

**(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ  
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»**

УДК 512.554.32

**ВЕЛИЧКО  
МАРИНА ВЛАДИМИРОВНА**

**СВОЙСТВА МАЛЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ  
КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП**

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Минск, 2007

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

Научный руководитель

**Супруненко Ирина Дмитриевна**,  
доктор физико-математических наук,  
главный научный сотрудник,  
Институт математики НАН Беларуси,  
отдел алгебры

Официальные оппоненты

**Беняш-Кривец  
Валерий Вацлавович**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, учреждение образования  
«Белорусский государственный  
университет»  
кафедра высшей алгебры

**Башкиров Евгений Леонидович**,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, учреждение образования  
«Белорусский государственный  
университет информатики и  
радиоэлектроники»  
кафедра высшей математики

Опонирующая организация — Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 26 апреля 2007 года в 16<sup>00</sup> на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при Государственном научном учреждении «Институт математики НАН Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова 11, тел. ученого секретаря — 284-17-78.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики НАН Беларуси

Автореферат разослан                      марта 2007 г.

Ученый секретарь  
совета по защите диссертаций  
кандидат физ.-мат. наук

С.В. Тихонов

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Диссертационная работа выполнялась в отделе алгебры Института математики НАН Беларуси с 2003 по 2006 гг. в рамках следующих научных программ и тем:

– Государственная программа фундаментальных исследований "Исследование алгебраических и дифференциальных свойств основных математических структур", тема "Исследование и распознавание линейных групп и представлений алгебраических и конечных групп" (Математические структуры 03, 2001–2005 гг., номер госрегистрации 2003269);

– Государственная программа фундаментальных исследований "Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе", тема "Асимптотические и классификационные проблемы теории представлений и теории линейных групп" (Математические модели 03.1, 2006–2010 гг., номер госрегистрации 20063081).

Часть результатов диссертации получена в ходе выполнения совместного проекта "Асимптотические задачи в теории представлений", поддержанного Королевским научным обществом Великобритании (2004/R1-FSU scheme, 01.10.2004–01.10.2006).

Автором работы получен грант на выполнение научно-исследовательских работ докторантами и аспирантами НАН Беларуси на 2006 год по теме диссертационного исследования (постановление Бюро Президиума Национальной академии наук Беларуси от 26 апреля 2006 г. № 221).

### Цель и задачи исследования

Цель работы — описание поведения малых унитарных элементов в неприводимых представлениях классических алгебраических групп над полем положительной характеристики.

В диссертации решаются следующие задачи.

1. Найти размерности блоков Жордана образов корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп в характеристике  $p > 0$ .

2. Найти такие размерности для образов малых унитарных элементов в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами относительно характеристики  $p$ .

Объектом исследования являются представления алгебраических групп в положительной характеристике. Предмет исследования — размерности блоков Жордана образов унитарных элементов в этих представлениях.

### Положения, выносимые на защиту

Всюду в дальнейшем  $G$  — простая односвязная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем  $K$  характеристики  $p > 0$ ,  $\omega_i$  — фунда-

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ментальные веса. Предполагается, что  $p > 2$  и  $n > 2$  при  $G = B_n(K)$  и  $n > 3$  при  $G = D_n(K)$ . Известно, что при  $p = 2$  группы  $B_n(K)$  и  $C_n(K)$  изоморфны и что  $B_2(K) \cong C_2(K)$  при любом  $p$ . Доминантный вес  $\omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$  и неприводимое представление группы  $G$  со старшим весом  $\omega$  называются  $p$ -ограниченными, если все  $m_i < p$ .

Поясним, что в пп. 1–2 имеются в виду неединичные корневые элементы.

1. Найдены размерности блоков Жордана образов корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп рангов, больших 2, с корнями одной длины ( $A_n, D_n, E_n$ ) и длинных корневых элементов в неприводимых представлениях группы  $B_n(K)$  при  $n > 2, p > 2$ . Установлено, что в рассмотренных случаях встречаются все а priori возможные размерности блоков Жордана.

