

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

**ВАСИЛЬЕВ**  
Владимир Александрович

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ  
С ЗАДАНЫМИ СИСТЕМАМИ  
ОБОВЩЕННО МОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.06 — математическая логика,  
алгебра и теория чисел

Гомель, 2017

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель: **Скиба Александр Николаевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии.

Официальные оппоненты: **Беняш-Кривец Валерий Вацлавович**,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Белорусский государственный университет, кафедра высшей алгебры и защиты информации;

**Трофимук Александр Александрович**,  
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры, учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кафедра алгебры, геометрии и математического моделирования.

Оппонирующая организация — учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Защита состоится «05» июля 2017 года в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3-1. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан «05» июня 2017 года.

Ученый секретарь  
совета по защите диссертаций

Д. А. Ходанович

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)<sup>3</sup>

## ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы являются конечными.

Понятие нормальной подгруппы играет важную роль в современной теории групп, что явилось основным стимулом для нахождения и применений различных обобщений условия нормальности. При этом наиболее полезными оказались условия субнормальности, модулярности и условие добавляемости для подгрупп в смысле Оре<sup>1</sup>.

Подгруппа  $U$  группы  $G$  называется субнормальной в  $G$ , если существует цепь подгрупп  $U_0, U_1, \dots, U_s$  такая, что

$$U = U_0 \trianglelefteq U_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq U_{s-1} \trianglelefteq U_s = G.$$

Исследованием субнормальных и обобщенно субнормальных подгрупп занимались многие отечественные и зарубежные математики, в том числе и такие известные алгебраисты, как Бэр, Виландт, Кегель, Б.И. Плоткин, Робинсон, Стоунхьюер, Хирш, Л.А. Шеметков. В частности, Кегелем было введено следующее понятие, играющее основополагающую роль в современных исследованиях по теории обобщенно субнормальных подгрупп и их приложений. Пусть  $\mathfrak{F}$  — класс групп. Тогда подгруппа  $U$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в смысле Кегеля<sup>2</sup> или  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальной<sup>3</sup> в  $G$ , если

$$U = U_0 \leq U_1 \leq \dots \leq U_{s-1} \leq U_s = G,$$

где либо  $U_{i-1} \trianglelefteq U_i$ , либо  $U_i/(U_{i-1})_{U_i} \in \mathfrak{F}$  для всех  $i = 1, \dots, s$ . Такое обобщение субнормальности нашло приложения в работах многих математиков (Аль-Шаро, Баллестер-Болинше, Бейдлеман, А.С. Вегера, Г. Венбин, Джараден, В.А. Ковалева, С.Ф. Каморников, В.С. Монахов, В.И. Мурашко, Перец-Рамос, Рагланд, В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба, В.Н. Тютянов, Фельдман, Л.А. Шеметков, П. Шмид, Эстебан-Ромеро и др.).

Говорят, что подгруппа  $A$  группы  $G$  удовлетворяет условию добавляемости по Оре<sup>1,4</sup> в  $G$ , если  $G$  имеет такую нормальную подгруппу  $T$ , что  $G = AT$  и  $A \cap T \trianglelefteq G$ . Легко видеть, что если подгруппа  $A$  либо нормальна в  $G$ , либо имеет нормальное дополнение в  $G$ , то она удовлетворяет условию добавляемости по Оре. Теория групп с условием добавляемости по Оре и с

<sup>1</sup>Ore, O. Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. — 1939. — Vol. 5, № 2. — P. 431–460.

<sup>2</sup>Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. — 1978. — Vol. 30, № 1. — P. 225–228.

<sup>3</sup>Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. — Dordrecht: Springer-Verlag, 2006. — 391 p.

<sup>4</sup>Guo, W. Finite groups with generalized Ore supplement conditions for primary subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Algebra. — 2015. — Vol. 432. — P. 205–227.

