $(A \wedge T)$.

Пример 4. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,$$

если $ab \geq 0$.

Доказательство. Возьмем верное неравенство $(a-b)^2 \geq 0$.

Изнегоследуетнеравенство $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$. Далее следует неравенство $\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}\geq 0$. Из него следует, что $\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}-\frac{2ab}{ab}\geq 0$. Потом следует, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geq 0$. И, наконец, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Таким образом, последним следствием является доказываемое неравенство [1].

Третий метод (восходящий анализ).

Основан на рассуждении по следующей схеме:

$$B_1 \Rightarrow B, B_2 \Rightarrow B_1, \dots, B_n \Rightarrow B_{n-1}, (A \wedge T) \Rightarrow B_n$$

где B_1 – достаточное условие для доказываемого неравенства B, B_2 – достаточное условие для B_1, и так далее, B_n – достаточное условие для B_{n-1}, $A \wedge T$ (условие доказываемого неравенства и совокупность ранее доказанных утверждений) – достаточное условие для B_n.

Пример 5. Доказать неравенство

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$, где a, b, c – любые действительные числа.

Доказательство. Для того чтобы доказать данное неравенство, достаточно доказать $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$. Для того чтобы доказать это неравенство, достаточно доказать $(a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)\geq 0$ Для того чтобы доказать полученное неравенство, достаточно доказать $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$. Для того чтобы доказать это неравенство, достаточно воспользоваться известными $(a-b)^2\geq 0$, $(a-c)^2\geq 0$, $(b-c)^2\geq 0$, а также тем, что сумма неотрицательных чисел неотрицательна. Таким образом наше неравенство доказано.

Четвёртый метод (нисходящий анализ).

Основан на рассуждении по схеме: $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_n \Rightarrow (A \wedge T)$, где B_1 – необходимое условие для B, B_2 – для B_1 и так далее, B_n – необходимое условие для B_{n-1}, $A \wedge T$ – для B_n.

Вторая часть рассуждения проводится в обратном порядке: $(A \wedge T) \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow B_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow B$. В результате получаем доказательство требуемого неравенства.

Пример 6. Доказать неравенство

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2,$$

где a – любое действительное число.

Доказательство. Допустим, что доказываемое неравенство верно. Из него последовательно выводим следствия. Получим:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2 \Rightarrow \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}-2\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1-2\sqrt{a^2+1}+1}{\sqrt{a^2+1}}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 0.$$

Получили истинное неравенство. Далее проведем рассуждение в обратном порядке.

$$\frac{\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1-2\sqrt{a^2+1}+1}{\sqrt{a^2+1}}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}-2\geq 0 \Rightarrow \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\geq 2.$$

Следовательно, неравенство доказано.

Пятый метод (метод от противного). Покажем суть данного метода на следующем примере:

Пример 7. Доказать неравенство

$$\frac{a+b+c}{3}\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что доказываемое неравенство ошибочно. Тогда должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

являющееся отрицанием исходного неравенства. Далее «построим» цепочку тождественных преобразований, приводящую к противоречию. Получим:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-$$

$$-(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2<0.$$

Последнее неравенство неверно, так как $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ и их сумма неотрицательна. Поэтому наше предположение ложно, а верно, что

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

Шестой метод (использование известных неравенств).

Пример 8. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$, где a, b, c – любые действительные числа.

Доказательство. Воспользуемся известными неравенствами $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$. Преобразуем их к виду $a^2+b^2 \geq 2ab$, $a^2+c^2 \geq 2ac$, $b^2+c^2 \geq 2bc$. Сложим эти неравенства и получим: $a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$ или $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$. Разделим обе части неравенства на 2. В результате получим:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc.$$

Таким образом, неравенство доказано.

Пример 9. Доказать неравенство $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$, если $p>0$ и $q<0$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

где $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Можно записать $p+2 \geq 2\sqrt{2p}$, $q+2 \geq 2\sqrt{2q}$, $p+q \geq 2\sqrt{pq}$.