2. Найдены размерности блоков Жордана образов длинных корневых элементов в  $p$ -ограниченных неприводимых представлениях группы  $C_n(K)$  со старшими весами  $m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$  при  $p > 2, n > 2$  и  $m_{n-1} < p - 1$ , и коротких корневых элементов в таких представлениях этой группы при  $n > 3$  и  $m_i < p - 1$  для некоторого  $i < n$ . Оказалось, что для коротких корней встречаются все а priori возможные размерности блоков Жордана, а для длинных корней при  $\sum_{i=1}^n m_i \geq p - 1$  есть все размерности от 1 до  $p$ .

3. Для почти всех  $p$ -ограниченных неприводимых представлений группы  $G = A_n(K)$  с большими относительно  $p$  старшими весами определена структура блоков Жордана образов малых квадратичных унипотентных элементов в этих представлениях. Подразумеваются унипотентные элементы, которые в естественном модуле имеют минимальный многочлен степени 2. Установлено, что если  $\varphi$  — неприводимое  $p$ -ограниченное представление группы  $G$  со старшим весом

$$\omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n \text{ с } \sum_{i=1}^n m_i \geq p - 1,$$

среди коэффициентов  $m_i$  не слишком мало чисел, меньших  $p - 1$ , и  $n$  достаточно велико по сравнению с коразмерностью подпространства собственных векторов рассматриваемого элемента  $z$ , то  $\varphi(z)$  имеет блоки всех размерностей от 1 до  $p$ . Точные формулировки содержатся в главе 4.

Ясно, что для произвольных унипотентного элемента  $z \in G$  и представления  $\varphi$  группы  $G$  степень минимального многочлена матрицы  $\varphi(z)$  равна максимальной размерности ее блоков Жордана. Минимальные многочлены элементов порядка  $p$  в неприводимых представлениях простых алгебраических групп в характеристике  $p$  найдены в <sup>1</sup>, поэтому для каждого  $\varphi \in \text{Irr}G$

<sup>1</sup>Супруненко, И.Д. Минимальные полиномы элементов порядка  $p$  в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики  $p$  // И.Д. Супруненко // Труды Ин-та математики СО РАН. Проблемы алгебры и логики. — 1996. — Т. 30. — С. 126–163.

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

и элемента  $z \in G$  порядка  $p$  известна наибольшая размерность блока преобразования  $\varphi(z)$ . Для определенных представлений, указанных в лемме 2.2.2 и следствии 2.2.6, образы всех элементов порядка  $p$  имеют только блоки размерности  $p$ . Когда мы говорим об  $p$ -иоги возможных размерностях, подразумевается, что для других представлений элемент  $\varphi(z)$  имеет блоки всех размерностей от 1 до степени его минимального многочлена.

Все результаты диссертации являются новыми. Ранее задача найти все размерности блоков Жордана образа заданного унитарного элемента в неприводимом представлении ставилась только для представлений специального вида (см. главу 1).

Работа носит теоретический характер. Ее результаты дают основания для выдвижения общих гипотез о типичном поведении унитарных элементов из естественно вложенных подгрупп малых рангов в представлениях классических алгебраических групп. Они могут применяться для поиска "редких" классов унитарных элементов, подходящих для использования при решении задач распознавания линейных групп по наличию матриц определенного вида. Результаты диссертации без дополнительных усилий распространяются на представления конечных групп Шевалле в собственной характеристике, что расширяет область их потенциальных приложений.

### Личный вклад соискателя

Результаты о поведении корневых элементов получены автором самостоятельно. Совместно с руководителем найдена блочная структура малых унитарных элементов в некоторых представлениях специальной линейной группы.

### Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационной работы докладывались либо были представлены на следующих научных конференциях и семинарах:

- VIII Республиканская научная конференция студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Гомель, 2005);
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2005" (Севастополь, 2005);
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2006" (Москва, 2006);
- Международная конференция молодых ученых "Молодежь в науке – 2006" (Минск, 2006).
- семинар по алгебре Лестерского университета (Лестер, Великобритания, 2006);
- семинары отдела алгебры Института математики НАН Беларуси (Минск, 2004–2006)

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## **Опубликованность результатов диссертации**

Результаты диссертации изложены в статьях [1–А], [2–А] и [3–А], в препринте [6–А], а также в тезисах и трудах конференций [4–А], [5–А], [7–А] и [8–А]. Общий объем опубликованных материалов составляет 56 страниц, из них 28 страниц – препринт.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из оглавления, перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, включающего 62 наименования. Полный объем диссертации составляет 77 страниц, из них 6 страниц занимает библиографический список.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 приводится аналитический обзор литературы по теме диссертации.