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)<sup>4</sup>

обобщенным условием добавляемости по Оре для подгрупп получила широкое развитие и применение в работах Асаада, Баллестера-Болинше, Ванга, Г. Венбина, Вея, Джарадена, Ш. Ли, Мохамеда, Рамадана, А.Н. Скибы, Хелиела, Шама, Л.А. Шеметкова, Г. Шуина и др.

Подгруппа  $M$  группы  $G$  называется *модулярной* в  $G$ , если она является модулярным элементом в смысле Куроша<sup>5</sup> решетки всех подгрупп группы  $G$ , т. е. выполняются следующие условия:

- 1)  $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$  для всех  $X \leq G, Z \leq G$  таких, что  $X \leq Z$ , и
- 2)  $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$  для всех  $Y \leq G, Z \leq G$  таких, что  $M \leq Z$ .

Благодаря усилиям многих математиков, была получена классификация всех групп, в которых каждая подгруппа является модулярной (Бэр, Ивасава, Наполитани, Сато, Цахер и др.). Такие группы были названы  $M$ -группами и они совпадают с группами, решетка подгрупп которых модулярна. Естественным подходом в развитии результатов, связанных с изучением  $M$ -групп, является задача изучения групп с достаточно большим числом модулярных подгрупп (Шмидт<sup>6</sup>). Примеры показывают, что класс всех модулярных подгрупп шире класса всех квазинормальных подгрупп. Достоинством этого обобщения нормальности состоит в том, что модулярность не сводится ни к квазинормальности, ни к субнормальности. Шмидтом было доказано, что подгруппа является квазинормальной в группе  $G$  тогда и только тогда, когда она одновременно является субнормальной и модулярной подгруппой в  $G$ . В дальнейшем, результаты Шмидта<sup>6,7,8,9,10</sup> и результаты, представленные в его монографии<sup>5</sup>, получили развитие в работах многих других математиков, которые изучали группы с различными заданными системами модулярных и обобщенно модулярных подгрупп (Х. Бин, В.А. Ведерников, Н.Г. Дука, Б. Ли, К.А. Решко, А.Н. Скиба, В.И. Харламова, Дж. Хуанг, Циммерман и др.). Тем не менее, влияние модулярных подгрупп и обобщенно модулярных подгрупп на строение группы по-прежнему остается малоизученным.

Данная диссертация посвящена дальнейшему анализу, развитию и применению модулярных и обобщенно модулярных подгрупп и, в частности, приложениям таких подгрупп в теории  $K$ - $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп и теории подгрупп с обобщенным условием добавляемости по Оре.

<sup>5</sup>Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. — Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. — 572 p.

<sup>6</sup>Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. — 1969. — Vol. 13. — P. 358–377.

<sup>7</sup>Schmidt, R. Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen / R. Schmidt // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1969. — Vol. 34, № 1. — P. 115–125.

<sup>8</sup>Schmidt, R. Modular subgroups of finite groups II / R. Schmidt // J. Ill. Math. — 1970. — Vol. 14, № 2. — P. 344–362.

<sup>9</sup>Schmidt, R. Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups / R. Schmidt // Proc. London Math. Soc. — 1975. — Vol. 3, № 3. — P. 287–300.

<sup>10</sup>Schmidt, R. Gruppen mit modularem Untergruppenverband / R. Schmidt // Arch. Mathematik. — 1986. — Vol. 46, № 2. — P. 118–124.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ<sup>5</sup> ФРАГМЕНТ)

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнялась на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» с 2011 по 2016 гг. в соответствии со следующими научными темами:

— «Разработка и применение методов локального анализа в вопросах классификации конечных групп по характеру вложения подгрупп», входящей в государственную программу научных исследований на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»), регистрационный номер в БелИСА — 20112850;

— «Влияние модулярных и обобщенно модулярных подгрупп на строение конечных групп», грант Министерства образования Республики Беларусь для аспирантов на 2015 год, регистрационный номер в БелИСА — 20150365.

