

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.911

ВАСЬКОВСКИЙ
Максим Михайлович

**Существование и устойчивость решений стохастических
дифференциальных уравнений, управляемых
стандартными и дробными броуновскими движениями**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2020

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный консультант — **Леваков Анатолий Афанасьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Янович Леонид Александрович**,
член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник

отдела нелинейного и стохастического анализа
ГНУ «Институт математики НАН Беларуси»;

Сергеев Игорь Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры дифференциальных
уравнений

ФГБОУВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»;

Бахтин Виктор Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры функционального анализа и
аналитической экономики

Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — УО «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы».

Защита состоится 02 октября 2020 г. в 10.00 на заседании совета
по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном
университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская 8 (корпус
юридического факультета), ауд. 407. Телефон ученого секретаря:
(+375-17) 209-57-09, e-mail: yauhen.radyna@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского госу-
дарственного университета.

Автореферат разослан « » августа 2020 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д 02.01.07
кандидат физико-математических наук
доцент

Е.М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

Стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах вызывают большой интерес, поскольку они охватывают стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, стохастические системы с запаздыванием и находят многочисленные применения при моделировании диффузионных, колебательных явлений, нейрофизиологических процессов¹. Такие уравнения эффективно применяются для описания изменений структуры популяций биологических видов, моделирования динамики цен и опционов². Несмотря на существенное усложнение объекта исследований по сравнению со стохастическими дифференциальными уравнениями в конечномерных пространствах, усилиями Н.В. Крылова (1989), Б.Л. Розовского (1983), Э. Парду (1972), М. Вио (1974), Г. Да Прато, Е. Забчика (1992), Х. Франковской (1994), К. Лю (1997), М. Ондрежата (2006), А.А. Левакова (2018) и других математиков доказаны теоремы существования и единственности решений, исследованы общие и асимптотические свойства решений стохастических систем в бесконечномерных пространствах. В настоящей диссертации продолжаются эти исследования. Доказываются новые теоремы существования слабых и мартингалльных решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах, включая системы с запаздыванием, уравнения с разрывными коэффициентами, играющие важную роль в теории автоматического управления, задачах сопряжения в математической физике^{3, 4}. Доказанные теоремы существования носят конструктивный характер и позволяют строить численные методы для нахождения слабых решений и вероятностных характеристик мартингалльных решений, что позволяет непосредственно применять результаты настоящей диссертации при построении и анализе математических моделей различных естественно-научных явлений, финансовых процессов.

Процессы дробного броуновского движения широко применяются для

¹Da Prato, G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabszyk. — Cambridge: Cambridge university press, 2014. — 493 p.

²Filipovic, D. Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate models / D. Filipovic. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. — 138 p.

³Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 223 с.

⁴Maugeri, A. Elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients / A. Maugeri, D.K. Palagachev, L.G. Softova. — Berlin: Wiley-VCH Verlag, 2002. — 256 p.

моделирования тех явлений, которые характеризуются наличием долговременной памяти. К таким явлениям можно отнести процессы, описывающие динамику курсов валют, цен, изменение макроэкономических показателей^{5,6,7}. Хотя процессы дробного броуновского движения были введены еще в середине прошлого века в работах А.Н. Колмогорова (1940), Б. Мандельброта, Й. ван Несса (1968), стохастические дифференциальные уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями, начали изучаться только в начале 2000-х годов, что объясняется отсутствием до недавнего времени математического аппарата для исследования таких уравнений. Лишь в конце 90-х годов усилиями М. Сале (1998), Д. Нуаларта (2002), Т. Лайонса (1998) были заложены основы теории интегрирования по процессам, имеющим "грубые" траектории, в том числе по процессам дробных броуновских движений. В течение последнего десятилетия усилиями М. Губинелли (2006, 2010), М. Хайрера, П. Фрица (2014) теория грубых траекторий и её приложения к стохастическим дифференциальным уравнениям достигли выдающегося уровня развития и заняли ключевое место в современной теории дифференциальных уравнений. В настоящей диссертации продолжают исследования стохастических систем, управляемых дробными броуновскими движениями. Рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа, охватывающие как теорию стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа, так теорию стохастических систем, управляемых дробными броуновскими движениями. Для таких уравнений в диссертации доказываются новые теоремы существования сильных и слабых решений, в том числе, для уравнений с разрывными и неограниченными коэффициентами. Исследуются как общие свойства решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, так и асимптотические свойства при малых и больших значениях времени. В диссертации разработан метод интегральных неравенств для стохастических систем смешанного типа, что позволило впервые исследовать устойчивость по Ляпунову и притяжение решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями. В рабо-

