

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.911.5

ВАСЬКОВСКИЙ
Максим Михайлович

Существование и свойства решений стохастических
дифференциальных уравнений с измеримыми коэффициентами в
бесконечномерных пространствах

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения

Минск, 2010

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — **Леваков Анатолий Афанасьевич**,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры высшей математики
факультета прикладной математики
и информатики
Белорусского государственного университета

Официальные оппоненты: **Лазакевич Николай Викторович**,
доктор физико-математических наук,
профессор,
профессор кафедры функционального анализа
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета

Жерело Анатолий Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник отдела нелинейного
и стохастического анализа
ГНУ "Институт математики НАН Беларуси"

Оппонирующая организация — Учреждение образования "Гомельский
государственный университет имени
Франциска Скорины"

Защита состоится 26 марта 2010 г. в 10.00 на заседании совета по защите
диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по
адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический факультет),
ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке
Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан **19** февраля 2010 г.

И. о. ученого секретаря
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор



В.А. Еровско

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям вызван тем, что они описывают процессы, происходящие в финансовой и экономической областях. Основной проблемой общей теории стохастических дифференциальных уравнений является задача нахождения условий, обеспечивающих существование решений. Многие методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений применимы и к стохастическим системам, что показано в работах К. Ито (1944, 1946), И.И. Гихмана (1950, 1951), А.В. Скорохода (1961), Н.В. Крылова (1971, 1977), Р.З. Хасьминского (1969), Е.Ф. Царькова (1989) и других. Стохастические дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями играют важную роль в теории автоматического управления, теории оптимального управления, а также в задачах сопряжения математических моделей различных физических, химических, биологических процессов. Проблеме существования решений и исследованию свойств решений стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах с измеримыми коэффициентами посвящены работы Н.В. Крылова (1971, 1977), М. Нисио (1973), А.Ю. Веретенникова (1983), М. Кизилевича (1995), Г. Да Прато, Ж. Обэна, Х. Франковской (1994, 1998), А. Рожкоша и Л. Сломинского (1997), А.А. Левакова (1997, 2003, 2007), Н.В. Лазаковича (1997, 1998, 2001, 2005), А.В. Жерсло (2002), В.П. Куренка и А.Н. Лещеева (2008) и многих других. Стохастические дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах охватывают уравнения в конечномерных пространствах, уравнения с запаздывающим аргументом, уравнения в частных производных. Исследования стохастических дифференциальных систем в бесконечномерных пространствах осуществлялись в работах К. Ито и М. Нисио (1967), Н.В. Крылова (1989), М. Вио (1974), Е.Ф. Царькова (1989), Г. Да Прато (1992, 1994, 2002), Е. Забчика (1992), Х. Франковской (1994), А. Якубовского, М. Каменского, П.Р. Де Фитта (2005), Э. Парду (1972), Ю.А. Розанова (1995), Б.Л. Розовского (1983), К. Лю (2006) и многих других. В диссертации продолжают эти исследования. Вводятся новые типы решений для стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в бесконечномерных пространствах и доказываются соответствующие теоремы существования. Проблема существования решений стохастических систем с разрывными коэффициентами в бесконечномерных пространствах исследуется во второй и третьей главах диссертации. В третьей главе диссертации для стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в бесконечномерном пространстве доказыва-

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ется теорема о зависимости решений от начальных условий и правых частей.