### Цель и задачи исследования

Целью диссертации является описание конечных групп с заданными системами обобщенно модулярных подгрупп.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

– получить признаки принадлежности группы с заданными системами обобщенно модулярных подгрупп насыщенной формации;

– найти признак  $p$ -нильпотентности группы с обобщенно модулярными силовскими  $p$ -подгруппами;

– получить описание сверхразрешимого гиперцентра групп с заданными модулярными подгруппами;

– решить задачу о замене условий  $S$ -перестановочности в основных результатах работы А.Н. Скибы<sup>11</sup> условиями модулярности для подгрупп;

– получить описание строения класса всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами.

Объектом исследования являются конечные группы с заданными системами обобщенного модулярных подгрупп, в частности, с заданными системами  $m$ -добавляемых,  $\mathcal{U}_m$ -субнормальных и субмодулярных подгрупп.

Предметом исследования является влияние свойств обобщенно модулярных подгрупп на строение группы.

---

<sup>11</sup>Skiba, A.N. On weakly  $s$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. — 2007. — Vol. 315, № 1. — P. 192–209.

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)<sup>6</sup>

### **Научная новизна**

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены автором. В диссертационной работе получено решение задачи о замене условия  $S$ -перестановочности условием модулярности для подгрупп в основных результатах работы А.Н. Скибы<sup>11</sup>. Кроме того, была решена задача нахождения в группе систем подгрупп, субмодулярность которых приводит к принадлежности группы классу всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами (классу всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами).

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Признаки принадлежности группы с заданными системами  $m$ -добавляемых подгрупп насыщенной формации, содержащей все сверхразрешимые группы, теоремы 2.2.24 [2] и 2.2.25 [1].

2. Признак  $p$ -нильпотентности группы с условиями  $m$ -добавляемости на подгруппы силовой  $p$ -подгруппы, теорема 2.3.3 [3].

3. Описание обобщенного гиперцентра групп с заданными модулярными подгруппами, теоремы 2.4.3 [4] и 2.4.7 [5].

4. Признаки принадлежности группы с заданными системами  $\mathcal{U}_m$ -субнормальных подгрупп насыщенной формации, содержащей все сверхразрешимые группы, теоремы 2.5.14 и 2.5.15 [7].

5. Описание строения класса всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами, теоремы 3.1.16 и 3.1.17 [6].

6. Описание строения класса всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами, теоремы 3.2.7 и 3.2.8 [6].

7. Признаки принадлежности группы формациям групп с субмодулярными силовскими подгруппами, теоремы 3.3.11 и 3.3.12 [8].

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Александра Николаевича Скибы. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В работе [1], опубликованной совместно с научным руководителем, идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты диссертационной работы обсуждались и докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- научном алгебраическом семинаре кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»;
- Международной (42-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 30 января – 6 февраля 2011 г.);
- Международной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 4-9 ноября 2012 г.);
- Международной конференции «Алгебра и комбинаторика», посвященной 60-летию члена-корреспондента РАН А.А. Махнеева (Екатеринбург, 3-7 июня 2013 г.);
- 9-ой Международной алгебраической конференции в Украине (Львов, 8-13 июля 2013 г.);
- XVII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 24-26 марта 2014 г.);
- Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2-6 июня 2014 г.);
- XVIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 23-25 марта 2015 г.);
- Международной конференции, посвященной 75-летию Ю.Л. Ершова, «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 3-7 мая 2015 г.);
- Международной конференции и летней школы в честь 80-летия проф. В.А. Белоногова и 70-летия проф. В.А. Баранского «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 9-15 августа 2015 г.);
- X Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 70-летию Ю.А. Дрозда (Одесса, 20-27 августа 2015 г.);
- Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 14-18 сентября 2015 г.);
- XIX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 21-23 марта 2016 г.);
- Международной конференции, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского «XI Школа-конференция» (Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г.);
- Международной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 5-10 сентября 2016 г.).

### **Опубликование результатов диссертации**

По теме диссертационного исследования опубликовано 22 работы. Из них

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ  
ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Статьи*

1. Васильев, В.А. Об одном обобщении модулярных подгрупп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. — 2011. — Т. 63, № 10. — С. 1314–1325.