Перемножим эти неравенства:

$(p+2)(q+2)(p+q) \geq 8\sqrt{2p \cdot 2p \cdot pq}$, т.е. $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$.

Таким образом, неравенство доказано.

Седьмой метод (метод математической индукции). Основан на применении теоремы о математической индукции. Практическое использование данного метода сводится к следующему:

1) проверка справедливости неравенства при $n=1$;

2) предполагается, что неравенство верно при $n=k(k>1)$;

3) на основе предположения доказывается, что неравенство верно при $n=k+1$.

Пример 10. Доказать, что при $n \geq 3$ $(n \in N)$ имеет место неравенство $2^n > 2n+1$.

1) При $n=3$ получаем $2^3 > 2\cdot 3+1 \Rightarrow 8>7$- данное утверждения является верным.

2) Допустим, что неравенство верно при $n=k(k>3)$, т.е. $2^k > 2k+1$.

3) На основе предположения докажем, что при $n=k+1$ неравенство $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ верно.

Перепишем это неравенство в виде $2^k+2^k > 2k+1+2$. Но полученное верно, так как $2^k > 2k+1$ по предположению, а $2^k > 2$ при $k>3$. Тогда на основании принципа математической индукции делаем вывод, что неравенство $2^n > 2n+1$ верно для всех натуральных $n \geq 3$ [2].

Изложенный выше материал можно предложить учащимся в виде школьной лекции. Вместе с тем заключительным моментом здесь должно быть доказательство неравенства различными методами. Это хорошо вписывается в технологию укрупнения математических задач.

Пример 11. Доказать неравенство

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geq 0,$$

где $a \geq 0, b \geq 0$.

Первый метод. Составим разность $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ и покажем, что она неотрицательна. Получим:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0.$$

Второй метод. Возьмем верное неравенство $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ и начнем выводить друг за другом следствия. Получим:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Третий метод. Для того чтобы выполнялось неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, достаточно чтобы соблюдалось неравенство $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. А для него, чтобы выполнялось неравенство $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$. Для этого достаточно, чтобы $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы были $a \geq 0, b \geq 0$.

Четвёртый метод. Предположим, что неравенство верно. Начнем выводить из него следствия.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Вторая часть рассуждения в обратном порядке:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Пятый метод. Предположим, что данное неравенство ложно. Тогда верно следующее неравенство:

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}.$$

Преобразуем его следующим образом:

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \Rightarrow +\mathrm{b} < 2\sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+\mathrm{b}-2\sqrt{ab} < 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 < 0.$$

Последнее является противоречием. Следовательно, наше предположение неверно.

Заключение. Таким образом выявлены следующие методы доказательства неравенств: с помощью определения, синтетический, восходящий анализ, нисходящий анализ, от противного, с использованием известных неравенств, математическая индукция. Для каждого из них определены точные схемы рассуждений, пользуясь которыми можно доказать предложенное неравенство. Кроме того, под каждую схему приведены убедительные примеры.

Вместе с тем данная тема может быть предложена учащимся профильных математических классов, на факультативных занятиях, при подготовке к олимпиадам, для творческой исследовательской деятельности.

Следует также отметить, что учителю математики целесообразно подобрать систему заданий для самостоятельной работы под каждый метод доказательства. Положительный эффект можно получить и от неравенств, которые можно доказать различными способами.

Литература

Вярьвильская, О.Н. С неравенствами на равных. Задачи на экзаменах по математике в БГУ в 1996 году с решениями и комментариями: справочное пособие/ О.Н. Вярьвильская, В.А. Габринович, В.Н. Громак. – Минск: Белгосуниверситет, 1997. – 178 с.

1. Письменный, Д.Т. Готовимся к экзамену по математике: математика для старшеклассников / Д.Т. Письменный. – 12-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 352 с.