⁵Петерс, Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Э. Петерс. — М.: Интернет-трейдинг, 2004. — 304 с.

⁶Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики в 2 т. / А.Н. Ширяев. — М.: Фазис, 1998. — 2 т.

⁷Large deviations and asymptotic methods in finance / P. Friz [et al.]. — Cham : Springer International Publishing AG, 2015. — 590 p.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

3

тах Н.В. Крылова (1971, 1977) установлены глубокие связи между детерминированными уравнениями в частных производных эллиптического, параболического типов и стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. В настоящей диссертации рассматриваются аналогичные вопросы для стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа. Доказываются аналоги оценок Крылова для распределений решений этих уравнений, также приводятся достаточные условия, при которых для математических ожиданий и плотностей распределений решений могут быть получены аналоги дифференциальных уравнений Колмогорова.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих научных проектов:

- Анализ структуры решений стохастических, дифференциальных и дифференциально-алгебраических систем ("Асимптотические спектры дифференциальных систем", 2011 – 2015 гг., номер госрегистрации 20111922);
- Анализ асимптотических свойств решений дифференциальных и алгебраических систем (2016 – 2020 гг., номер госрегистрации 20162496);
- проекта БРФФИ "Теоремы существования решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями" (2011 – 2013 гг., номер госрегистрации 20112582);
- проекта БРФФИ "Методы интегрирования обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений" (2012 – 2014 гг., номер госрегистрации 20122669);
- проекта БРФФИ "Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах" (2014 – 2016 гг., номер госрегистрации 20142883);
- международного проекта "Stochastic modelling of the potential of a neural fibre with a memory"(Швейцария, 2010 – 2011 гг.).
- международного проекта "CECL Mortgage Study" (США, 2016 г.).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является построение общей и асимптотической теорий стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями, включая доказательство теорем существования, единственности, непрерывной зависимости решений от начальных данных, теорем об устойчивости и притяжении, нахождение

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

4

асимптотических разложений решений в окрестности начальных условий, а также применение этих теорий к исследованию кредитных рисков.

Цель и задачи исследования

Объектом исследования являются стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах и стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа, управляемые стандартными и дробными броуновскими движениями. Предметом исследования являются общая и асимптотическая теории стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями.

Научная новизна

На основе разработанных новых методов функционального анализа и теории случайных процессов в диссертации построены общая и асимптотическая теории стохастических дифференциальных уравнений со стандартными и дробными броуновскими движениями и дано их приложение к моделированию кредитных рисков.

Положения, выносимые на защиту

Теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах со случайными локально липшицевыми коэффициентами.

Теоремы существования мартингалльных решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах с разрывными неограниченными коэффициентами.

Достаточные условия, обеспечивающие корректную постановку задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых стандартными и антиперсистентными дробными броуновскими движениями.

Новые методы интегрирования и асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых стандартными и антиперсистентными дробными броуновскими движениями.

Аналоги оценок Крылова для функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа и теорема существования решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с разрывными коэффициентами и вырожденной матрицей диффузии.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Теоремы существования сильных и слабых решений стохастических дифференциальных включений смешанного типа.

Метод интегральных неравенств исследования устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

Алгоритмы анализа и прогнозирования текущих ожидаемых кредитных потерь в области ипотечного кредитования.