2. Васильев, В.А. Конечные группы с  $m$ -добавляемыми максимальными подгруппами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. — 2011. — № 4 (67). — С. 29–37.

3. Васильев, В.А. О  $p$ -нильпотентности одного класса конечных групп / В.А. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. — 2013. — № 3 (16). — С. 61–65.

4. Васильев, В.А. Конечные группы с модулярными подгруппами порядка 4 / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. — 2014. — № 3 (84). — С. 30–34.

5. Васильев, В.А. О  $\mathcal{U}\Phi$ -гиперцентрально вложенных подгруппах конечных групп / В.А. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. — 2015. — № 1 (22). — С. 66–71.

6. Васильев, В.А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1277–1288.

7. Vasilyev, V.A. A  $\mathcal{U}_m$ -subnormal subgroup of a finite group / V.A. Vasilyev // Acta Mathematica Hungarica. — 2016. — Vol. 148, № 1. — P. 117–131.

8. Васильев, В.А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп / В.А. Васильев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. — 2016. — № 2 (91). — С. 17–21.

*Материалы конференций*

9. Васильев, В.А. Конечные группы с модулярными подгруппами порядка 4 / В.А. Васильев // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVII Республ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 24–26 марта 2014 г.: в 2 ч. / Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. — Ч. 1. — С. 71–72.

10. Васильев, В.А. Конечные группы с модулярными подгруппами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Алгебра и математическая логи-



## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ<sup>21</sup> ФРАГМЕНТ)

ка: теория и приложения: материалы междунар. конф., Казань, 2–6 июня 2014 г. / Казанский федеральный ун-т. — Казань, 2014. — С. 154–155.

11. Васильев, В.А. О  $\mathfrak{U}_m$ -субнормальных подгруппах конечных групп / В.А. Васильев // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVIII Республ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2015 г.: в 2 ч. / Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. — Ч. 1. — С. 49–51.

12. Васильев, В.А. О группах с субмодулярными нормализаторами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XIX Республ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 21–23 марта 2016 г.: в 2 ч. / Гомельск. гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. — Ч. 1. — С. 47–48.

### *Тезисы докладов*

13. Васильев, В.А. Об  $m$ -добавляемых подгруппах конечных групп / В.А. Васильев // Современные проблемы математики: тез. Междунар. (42-й Всероссийской) молодежной школы-конференции, Екатеринбург, 30 января – 6 февраля 2011 г. / Ин-т математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург, 2011. — С. 184–185.

14. Васильев, В.А. Об одном признаке  $p$ -нильпотентности конечных групп / В.А. Васильев // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. — Минск, 2012. — Ч. 5. — С. 11–12.

15. Васильев, В.А. Об одном признаке сверхразрешимости конечных групп / В.А. Васильев // Алгебра и комбинаторика: тез. Междунар. конф., посвящ. 60-летию члена-корреспондента РАН А.А. Махнеева, Екатеринбург, 3–7 июня 2013 г. — Екатеринбург: УМЦ-УПИ, 2013. — С. 24.

16. Vasilyev, V.A. On  $\mathfrak{F}$ -modular subgroups of finite groups / V.A. Vasilyev // The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts of Reports, L'viv, July 8–13, 2013. — L'viv: Ivan Franko National University of L'viv, 2013. — P. 206.

17. Васильев, В.А. О  $\mathfrak{U}\Phi$ -гиперцентрально вложенных подгруппах конечных групп / В.А. Васильев // Мальцевские чтения: тез. Междунар. конф., посвящ. 75-летию Ю.Л. Ершова, Новосибирск, 3–7 мая 2015 г. — Новосибирск, 2015. — С. 93.

18. Vasilyev, V.A. On finite groups with submodular Sylow subgroups /

V.A. Vasilyev // Groups and Graphs, Algorithms and Automata: Abstracts of the International Conference and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor Vyacheslav A. Belonogov and of the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky, Yekaterinburg, August, 9–15, 2015. / N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. — Yekaterinburg, 2015. — P. 91.