Всюду в дальнейшем  $Fr$  — морфизм Фробениуса группы  $G$ , ассоциированный с возведением элементов поля  $K$  в степень  $p$ ,  $\Lambda(G)$  — система весов группы  $G$ ;  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — базис системы корней группы  $G$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — фундаментальные веса группы  $G$ , занумерованные, как в <sup>2</sup>;  $Irr_G$  — множество неприводимых представлений группы  $G$ ,  $Irr_p$  — множество неприводимых  $p$ -ограниченных представлений группы  $G$ ,  $\omega(\varphi)$  — старший вес представления  $\varphi \in Irr_G$ ;  $V_\mu$  — неприводимый  $G$ -модуль со старшим весом  $\mu$ ,  $W_\mu$  — модуль Вейля группы  $G$  со старшим весом  $\mu$ ,  $V^\mu$  — весовое подпространство веса  $\mu$  в  $G$ -модуле  $V$ .

Положим  $\mathbb{N}_a^b = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\}$ . Для корневого элемента  $z \in G$ , ассоциированного с корнем  $\alpha$ , обозначим через  $\alpha_{m,z}$  максимальный корень той же длины, что и  $\alpha$ . При  $\varphi \in Irr_G$ ,  $z \in G$  положим  $m_\varphi(z) = \langle \omega(\varphi), \alpha_{m,z} \rangle$  и обозначим символом  $J_\varphi(z)$  множество размерностей блоков Жордана (без их кратностей) преобразования  $\varphi(z)$ .

В главах 2 и 3 рассматриваются только неединичные корневые элементы, в главе 4 изучаются квадратичные унитарные элементы.

В главе 2 найдены размерности блоков Жордана образов корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп рангов, больших 2, с корнями одной длины (типы  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$ ). Аналогичные результаты получены также для длинных корневых элементов групп типа  $B_n$ ,  $n > 3$ , и коротких корневых элементов групп типа  $C_n$ ,  $n > 3$ , и почти всех  $p$ -ограниченных представлений. Установлено, что в рассматриваемых случаях встречаются все а priori возможные размерности блоков.

Основные результаты главы 2 — теорема 2.1.1 и следствие 2.1.2. Их формулировки приведены в разделе 2.1.

В разделе 2.2 изложены известные факты и доказан ряд предварительных лемм, которые используются при получении основных результатов диссертации.

В лемме 2.2.7 указан способ нахождения блочной структуры элементов порядка  $p$  в некоторых тензорно разложимых неприводимых представлениях простых алгебраических групп, если такая структура известна для сомножителей.

**Лемма 2.2.7.** Пусть  $G$  — полупростая алгебраическая группа,

$$\varphi = \varphi_1 \circ Fr^{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_k \circ Fr^{i_k},$$

где  $0 \leq i_1 < \dots < i_k$  и  $\varphi_i \in Irr_p$ . Предположим, что  $z \in G$  — элемент

<sup>2</sup>Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, гл. IV–VI. — М.: Мир, 1972. — 331 с.

**(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)****СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ  
ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ****Статьи в научных журналах**

[1–А] Величко, М.В. О блочной структуре корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп / М.В. Величко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3 – С. 34–37.

[2–А] Velichko, M.V. On the behaviour of root elements in irreducible representations of simple algebraic groups / M.V. Velichko // Труды Ин-та математики. – 2005. – Т. 13, № 2. – С. 116–121.

[3–А] Величко, М.В. О поведении корневых элементов в модулярных представлениях симплектических групп / М.В. Величко // Труды Ин-та математики. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 28–34.

**Статьи в рецензируемых материалах конференций**

[4–А] Величко, М.В. О блочной структуре длинных корневых элементов в неприводимых представлениях алгебраических групп типа  $C_n$  / М.В. Величко // Вестник молодых ученых "Ломоносов". – 2006. – Вып. III. – С. 221–224.

[5–А] Величко, М.В. О поведении малых унитарных элементов в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами / М.В. Величко, И.Д. Супруненко // сб. тр. междунар. конф. молодых ученых <Молодежь в науке - 2006> / – Минск, 2006. – Т. II. – С. 177–179.

**Препринты**

[6–А] Величко, М.В. О поведении малых унитарных элементов в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами / М.В. Величко, И.Д. Супруненко. – Минск, 2007. – 28 с. – (Препринт / НАН Беларуси, Институт математики; № 1 (575)).

**Тезисы докладов**

[7–А] Величко, М.В. О блочной структуре корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп / М.В. Величко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы VIII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 14–16 марта 2005 г. / Гомел. гос. ун-т; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 208–209.

[8–А] Величко, М.В. О поведении корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп / М.В. Величко // Ломоносов-2005: материалы науч. конф. "Ломоносовские чтения" 2005 г. и междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2005", Севастополь, 4-6 мая 2005 г. / НПЦ "ЭКОСИ-Гидрофизика"; редкол.: В.А. Иванов [и др.]. – Севастополь, 2005. – С. 130–131.



## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## РЕЗЮМЕ

Величко Марина Владимировна

**Свойства малых унитарных элементов в модулярных представлениях классических алгебраических групп**

Ключевые слова: алгебраическая группа, представление, унитарный элемент, блок Жордана, размерность блока.

В работе исследуется структура блоков Жордана образов унитарных элементов в представлениях классических алгебраических групп в характеристике  $p$ . Для получения результатов диссертации был использован анализ ограничений представлений на естественно вложенные подгруппы относительно малых рангов.

Найдены размерности блоков Жордана образов корневых элементов в неприводимых представлениях простых алгебраических групп с корнями одной длины ( $A_n, D_n, n > 2, E_n, n = 6, 7, 8$ ) и длинных корневых элементов в неприводимых представлениях групп  $B_n(K)$  при  $n > 2, p > 2$ . Для  $p$ -ограниченных неприводимых представлений группы  $C_n(K)$  со старшими весами  $m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$  такие размерности найдены для образов длинных корневых элементов при  $p > 2, n > 2$  и  $m_{n-1} < p - 1$  и для образов коротких корневых элементов при  $n > 3$  и  $m_i < p - 1$  для некоторого  $i < n$ .

Для почти всех  $p$ -ограниченных неприводимых представлений группы  $A_n(K)$  с большими относительно  $p$  старшими весами определена структура блоков Жордана образов малых квадратичных унитарных элементов в этих представлениях. Установлено, что если  $\varphi$  — неприводимое  $p$ -ограниченное представление группы  $A_n(K)$  со старшим весом

$$m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n, \quad \sum_{i=1}^n m_i \geq p - 1,$$

среди коэффициентов  $m_i$  не слишком мало чисел, меньших  $p - 1$ , и  $n$  достаточно велико по сравнению с коразмерностью подпространства собственных векторов рассматриваемого элемента  $z$ , то  $\varphi(z)$  имеет блоки всех размерностей от 1 до  $p$ .

Результаты диссертации дают основания для выдвижения общих гипотез о типичном поведении унитарных элементов из естественно вложенных подгрупп малых рангов в представлениях классических алгебраических групп. Они могут применяться для поиска "редких" классов унитарных элементов, подходящих для использования при решении задач распознавания линейных групп по наличию матриц определенного вида.

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## РЭЗІУМЭ

Вялічка Марына Уладзіміраўна

**Уласцівасці малых уніпатэнтных элементаў у мадулярных  
прадстаўленнях класічных алгебраічных груп**

Ключавыя словы: алгебраічная група, прадстаўленне, уніпатэнтны элемент, блок Жардана, памернасць блока.

У рабоце даследуецца структура блокаў Жардана вобразаў уніпатэнтных элементаў у прадстаўленнях класічных алгебраічных груп у характарыстыцы  $p$ . Для атрымання рэзультатаў дысертацыі быў выкарыстаны аналіз абмежаванняў прадстаўленняў на натуральна ўкладзеныя падгрупы адносна малых рангаў.