Личный вклад соискателя ученой степени

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Основные результаты глав 2 и 3 получены автором диссертации единолично, идея доказательства теоремы 3.2 принадлежит автору диссертации, а необходимые утверждения о селекторах многозначных отображений в гильбертовых пространствах получены А.А. Леваковым и Я.Б. Задворным. Результаты главы 4, выносимые на защиту, получены автором диссертации единолично, при этом используются оценки стохастических интегралов, полученные И.В. Качаном в совместных статьях с автором диссертации. В главе 5 идея получения аналогов оценок Крылова принадлежит автору диссертации. Автором диссертации были развиты идеи совместных работ с А.А. Леваковым и с помощью аналогов оценок Крылова доказаны теоремы существования слабых и сильных решений стохастических дифференциальных уравнений и включений. В главе 6 теоремы 6.1 и 6.2 получены совместно с А.А. Леваковым на паритетных началах. Метод интегральных неравенств исследования устойчивости в главе 6 был разработан автором единолично. Алгоритмы анализа и прогнозирования кредитных потерь на основе применения стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями были разработаны и реализованы единолично автором диссертации на основе идей Д. Бридена о применении моделей выживаемости в области анализа кредитных рисков. Также Д. Бридену принадлежат обсуждение и экспертная оценка полученных результатов. Основные результаты диссертации также отражены в совместной с А.А. Леваковым монографии, при этом соответствующие главы были написаны на основе ранее опубликованных статей автора диссертации с последующим развитием результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на пятых и шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

(Минск, 2010, 2015), на международной конференции по теории управления и математическому моделированию (Ижевск, 2015), на международных конференциях "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (Минск, 2011, 2015), на международной конференции "Applied stochastic models and data analysis" (Рим, Италия, 2011), на международных конференциях "XI Белорусская математическая конференция", "XII Белорусская математическая конференция" (Минск, 2012, 2016), на международной конференции "Stochastic modeling techniques and data analysis" (Ханья, Греция, 2012), на международных конференциях "Еругинские чтения" (Минск, 2007; Полоцк, 2011; Гродно, 2013; Новополоцк, 2014; Минск, 2017; Гродно, 2018; Могилев, 2019), на международной конференции "Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем" (Пенза, Россия, 2017), на международной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Минск, 2018), на международной конференции "Big Data and Advanced Analytics" (Минск, 2019), на международной конференции "Устойчивость, управление, дифференциальные игры" (Екатеринбург, Россия, 2019), на международной конференции "Computer Data Analysis and Modeling: Stochastics and Data Science" (Минск, 2019).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс БГУ, что подтверждается 4 актами о внедрении.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 46 научных работах, в том числе: 1 монографии (31 авторский лист); 20 статей в научных журналах в соответствии с пунктом 18 Положения ВАК о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь и зарубежных научных журналах (общим объемом 15.5 авторских листов); 9 статьях в сборниках материалов научных конференций; 16 тезисах.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 6 глав, заключения, библиографического списка и приложения, содержащего документы о практическом применении результатов диссертации. Полный объем диссертации — 226 страниц, библиографический список содержит 191 наименование, включая собственные публикации автора, на 18 страницах, приложение занимает 8 страниц.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Монография

1. Леваков, А.А. Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск: БГУ, 2019. — 495 с.

Статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

2. Васьковский, М.М. Теорема о зависимости β -мартингальных решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа от начальных условий и правых частей / М.М. Васьковский // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2010. — № 1. — С. 19–26.

3. Васьковский, М.М. Существование β -мартингальных решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1080–1095.

4. Васьковский, М.М. О решениях стохастических гиперболических уравнений с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1: физ., мат., информ. — 2012. — № 2. — С. 115–121.

5. Васьковский, М.М. Теорема существования решений стохастического волнового уравнения с разрывными неограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 8. — С. 955–962.

6. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.

7. Леваков, А.А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1060–1076.

8. Васьковский, М.М. Существование мартингальных решений абстрактных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными

локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 11. — С. 1435–1440.

9. Васьковский, М.М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2015. — № 1. — С. 22–34.

10. Леваков, А.А. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.