19. Vasilyev, V.A. On  $\mathfrak{U}_m$ -subnormal subgroups of finite groups / V.A. Vasilyev // Abstracts of X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd, Odessa, August 20–27, 2015 / I.I. Mechnikov Odessa National University. — Odessa, 2015. — P. 121.

20. Vasilyev, V.A. On strongly supersoluble finite groups / V.A. Vasilyev // Дискретная математика, алгебра и их приложения: тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 14–18 сентября 2015 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол.: И.Д. Супруненко [и др.]. — Минск, 2015. — С. 82.

21. Vasilyev, V.A. On Products of Finite Groups with Submodular Sylow Subgroups / V.A. Vasilyev // XI Школа-конференция: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А.Ю. Ольшанского. Красноярск, 27 июля – 2 авг. 2016 г. / Сибирский федеральный ун-т, Ин-т математики СибО РАН, Ин-т вычислительного моделирования СибО РАН, Механико-математич. фак-т Московского гос. ун-та им. М.В. Ломоносова; отв. за вып. С.И. Башмаков [и др.]. — Красноярск, 2016. — С. 86–87.

22. Васильев, В.А. О некоторых признаках сильной сверхразрешимости конечных групп / В.А. Васильев // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. — Ч. 5. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; ред. С.Г. Красовский. — Минск, 2016. — С. 12–13.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)<sup>23</sup>

## РЭЗЮМЭ

Васільеў Уладзімір Аляксандравіч

### Канечныя групы з зададзенымі сістэмамі абагульнена мадулярных падгруп

**Ключавыя словы:** канечная група, мадулярная падгрупа, субмадулярная падгрупа,  $m$ -дадаваная падгрупа,  $\mathcal{U}_m$ -субнармальная падгрупа, моцна звышвырашальная група, сілаўская падгрупа, насычаная фармацыя.

**Мэта працы:** апісаць канечныя групы з зададзенымі сістэмамі абагульнена мадулярных падгруп ( $m$ -дадаваных,  $\mathcal{U}_m$ -субнармальных і субмадулярных падгруп).

**Метады даследавання:** метады доказу абстрактнай тэорыі груп і тэорыі класаў груп, у прыватнасці, метады тэорыі фармацый.

**Атрыманя вынікі і іх навізна.** Усталяваны прыметы прыналежнасці групы з зададзенымі сістэмамі  $m$ -дадаваных падгруп насычанай фармацыі, якая ўтрымлівае ўсе звышвырашальныя групы. Атрымана прымета  $p$ -нільпатэнтнасці групы з умовамі  $m$ -дадаванасці на падгрупы сілаўскай  $p$ -падгрупы. Апісаны абагульнены гіперцэнтр груп з зададзенымі мадулярнымі падгрупамі сілаўскіх падгруп. Знойдзены прыметы прыналежнасці групы з зададзенымі сістэмамі  $\mathcal{U}_m$ -субнармальных падгруп насычанай фармацыі, якая ўтрымлівае ўсе звышвырашальныя групы. Апісана будова класа ўсіх звышвырашальных груп з субмадулярнымі сілаўскімі падгрупамі і класа ўсіх груп з субмадулярнымі сілаўскімі падгрупамі.

Усе атрыманя вынікі з'яўляюцца новымі. Іх адметнай асаблівасцю з'яўляецца тое, што яны ахопліваюць многія раней вядомыя вынікі, а таксама даюць новыя ў якасці следстваў.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні.** Атрыманя ў дысертацыйнай працы вынікі маюць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі састаўных канечных груп, у прыватнасці, у далейшых даследаваннях будовы груп з зададзенымі сістэмамі абагульнена мадулярных падгруп, а таксама ў навучальным працэсе пры чытанні спецкурсаў для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў, напісанні курсавых і дыпломных прац і дысертацый.