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью тесно связаны с дифференциальными включениями. Исследование дифференциальных включений было начато М.А. Маршо, С.Т. Зарембо (1934). Современное понимание дифференциальных включений принадлежит А.Ф. Филиппову (1960, 1985). Дифференциальные включения в конечномерном пространстве достаточно полно исследованы в работах А.Ф. Филиппова (1985), Ж.П. Обэна, А. Челлины, Г. Да Прато (1984, 1998), Г.В. Смирнова (2002). Изучению дифференциальных включений в банаховом пространстве посвящены работы А.А. Толстоногова (1986, 2000), А.А. Левакова (1981, 1982, 1987). Стохастические дифференциальные включения, как самостоятельный объект, впервые исследовались П. Крэ (1982). Теоремы существования решений стохастических дифференциальных включений получены в работах М. Кизилевича (1995), А.А. Левакова (1997), Ж.П. Обэна, Г. Да Прато (1988).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Математические структуры. Асимптотические характеристики стохастических, дифференциальных и дифференциально-алгебраических систем (2001–2005 гг., номер госрегистрации 20012722);

— Математические модели. Исследование свойств решений обыкновенных, сингулярных и стохастических дифференциальных систем (2006–2010 гг., номер госрегистрации 200616208).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является доказательство теорем существования решений и исследование свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами в бесконечномерных пространствах.

Положения, выносимые на защиту

Оценки функционалов от решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Теоремы существования слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с разрывными коэффициентами и вырожденным оператором диффузии.

Теорема существования решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа с измеримыми правыми частями в гильбертовом пространстве, теорема о зависимости решений от начальных условий и правых частей для стохастических эволюционных уравнений параболического типа.

Личный вклад соискателя

Работы [1, 2, 5, 8, 11, 12], написанные в соавторстве с научным руководителем А.А. Леваковым, посвящены исследованию стохастических дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве. Идеи совместных исследований были развиты автором и применены к исследованию стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, что отражено в работах [3, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15]. Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи и выбор методов исследования.

Апробация результатов диссертации

Результаты работы докладывались и обсуждались на четвертых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2005), на конференции по теории управления и математическому моделированию (Ижевск, 2006), на 4-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (АМАДЕ-2006) (Минск, 2006), на 63-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2006), на международной конференции "Еругинские чтения-2007" (Минск, 2007), на международной конференции "Applied Stochastic Models and Data Analysis" (ASMDA-2007) (Ханья, Греция, 2007), на 64-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2007), на 65-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2008), на международной конференции "International Workshop in Applied Probability" (IWAP-2008) (Компьер, Франция, 2009), на международной конференции "X Белорусская математическая конференция" (Минск, 2008), на международной конференции "Applied Stochastic Models and Data Analysis" (ASMDA-2009) (Вильнюс, Лит-

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ва, 2009), на семинаре отдела дифференциальных уравнений института математики НАН Беларуси (2006), на семинаре отдела целинейного анализа института математики НАН Беларуси (2009), на семинаре кафедры функционального анализа Белгосуниверситета (2009), на семинаре кафедры высшей математики Белгосуниверситета (2009). Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломом 1 степени Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2006), дипломом 1 степени Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2007), дипломом лауреата Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2008), грамотой конкурса студенческих научных работ Белгосуниверситета в области естественных и технических наук (2008), третьей премией Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2007), второй премией Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2008), первой премией Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2009).

Опубликованность результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах; из них 4 статьи в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (3 авторских листа), 3 статьи в сборниках научных трудов, 3 статьи в материалах трудов научных конференций, 5 тезисов докладов научных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей три главы, заключения и библиографического списка.

Объем диссертации — 108 страниц. Библиографический список содержит 95 наименований, включая собственные публикации автора, на 8 страницах.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ния $dX(t) = AX(t)dt + \tilde{f}(t, X(t))dt + \tilde{g}(t, X(t))dW(t)$ с начальным условием \tilde{X}_0 существует β -мартингалльное решение $X(t)$ уравнения $dX(t) = -AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$ с начальным условием X_0 , удовлетворяющее неравенству $d(P^{X(t_1)}, P^{\tilde{X}(t_1)}) \leq \varepsilon$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Работа посвящена развитию общей теории стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в бесконечномерных пространствах. В частности, установлены следующие результаты.

1. Получены оценки функционалов от решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений. Доказаны теоремы существования слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с разрывными правыми частями. В общем случае под решениями таких систем понимаются решения соответствующих стохастических дифференциальных включений. Приведены примеры, иллюстрирующие условия доказанных теорем. Эти результаты получены в работах [1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14] и изложены в главе 2.

2. Доказана теорема существования решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа с измеримыми правыми частями в гильбертовом пространстве. Под решением понимается решение стохастического эволюционного включения, построенного по уравнению. Доказана теорема о зависимости решений от начальных условий и правых частей для стохастических эволюционных уравнений параболического типа с измеримыми коэффициентами. Указанные результаты являются основными в главе 3, которая написана на основе работ [4, 7, 9, 10, 15].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты и методы диссертации могут быть использованы при проведении исследований общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1029–1042.
2. Леваков, А.А. Существование β -слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с измеримыми правыми частями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 10. — С. 1324–1333.
3. Васьковский, М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с измеримыми коэффициентами / М.М. Васьковский // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. — 2008. — № 1. — С. 64–70.
4. Васьковский, М.М. Теорема существования β -мартингалльных решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа с разрывными правыми частями / М.М. Васьковский // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2009. — № 3. — С. 40–50.

Статьи в сборниках научных трудов

5. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь "НИРС-2006" / Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2007. — С. 5–6.
6. Васьковский, М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений / М.М. Васьковский // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь "НИРС-2007" / Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2008. — С. 30–31.
7. Васьковский, М.М. Существование решений стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерном пространстве / М.М. Васьковский // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь "НИРС-2008" / Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2009. — С. 30–34.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Статьи в сборниках материалов научных конференций

8. Леваков, А.А. Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных включений / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Известия института математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. — 2006. — Т. 37, Вып. 3. — С. 81-82.

9. Vas'kovskii, M. Existence of martingale solutions of stochastic evolution inclusions / M. Vas'kovskii // Computer data. — International workshop in applied probability (IWAP-2008): proceedings of the international conference, France, Compiègne, July 7-10, 2008 / Ed.: J. Glaz [et al.]. — Compiègne, 2008. — 1 CD-ROM.

10. Vas'kovskii, M. On the existence of solutions of stochastic evolution functional equations with measurable right-hand sides / M. Vas'kovskii // Applied stochastic models and data analysis (ASMDA-2009): proceedings of the international conference, Lithuania, Vilnius, June 30-July 3, 2009 / Ed.: L. Sakalauskas [et al.]. — Vilnius, 2009. — P. 437-440.

Тезисы докладов научных конференций

11. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с частично невырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. междунар. конф., Минск, 7-10 декабря 2005 г. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.А. Мазаник [и др.]. — Минск, 2005. — С. 44-45.

12. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с частично невырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2006): тез. докл. междунар. конф., Минск, 13-19 сентября 2006 г. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. — Минск, 2006. — С. 75-76.

13. Васьковский, М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с измеримыми коэффициентами / М.М. Васьковский // Еругинские чтения - 2007: тез. докл. междунар. конф., Минск, 16-19 мая 2007 г. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. — Минск, 2007. — С. 90-91.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

14. Vaskouski, M.M. On the existence of β -weak solutions of delay stochastic differential equations / M.M. Vaskouski // Applied stochastic models and data analysis (ASMDA-2007): book of abstracts of the 12th International conference on applied stochastic models and data analysis, Greece, Chania, May 29 June 1, 2007 / Ed.: C.H. Skiadas. — Chania, 2007. — P. 186–188.

15. Васьковский, М.М. Зависимость β -мартингальных решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами от начальных условий и правых частей / М.М. Васьковский // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 3–9 ноября 2008 г.: в 5 ч. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2008. — Ч. 2. — С. 12–13.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

РЕЗЮМЕ

Васьковский Максим Михайлович

Существование и свойства решений стохастических дифференциальных уравнений с измеримыми коэффициентами в бесконечномерных пространствах

Ключевые слова. Стохастические дифференциально-функциональные уравнения, стохастические эволюционные уравнения, слабые решения, мартингалы, решения.

Объекты исследования. Стохастические дифференциально-функциональные уравнения с измеримыми коэффициентами, стохастические эволюционные уравнения параболического типа с разрывными правыми частями.

Цель работы. Доказательство теорем существования решений и исследование свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами в бесконечномерных пространствах.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений, теории случайных процессов и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. Получены оценки функционалов от решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений. Доказаны теоремы существования слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с разрывными локально ограниченными коэффициентами. Получена теорема существования решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа в гильбертовом пространстве с измеримыми правыми частями. Установлена теорема о зависимости решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа от начальных условий и правых частей. Все результаты диссертации являются новыми.

Область применения. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при исследовании общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

РЭЗЮМЭ

Васькоўскі Максім Міхайлавіч

Існаванне і ўласцівасці рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з вымяральнымі каэфіцыентамі ў бясконцамерных прасторах

Ключавыя словы. Стахастычныя дыферэнцыяльна-функцыянальныя раўнанні, стахастычныя эвалюцыйныя раўнанні, слабыя рашэнні, мартынгальныя рашэнні.

Аб'екты даследавання. Стахастычныя дыферэнцыяльна-функцыянальныя раўнанні з вымяральнымі каэфіцыентамі, стахастычныя эвалюцыйныя раўнанні парабалічнага тыпу з разрыўнымі правымі часткамі.

Мэта работы. Доказ тэарэм існавання рашэнняў і даследаванне ўласцівасцей рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з разрыўнымі каэфіцыентамі ў бясконцамерных прасторах.

Метады даследавання. У рабоце выкарыстоўваюцца метады тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, тэорыі выпадковых працэсаў і функцыянальнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Атрыманы ацэнкі функцыяналаў ад рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльна-функцыянальных раўнанняў. Даказаны тэарэмы існавання слабых рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльна-функцыянальных раўнанняў з разрыўнымі лакальна абмежаванымі каэфіцыентамі. Атрымана тэарэма існавання рашэнняў стахастычных эвалюцыйных раўнанняў парабалічнага тыпу ў гільбертавай прасторы з вымяральнымі правымі часткамі. Вызначана тэарэма аб залежнасці рашэнняў стахастычных эвалюцыйных раўнанняў парабалічнага тыпу ад пачатковых умоў і правых частак. Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі.

Галіна прымянення. Метады і вынікі дысертацыі могуць быць выкарыстаны пры даследаванні агульных і асімптатычных уласцівасцей рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з разрыўнымі правымі часткамі.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

SUMMARY

Vas'kovskii Maksim Mihailovich

Existence and properties of solutions of stochastic differential equations with measurable coefficients in infinite dimensional spaces

Key words. Stochastic differential functional equations, stochastic evolution equations, weak solutions, martingale solutions.

The object of the research. Stochastic differential functional equations with measurable coefficients, stochastic evolution parabolic equations with discontinuous right-hand sides.

The purpose of the research. The purpose is to obtain the theorems on the existence of solutions for stochastic differential equations in infinite dimensional spaces and to investigate the properties of solutions of stochastic differential equations in infinite dimensional spaces.

Methods of the research. Methods of the theory of differential equations, theory of random processes and functional analysis are used.

The obtained results and their novelty. There are obtained the estimations of functionals of solutions of stochastic differential functional equations. There are proved the theorems of the existence of weak solutions of stochastic differential functional equations with locally bounded discontinuous coefficients. The theorem of the existence of solutions of stochastic evolution parabolic equations in Hilbert space with measurable right-hand sides is obtained. The theorem of the dependence of solutions on the initial conditions and right-hand sides for stochastic evolution parabolic equations in Hilbert space is investigated. All obtained results are new.

Field of applications. The methods and the results could be applied to investigate of common and asymptotic properties of solutions of stochastic differential equations with discontinuous right-hand sides.