Знойдзены памернасці блокаў Жардана вобразаў каранёвых элементаў у непрыводных прадстаўленнях простых алгебраічных груп з каранямі адной даўжыні ( $A_n$ ,  $D_n$ ,  $n > 2$ ,  $E_n$ ,  $n = 6, 7, 8$ ) і доўгіх каранёвых элементаў у непрыводных прадстаўленнях груп  $B_n(K)$  пры  $n > 2, p > 2$ . Для  $p$ -абмежаваных непрыводных прадстаўленняў групы  $C_n(K)$  са старэйшымі вагамі  $m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$  гэтыя памернасці знойдзены для вобразаў доўгіх каранёвых элементаў пры  $p > 2, n > 2$  і  $m_{n-1} < p - 1$  і для вобразаў кароткіх каранёвых элементаў пры  $n > 3$  і  $m_i < p - 1$  для некаторага  $i < n$ .

Для амаль усіх  $p$ -абмежаваных непрыводных прадстаўленняў групы  $A_n(K)$  з вялікімі адносна  $p$  старэйшымі вагамі вызначана структура блокаў Жардана вобразаў малых квадратыхчных уніпатэнтных элементаў у гэтых прадстаўленнях. Устаноўлена, што калі  $\varphi$  — непрыводнае  $p$ -абмежаванае прадстаўленне групы  $A_n(K)$  са старэйшай вагай

$$m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n, \sum_{i=1}^n m_i \geq p - 1,$$

сярод каэфіцыентаў  $m_i$  не вельмі мала лікаў, меншых за  $p - 1$ , і  $n$  дастаткова вялікае ў параўнанні з капамернасцю падпрастранства ўласных вектараў даследуемага элемента  $z$ , то  $\varphi(z)$  мае блокі ўсіх памернасцяў ад 1 да  $p$ .

Рэзультаты дысертацыі даюць падставы для выдвіжэння агульных гіпотэз аб тыповых паводзінах уніпатэнтных элементаў з натуральна ўкладзеных падгруп малых рангаў у прадстаўленнях класічных алгебраічных груп. Яны могуць выкарыстоўвацца для пошуку "рэдкаіх" класаў уніпатэнтных элементаў, падыходзячых для выкарыстоўвання пры рашэнні задач распазнавання лінейных груп па прысутнасці матрыц асобага віду.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## SUMMARY

*Velichko Marina Vladimirovna*

### The behaviour of small unipotent elements in modular representations of the classical algebraic groups

Key words: algebraic group, representation, unipotent element, Jordan block, block size.

The Jordan block structure of images of unipotent elements in modular representations of the classical algebraic groups in characteristic  $p$  is studied. To obtain the thesis results, an analysis of the restrictions of representations on naturally embedded subgroups of relatively small ranks is used.

The Jordan block sizes of images of root elements in irreducible representations of simple algebraic groups with roots of equal length ( $A_n$ ,  $D_n$ ,  $n > 2$ ,  $E_n$ ,  $n = 6, 7, 8$ ) and long root elements in irreducible representations of the groups  $B_n(K)$  with  $n > 2, p > 2$  are found. For  $p$ -restricted irreducible representations of the groups  $C_n(K)$  with highest weights  $m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$  such sizes are determined for images of long root elements with  $p > 2, n > 2$  and  $m_{n-1} < p - 1$  and for images of short root elements with  $n > 3$  and  $m_i < p - 1$  for some  $i < n$ .

For almost all  $p$ -restricted irreducible representations of the groups  $A_n(K)$  with highest weights large with respect to  $p$  the Jordan block structure of images of small quadratic unipotent elements in these representations is determined. It is proved that if  $\varphi$  is an irreducible  $p$ -restricted representation of  $A_n(K)$  with highest weight

$$m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n, \quad \sum_{i=1}^n m_i \geq p - 1,$$

not too few of the coefficients  $m_i$  are less than  $p - 1$  and  $n$  is large enough with respect to codimension of the fixed subspace of an element  $z$  under consideration, then  $\varphi(z)$  has blocks of all sizes from 1 to  $p$ .

These results yield a base for more general conjectures on a typical behaviour of unipotent elements of naturally embedded subgroups of small ranks in representations of classical algebraic groups. They can be applied for finding "rare" classes of unipotent elements which are suitable for solving recognition problems for linear groups containing matrices of a special kind.