11. Васьковский, М.М. Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — № 3. — С. 117–125.

12. Леваков, А.А. Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.

13. Васьковский, М.М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.

14. Васьковский, М.М. Корректность задачи Коши для стохастических эволюционных функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 779–793.

15. Васьковский, М.М. Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшицевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.

16. Васьковский, М.М. Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларусі. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.

17. Vaskouski, M. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having

Hurst indices greater than $1/3$ / M. Vaskouski, I. Kachan // *Stochastic Analysis and Applications*. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.

18. Васьковский, М.М. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–151.

19. Леваков, А.А. Существование мартингаловых решений стохастических дифференциальных включений параболического типа в гильбертовом пространстве / А.А. Леваков, М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // *Дифференциальные уравнения*. — 2020. — Т. 56, № 1. — С. 110–121.

20. Васьковский, М.М. Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими $1/3$ / М.М. Васьковский // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* — 2020. — Т. 56, № 1. — С. 36–50.

21. Breeden, J.L. Current expected credit loss procyclicality: it depends on the model / J.L. Breeden, M. Vaskouski // *Journal of Credit Risk*. — 2020. — Vol. 16, № 1. — P. 27–48.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

22. Vas'kovskii, M. Dependence of β -martingale solutions of stochastic evolution functional equations on the initial data / M. Vas'kovskii, P. Solonevich, Y. Zadvorny // *Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA-2011): proceedings of the international conference, Rome, Italy, June 7-10, 2011* / Ed.: G. D'Amico [et al.]. — Rome, 2011. — P. 1411–1418.

23. Vaskovskii, M. Existence of weak solutions of delay stochastic differential equations driven by infinite-dimensional brownian motion / M. Vaskovskii // *Stochastic modeling techniques and data analysis (SMTDA-2012): proceedings of the International Conference, Chania, Greece, June 5-8, 2012* / Ed.: C.H. Skiadas [et al.]. — Chania, 2012. — P. 761–768.

24. Леваков, А.А. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // *Теория управления и математическое моделирование (СТММ'15): тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9-11 июня 2015 г.* / М-во образования и науки Рос. Федерации, Удм. гос. ун-т; редкол.: А.С. Банников [и др.]. — Ижевск: Удм. гос. ун-т, 2015. — С. 81–83.

25. Васьковский, М.М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы междунар. конф., Минск, 7-10 декабря 2015 г.: в 2 ч. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2015. — Ч. 2. — С. 41–42.

26. Васьковский, М.М. Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие $1/3$ / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (ANM-2017): материалы междунар. науч.-техн. конф., Пенза, Россия, 4-6 декабря 2017 г. / Изд-во ПГУ; редкол.: И.В. Бойков [и др.]. — Пенза 2017. — С. 12–16.

27. Качан, И.В. Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: материалы междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сентября 2018 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол.: Ф.М. Кириллова [и др.]. — Минск, 2018. — С. 117–118.

28. Васьковский, М.М. Анализ и прогнозирование кредитных потерь с помощью дискретных моделей выживаемости / М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк // Big Data and Advanced Analytics: сб. материалов междунар. науч.-практ. конф., Минск, 1-14 марта 2019 г. В 2 ч. / БГУИР; редкол.: В.А. Богуш [и др.]. — Минск, 2019. — Ч. 1. — С. 285–293.

29. Леваков, А.А. Исследование устойчивости стохастических дифференциальных включений методом функций Ляпунова / А.А. Леваков, М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы междунар. научн. конф., посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 16-20 сентября 2019 г. / ИММ УрО РАН; редкол.: В.И. Максимов [и др.]. — Екатеринбург, 2019. — С. 219–223.

30. Levakov, A.A. Asymptotic expansions of solutions of mixed type SDE driven by fractional Brownian motions for small times / A.A. Levakov, M.M. Vaskouski, I.V. Kachan // Computer Data Analysis and Modeling:

Stochastics and Data Science: proceedings of the International Conference, Minsk, September 18-22, 2019. / BSU; Ed. P. Filzmoser [et al.]. — Minsk, 2019. — P. 219–223.

Тезисы докладов научных конференций

31. Васьковский, М.М. Существование решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, П.А. Солоневич // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. междунар. конф., Минск, 7-10 декабря 2010 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2010. — С. 104–105.

32. Васьковский, М.М. Теорема о зависимости законов распределений решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа от начальных условий и правых частей / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тез. докл. междунар. конф., Минск, 7-10 декабря 2010 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2010. — С. 103–104.

33. Солоневич, П.А. Теорема существования решений стохастических гиперболических уравнений с разрывными неограниченными коэффициентами / П.А. Солоневич, М.М. Васьковский // Еругинские чтения-2011: тез. докл. междунар. конф., Полоцк, 12-14 мая 2011 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. — Минск, 2011. — С. 157–158.

34. Васьковский, М.М. Теорема об отсутствии взрывов у решений стохастических эволюционных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // Еругинские чтения-2011: тез. докл. междунар. конф., Полоцк, 12-14 мая 2011 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. — Минск, 2011. — С. 144.

35. Васьковский, М.М. Существование решений смешанной задачи для стохастического волнового уравнения с разрывными неограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский, П.А. Солоневич // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2011): тез. докл. междунар. конф., Минск, 12-17 сентября 2011 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.В. Рогозин [и др.]. — Минск, 2011. — С. 38–39.

36. Васьковский, М.М. О непрерывной зависимости решений стохастического волнового уравнения от начальных данных / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // Аналитические методы анализа и дифференциальных урав-

нений (AMADE-2011): тез. докл. междунар. конф., Минск, 12-17 сентября 2011 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.В. Рогозин [и др.]. — Минск, 2011. — С. 37.

37. Васьковский, М.М. Существование мартингалльных решений абстрактных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными неограниченными правыми частями / М.М. Васьковский // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 4-9 ноября 2012 г.: в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2012. — Ч. 2. — С. 15–16.

38. Леваков, А.А. Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с дробным броуновским движением и с разрывным коэффициентом сноса / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 4-9 ноября 2012 г.: в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2012. — Ч. 2. — С. 39–40.

39. Леваков, А.А. Структура окрестностей слабо притягивающих множеств G -систем / А.А. Леваков, М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 4-9 ноября 2012 г.: в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2012. — Ч. 2. — С. 40–41.

40. Леваков, А.А. Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями с измеримым коэффициентом сноса / А.А. Леваков, М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // Еругинские чтения-2013: тез. докл. междунар. конф., Гродно, 13-16 мая 2013 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2013. — Ч. 1. — С. 34–35.

41. Леваков, А.А. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Еругинские чтения-2014: тез. докл. междунар. конф., Новополоцк, 20-22 мая 2014 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2014. — Ч. 2. — С. 38–39.

42. Васьковский, М.М. Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические

методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2015): тез. докл. междунар. конф., Минск, 14-19 сентября 2015 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.В. Рогозин [и др.]. — Минск, 2015. — С. 24.

43. Васьковский, М.М. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 14–15.

44. Васьковский, М.М. Асимптотическая устойчивость нулевого решения стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием и разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 12–13.

45. Васьковский, М.М. Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения-2018: тез. докл. междунар. конф., Гродно, 15-18 мая 2018 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2018. — Ч. 2. — С. 85–86.

46. Васьковский, М.М. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения-2019: тез. докл. междунар. конф., Могилев, 14-17 мая 2019 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2019. — Ч. 2. — С. 66–67.

РЕЗЮМЕ

Васьковский Максим Михайлович

Существование и устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями

Ключевые слова. Стохастическое дифференциальное уравнение, дробное броуновское движение, потраекторный интеграл, устойчивость, сильное решение, слабое решение.

Цель работы. Построение общей и асимптотической теорий стохастических дифференциальных уравнений со стандартными и дробными броуновскими движениями, а также применение этих теорий к построению алгоритмов анализа кредитных рисков.

Методы исследования. Методы теории дифференциальных уравнений, теории случайных процессов и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. Для стохастических дифференциальных уравнений, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями построены общая и асимптотическая теории, включая доказательство теорем существования, единственности, о непрерывной зависимости решений от начальных данных, об устойчивости решений, разработку новых методов интегрирования, получение асимптотических разложений функционалов от решений в окрестности начальных условий, применение построенных теорий к разработке алгоритмов анализа и прогнозирования кредитных рисков. Все результаты диссертации являются новыми.

Рекомендации по использованию. Результаты и методы диссертации могут применяться при проведении исследований общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений. Полученные в диссертации алгоритмы могут быть использованы для анализа и прогнозирования кредитных потерь банков и кредитных союзов.

Область применения. Результаты исследования могут быть применены в теории обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений, а также в математическом моделировании, включая анализ кредитных рисков.

РЭЗІЮМЭ

Васькоўскі Максім Міхайлавіч

Ісnavанне і ўстойлівасць рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў, кіруемых стандартнымі і дробнымі броўнаўскімі рухамі

Ключавыя словы. Стахастычнае дыферэнцыяльнае ўраўненне, дробны броўнаўскі рух, патраекторны інтэграл, устойлівасць, моцнае рашэнне, слабое рашэнне.

Мэта работы. Пабудаванне агульнай і асімптатычнай тэорый стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў з стандартнымі і дробнымі броўнаўскімі рухамі, а таксама прымяненне гэтых тэорый да пабудавання алгарытмаў аналізу крэдытных рызык.

Метады даследавання. Метады тэорый дыферэнцыяльных ураўненняў, тэорый выпадковых працэсаў і функцыянальнага аналізу.

Атрыманая вынікі і іх навізна. Для стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў, кіруемых стандартнымі і дробнымі броўнаўскімі рухамі, пабудаваны агульная і асімптатычная тэорыі, уключаючы доказ тэарэм ісnavання, адзінасці, аб непарыўнай залежнасці рашэнняў ад пачатковых дадзеных, аб устойлівасці рашэнняў, распрацоўку новых метадаў інтэгравання, атрыманне асімптатычных раскладанняў функцыяналаў ад рашэнняў у наваколлі пачатковых дадзеных, прымяненне пабудаваных тэорый да распрацоўкі алгарытмаў аналізу і прагназавання крэдытных рызык. Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі і метады дысертацыі могуць выкарыстоўвацца ў даследаваннях агульных і асімптатычных уласцівасцей рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў. Атрыманая ў дысертацыі алгарытмы могуць выкарыстоўвацца для аналізу і прагназавання крэдытных страт банкаў і крэдытных саюзаў.

Галіна прымянення. Вынікі даследавання могуць выкарыстоўвацца ў тэорыі звычайных і стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў, а таксама ў матэматычным мадэляванні, уключаючы аналіз крэдытных рызык.

SUMMARY

Vaskouski Maksim Mikhailavich

Existence and stability of solutions of stochastic differential equations controlled by standard and fractional Brownian motions

Keywords. Stochastic differential equation, fractional Brownian motion, pathwise integral, stability, strong solution, weak solution.

The purpose of the research. Construction of general and asymptotic theories of stochastic differential equations and application of these theories to credit risk analysis.

Methods of the research. Methods of theory of differential equations, theory of random processes and functional analysis.

The obtained results and their novelty. For stochastic differential equations controlled by standard and fractional Brownian motions there are constructed general and asymptotic theories including proof of theorems on existence, uniqueness and continuous dependence of solutions on initial data, on stability of solutions, developing of new integration methods, obtaining asymptotic expansions of solutions functionals in a neighbourhood of initial conditions, application of constructed theories to analysis and forecasting of credit risk. All the results of the thesis are new.

Recommendations for use. The results and methods of the thesis can be used in research of general and asymptotic properties of solutions of stochastic differential equations. The obtained algorithms can be used by banks and credit unions in analysis and forecasting of credit risk.

Field of applications. The research results can be applied in theory of ordinary and stochastic differential equations, as well in mathematical modeling including analysis of credit risk.