**Вобласць прымянення:** сучасная тэорыя груп і іх класаў, тэорыя рашотак.

## РЕЗЮМЕ

Васильев Владимир Александрович

### Конечные группы с заданными системами обобщенно модулярных подгрупп

**Ключевые слова:** конечная группа, модулярная подгруппа, субмодулярная подгруппа,  $m$ -добавляемая подгруппа,  $\mathfrak{U}_m$ -субнормальная подгруппа, сильно сверхразрешимая группа, силовская подгруппа, насыщенная формация.

**Цель работы:** описать конечные группы с заданными системами обобщенно модулярных подгрупп ( $m$ -добавляемых,  $\mathfrak{U}_m$ -субнормальных и субмодулярных подгрупп).

**Методы исследования:** методы доказательства абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, методы теории формаций.

**Полученные результаты и их новизна.** Установлены признаки принадлежности группы с заданными системами  $m$ -добавляемых подгрупп насыщенной формации, содержащей все сверхразрешимые группы. Получен признак  $p$ -нильпотентности группы с условиями  $m$ -добавляемости на подгруппы силовской  $p$ -подгруппы. Описан обобщенный гиперцентр групп с заданными модулярными подгруппами силовских подгрупп. Найдены признаки принадлежности группы с заданными системами  $\mathfrak{U}_m$ -субнормальных подгрупп насыщенной формации, содержащей все сверхразрешимые группы. Описано строение класса всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами и класса всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами.

Все полученные результаты являются новыми. Их отличительной особенностью является то, что они охватывают многие ранее известные результаты, а также дают новые в качестве следствий.

**Рекомендации по использованию.** Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях по теории составных конечных групп, в частности, в дальнейших исследованиях строения групп с заданными системами обобщенно модулярных подгрупп, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ и диссертаций.

**Область применения:** современная теория групп и их классов, теория решеток.

## SUMMARY

Vasilyev Uladzimir Aliaksandravich

### **Finite groups with given systems of generalized modular subgroups**

**Keywords:** finite group, modular subgroup, submodular subgroup,  $m$ -supplemented subgroup,  $\mathfrak{U}_m$ -subnormal subgroup, strongly supersoluble group, Sylow subgroup, saturated formation.

**Aim of research:** to describe finite groups with given systems of generalized modular subgroups ( $m$ -supplemented,  $\mathfrak{U}_m$ -subnormal and submodular subgroups).

**Methods of research:** methods of proof of the abstract theory of groups and the theory of classes of groups, in particular, methods of the theory of formations.

**Obtained results and their novelty.** Criteria of membership of a group with given systems of  $m$ -supplemented subgroups to a saturated formation are established. The criterion of  $p$ -nilpotency of a group with  $m$ -supplemented conditions on subgroups of a Sylow  $p$ -subgroup is obtained. The generalized hypercenter of groups with given modular subgroups of Sylow subgroups is described. Criteria of membership of a group with given systems of  $\mathfrak{U}_m$ -subnormal subgroups to a saturated formation containing all supersoluble groups are found. The construction of the class of all supersoluble groups with submodular Sylow subgroups and the class of all groups with submodular Sylow subgroups is described.

All the results obtained are new. Their distinctive feature is that they cover many previously known results and give new ones as corollaries.

**Recommendations for use.** The results obtained in the dissertation are theoretical. They can be used in research on the theory of composite groups, in particular, in further research on the construction of groups with given systems of generalized modular subgroups. Also the dissertation materials can be useful in the educational process in delivering specialized courses for students of mathematical specialties, writing of term and diploma papers and dissertations.

**Areas of applications:** the modern theory of groups and their classes, the theory of lattices.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Научное издание

**ВАСИЛЬЕВ Владимир Александрович**

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ  
С ЗАДАНЫМИ СИСТЕМАМИ  
ОБОБЩЕННО МОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП**

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

01.01.06 — математическая логика,  
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 01.06.2017. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.

Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 60 экз. Заказ № 525.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования

«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий №1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель