ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им Ф. СКОРИНЫ

УДК 512.542

ВИШНЕВСКАЯ Татьяна Романовна

Факторизации p-насыщенных формаций

01.01.06 – математическая логика, алгебра
и теория чисел

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Гомель - 2001 г.

Работа выполнена в Гомельском государственном университете им. Ф.Скорины

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
СКИБА АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
ВОРОБЬЕВ НИКОЛАЙ ТИМОФЕЕВИЧ

кандидат физико-математических наук, доцент
СЕМЕНЧУК ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ

Оппонирующая организация — Институт математики НАН Украины

Защита состоится "01" июня 2001 года в 16^{00} часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Гомельском государственном университете имени Ф.Скорины по адресу: 246019, г.Гомель, ул.Советская, 104. Телефон ученого секретаря: (0232) 57-37-91

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины

Автореферат разослан "27" апреля 2001 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Ф.ВАСИЛЬЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации Важность изучения p-насыщенных, т е. замкнутых относительно p-фраттиниевых расширений формаций, обусловлена многими причинами. Во-первых. если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то $\mathfrak{H}$ — p-насыщенная формация для всех простых чисел p, не принадлежащих объединению множеств всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{M}$ (Л.А.Шеметков, 1984). Таким образом, изучение факторизаций насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ с неизбежностью приводит к необходимости исследования частично насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$. Во-вторых, изучение любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ во многих важных случаях сводится к исследованию некоторой системы ее p-насыщенных подформаций, являющихся значениями максимального внутреннего локального экрана f формации $\mathfrak{F}$ (в частности, $\mathfrak{F}$ есть объединение в решетке всех формаций такой системы подформаций $\{f(p)\}$) (А.Н.Скиба и Л.А.Шеметков, 1997). Отметим, наконец, что p-насыщенные формации весьма полезны при изучении различных классов непростых конечных групп. Таким образом, задача изучения и классификации p-насыщенных формаций является вполне актуальной и перспективной.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертация выполнена в рамках следующей госбюджетной темы:

"Структурная теория формаций и других классов алгебр" Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси №88 от 23 ноября 1995г. (номер госрегистрации в БелИСА — 19963987), тема выполнялась в 1996–2000 гг.

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертации является изучение факторизаций p-насыщенных формаций. Для достижения этой цели в диссертации решены следующие задачи:

— дано описание формаций $\mathfrak{M}$ таких, что для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией;

— дано описание формаций $\mathfrak{H}$ таких, что для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией;

— дана полная классификация однопорожденных p-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, представимых в виде произведения $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$;

— дано описание несократимых факторизаций однопорожденных и ограниченных p-насыщенных формаций, что в частности, даёт решение одной задачи А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются факторизации формаций конечных групп Предмет исследования строение p-насыщенных формаций конечных групп, представимых в виде произведения неединичных формаций

Методология и методы проведенного исследования. В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, методы теории формаций конечных групп. Используются также элементы теории представлений групп, а также методы общей теории классов.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все полученные результаты являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

3.1.4.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ — такая p-насыщенная формация, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$.*

3.1.5.Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.*

3.2.6.Теорема. *В том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (ограниченная)p-насыщенная формация, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний p-локальный спутник, значения которого являются однопорожденными (соответственно ограниченными) формациями.*

3.3.13.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная p-насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая p-насыщенная формация что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной.*

3.4.5.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{M}$ является однопорожденной p-насыщенной формацией входящей в $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$, когда $\mathfrak{M}$ является первым сомножителем в некотором произведении вида $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} = l^p \operatorname{form} G$, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$.*

3.5.5.Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — p-насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ — неединичные формации и $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{N}_p$ Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}$ — однопорождённая p-насыщенная формация;

2) $\mathfrak{F}$ — ограниченная p насыщенная формация·

3) формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют следующим условиям:

a) $\mathfrak{M}$ — однопорожденная p-насыщенная формация и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$.

b) $\mathfrak{H}$ — абелева однопорожденная формация. причем, если $p \in \pi(\mathfrak{M})$ то $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

c) $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) \subseteq \{p\}$

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно В опубликованных совместно с научным руководителем работах идеи и методы принадлежат научному руководителю, а доказательства соискателю.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета. Второй международной алгебраической конференции в Украине, посвящённой памяти профессора Л.А.Калужнина (г.Киев, 1999), Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца (г Гомель, 2000), VIII Белорусской математической конференции (г.Минск, 2000).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в трех статьях [30–32], пяти препринтах [33–37] и в двух тезисах [38, 39]. Общее количество страниц опубликованных материалов — 86.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, шести глав основной части, выводов и списка использованных источников в алфавитном порядке в количестве 69 наименований. Объем диссертации 95 страниц.

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Ниже охарактеризовано содержание диссертации по главам. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения принятые в книгах [15, 19, 21], а также в статье А Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [14].

Глава 1 содержит обзор основных результатов диссертации.

В главе 2 собраны некоторые известные результаты. используемые в основном тексте диссертации.

Естественным расширением понятия насыщенной формации является следующее понятие Формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной (Л.А.Шеметков [20]) ($\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$), если ей принадлежит всякая группа G с $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq O_\omega(G) \bigcap \Phi(G)$. Если $\omega = \{p\}$, то ω-насыщенные формации называют p-насыщенными Важность изучения p-насыщенных формаций обусловлена многими причинами Отметим здесь часть из них. Во-первых, как это впервые замечено в работе Л А.Шеметкова [20], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{M})$ (здесь $\pi(\mathfrak{M})$ — множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{M}$). Таким образом изучение факторизаций насыщенных формаций с неизбежностью приводит к необходимости исследования p-насыщенных формаций для определенных простых p. Во-вторых, как установлено в работе А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [14] изучение любых насыщенных формаций во многих важных случаях сводится к исследованию некоторой системы частично насыщенных формаций. Отметим, наконец, что как показывают исследования [1, 5, 6, 14] p-насыщенные формации полезны и в прикладном аспекте теории формаций Таким образом, задача изучения и классификации p-насыщенных формаций вполне актуальна и перспективна.

Если $\mathfrak{H}$ непустая формация и G — группа, то в G имеется наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{H}}$ со свойством $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ - это класс $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Нетрудно заметить что произведение любых двух формаций снова является формацией Более того. как установил Гашюц такая операция на множестве формаций ассоциативна.

Хорошо известно (см , например, работу Л А.Шеметкова [20]), что произведение любых двух насыщенных формаций снова является насыщенной формацией Обратное утверждение в общем случае неверно Отметим. что первые примеры насыщенных произведений ненасыщенных формаций были найдены В. А Ведерниковым [3] и Н Т.Воробьевым [4]. Новые примеры такого рода можно найти в работе Баллестера-Болинше и Перец-Рамоса [24]. В связи с этими результатами интересна следующая теорема А Н Скибы Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ однопорожденная насыщенная формация (т е $\mathfrak{F}$ пересечение всех насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу $G \in \mathfrak{F}$). Тогда если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. то $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация.

Одна из главных целей данной диссертации состоит в доказательстве аналогичного результата для p-насыщенных формаций.

В 1963 году П.Нейман доказал, что если произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных многообразий групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ является кроссовым (т.е $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — многообразие, порожденное конечной группой). то многообразие $\mathfrak{H}$ абелево. Несколько позднее А.Л.Шмелькин установил в работе [23], что действительности верна следующая теорема· Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ в том и только в том случае является кроссовым многообразием, когда $\mathfrak{M}$ абелево, $\mathfrak{M}$ нильпотентно и экспоненты многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ взаимно просты Поскольку всякое нильпотентное многообразие неразложимо, а согласно знаменитой теореме Нейманов-Шмелькина всякое представление многообразия в виде произведения неразложимых многообразий единственно, то отмеченная выше теорема П.Неймана и А.Л Шмелькина дает по существу описание всех возможных факторизаций кроссовых многообразий.

Более общий результат был получен А.Н.Скибой в его работах [12, 29] (см. также гл. 3 книги А.Н Скибы [15]), где были описаны все несократимые факторизации однопорожденных насыщенных формаций, что, в частности. позволило дать принципиально новое доказательство теоремы П.Неймана и А.Л.Шмелькина. Главной целью данной диссертации является описание всех несократимых факторизаций однопорожденных p-насыщенных формаций.

Как отмечено выше, произведение любых двух насыщенных формаций снова является насыщенной формацией. Обратная ситуация рассматривалась в работе Баллестера-Болинше и Перец-Рамош [24], где были описаны такие формации $\mathfrak{M}$, что для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – насыщенная формация, а также такие формации $\mathfrak{H}$, что для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация.

В разделе 3.1 аналогичная задача решается для разрешимо насыщенных и p-насыщенных формаций. При этом существенно используются методы главы 3 книги А.Н.Скибы [15].

3.1.2.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ - формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является раз решимо насыщенной формацией. когда $\mathfrak{M}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$.*

3.1.3.Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является раз решимо насыщенной формацией когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.*

3.1.4.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ формация. Тогда в том и только в том* *случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ — такая p-насыщенная формация, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$.*

3.1.5.Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ формация Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.*

Рассмотрим теперь некоторые следствия теорем 3 1 2–3.1 5.

3.1.6.Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ – формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является ω-насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ — такая ω-насыщенная формация, что $\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{M}$.*

3.1.7.Следствие (Баллестер-Болинше и Перец-Рамош [24]). *Пусть $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ насыщенная формация, содержащая класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$.*

3.1.8.Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ – формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является ω-насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.*

3.1.9.Следствие (Баллестер-Болинше и Перец-Рамош [24]). *Пусть $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.*

В разделе 3.2 описаны общие свойства факторизаций однопорожденных и ограниченных τ-замкнутых p-насыщенных формаций.

Пусть G — группа и $\tau^p \operatorname{form} G$ — пересечение всех тех τ-замкнутых p-насыщенных формаций. которые содержат группу G Тогда, очевидно, что $\tau^p \operatorname{form} G$ — τ-замкнутая p-насыщенная формация. Формации такого типа называют однопорожденными τ-замкнутыми p-насыщенными формациями Если τ-замкнутая p-насыщенная формация $\mathfrak{M}$ такова, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для некоторой однопорожденной τ-замкнутой p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называют ограниченной τ-замкнутой p-насыщенной формацией Формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной τ-замкнутой формацией. если $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением всех тех τ-замкнутых формаций, которые содержат некоторую фиксированную группу $G \in \mathfrak{F}$ При этом пишут

$$\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G.$$

τ-Замкнутая формация $\mathfrak{M}$ называется ограниченной τ-замкнутой формацией. если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для некоторой однопорожденной τ-замкнутой формации $\mathfrak{F}$

3.2.5.Теорема. *В том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (ограниченная) τ-замкнутая p-насыщенная формация, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний p-локальный спутник, значения которого являются однопорожденными (соответственно ограниченными) τ-замкнутыми формациями.*

3.2.6.Теорема. *В том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (ограниченная)p-насыщенная формация, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний p-локальный спутник, значения которого являются однопорожденными (соответственно ограниченными) формациями.*

Первые примеры насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, представимых в виде произведения $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ ненасыщенны, были построены В.А.Ведерниковым [3] и Н.Т Воробьевым [4]. Отметим также работу [24], где описан общий метод построения примеров такого рода. В книге А.Н.Скибы [15] на с.120 выделен следующий наиболее простой пример в этом направлении: Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \operatorname{form} Z_q$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_q \operatorname{form} Z_p$, где Z_q и Z_p — группы простых порядков q и p соответственно. И пусть

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}_p \operatorname{form} Z_q)(\mathfrak{N}_q \operatorname{form} Z_p) =$$

$$\mathfrak{N}_p((\operatorname{form} Z_q)\mathfrak{N}_q)(\operatorname{form} Z_p) = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) \operatorname{form} Z_p.$$

Формация $\mathfrak{F}$ насыщенна как произведение насыщенной формации $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ на формацию $\operatorname{form} Z_p$, для которой мы имеем

$$\pi(\operatorname{form} Z_p) = \{p\} \subseteq \{p, q\} = \pi(\mathfrak{M}).$$

С другой стороны, очевидно, обе формации $\mathfrak{N}_p \operatorname{form} Z_q$ и $\mathfrak{N}_q \operatorname{form} Z_p$ ненасыщенны.

В связи со всеми этими наблюдениями весьма интересен следующий результат А.Н.Скибы: Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная насыщенная формация. Тогда, если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация. В дальнейшем были получены аналоги этого результата для композиционных формаций (А.Н.Скиба [15], Го Вэньбинь [26]) и для однопорожденных p-насыщенных формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ при условии, что $\mathfrak{M}$ нормально наследственная формация (А.Н.Скиба и В.Н.Рыжик [9]). В разделе 3.3 на основе наблюдений раздела 3.2, доказана следующая теорема

3.3.1.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая p-насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая τ-замкнутая p-насыщенная формация, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной.*

Отметим следующие частные случаи теоремы 3.3.1.

3.3.13.Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная p-насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая p-насыщенная формация, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной.*

3.3.14.Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ однопорожденная τ-замкнутая p-насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной.*

3.3.15.Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная p-насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной*

3.3.16.Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (нормально) наследственная p-насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая (нормально) наследственная формация, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной.*

3.3.17. Следствие. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная (нормально) наследственная p-насыщенная формация, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p-насыщенной.*

Отметим, что следствие 3.3.15 доказано А Н.Скибой и В.Н.Рыжик в работе [9] при условии, что формация $\mathfrak{M}$ нормально наследственна.

Согласно теореме П Неймана [27] всякая нильпотентная формация наследственна. В работе [11] А.Н.Скибой было доказано следующее обращение этого результата: если у формации $\mathfrak{F}$ все ее подформации наследственны, то формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна. Кроме того, в работе [11] было доказано, что у насыщенной формации $\mathfrak{F}$ все её насыщенные подформации наследственны тогда и только тогда, когда формация $\mathfrak{F}$ метанильпотентна. Развивая эти результаты, Джарадин Джехад доказал [5], что у p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ все её p-насыщенные подформации наследственны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$, т.е. $\mathfrak{F}$ состоит из групп, являющихся расширением p-групп при помощи нильпотентных p'-групп.

Оказывается, что [12] однопорожденные нильпотентные формации $\mathfrak{M}$ — это в точности формации, встречающиеся в качестве первого сомножителя в однопорожденных произведениях $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \neq (1)$. С другой стороны [12], однопорожденные метанильпотентные насыщенные формации $\mathfrak{M}$ — это в точности формации, встречающиеся в качестве первого сомножителя в произведениях вида $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = l\,\mathrm{form}\,G$ (т е в произведениях, являющихся однопорожденными насыщенными формациями, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \neq (1)$). В разделе 3.4 доказано, что такая закономерность сохраняется и в классе p-насыщенных формаций (т.е. однопорожденные p-насыщенные подформации из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$ - это в точности формации, встречающиеся в качестве первого сомножителя в произведениях вида $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = l^p\,\mathrm{form}\,G$, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \neq (1)$).

На основе результатов разделов 3 1–3 4 в разделе 3 5 описаны такие однопорожденные τ-замкнутые p-насыщенные формации $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ для некоторых неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Отметим, что в работах [8

9] такая задача рассматривалась при условии, что формация $\mathfrak{M}$ нормально наследственна.

3.5.1.Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая p-насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ — неединичные τ-замкнутые формации и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_p$. Тогда следующие условия равносильны.*

1) $\mathfrak{F}$ — однопорождённая τ-замкнутая p-насыщенная формация;

2) $\mathfrak{F}$ — ограниченная τ-замкнутая p-насыщенная формация;

3) формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют следующим условиям:

a) $\mathfrak{M}$ — однопорожденная p-насыщенная формация и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$;

b) $\mathfrak{H}$ — абелева однопорожденная формация, причем, если $p \notin \pi(\mathfrak{M})$, то $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

c) $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) \subseteq \{p\}$.

3.5.3.Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая p-насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ — неединичные τ-замкнутые формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая p-насыщенная формация, когда обе формации $\mathfrak{H}_\tau(p)$ и $\mathfrak{H}_\tau(p')$ являются однопорожденными τ-замкнутыми формациями и если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}_p$, то*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}.$$

Напомним [15], что всякое представление формации $\mathfrak{F}$ в виде произведения

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_t, \tag{1}$$

где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}, \ldots, \mathfrak{F}_t$ — τ-замкнутые формации и $t \geq 2$ называется τ-факторизацией формации $\mathfrak{F}$. τ-Факторизация (1) называется несократимой [15], если

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1\cdots\mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1}\cdots\mathfrak{F}_t$$

для всех $i = 1, 2, \ldots .t$.

В разделе 3.6, в частности, доказана следующая теорема.

3.6.1.Теорема. *В том и только в том случае*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\cdots\mathfrak{F}_{t-1}\mathfrak{H} \tag{2}$$

несократимая τ-факторизация однопорожденной τ-замкнутой p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, когда выполняются следующие условия:

1) $t \leq 3$.

2) $\mathfrak{F}$ — однопорожденная p-насыщенная формация, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$ и если $p \in \pi(\mathfrak{F})$. то $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$.

3) если $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{N}_p$, то $t = 2$ и $\mathfrak{H}$ – такая однопорожденная абелева формация, что

$$\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{H}) \subseteq \{p\};$$

4) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $t = 3$, то $\mathfrak{H}$ однопорожденная абелева формация, $(\mathfrak{F}_2)(p)$ — однопорожденная нильпотентная формация и для любых групп $A \in \mathfrak{F}_2$ и $B \in \mathfrak{H}$ имеет место

$$\pi(A/O_p(A)) \cap \pi(B) = \varnothing;$$

5) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $t = 2$, то обе формации $\mathfrak{H}_\tau(p)$ и $\mathfrak{H}_\tau(p')$ являются однопорожденными τ-замкнутыми формациями.

Среди следствий теоремы 3.6.1 отметим следующий результат.

3.6.10.Следствие (А.Н.Скиба [15]). *Пусть*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_t$$

— несократимая факторизация формации $\mathfrak{F}$. Следующие условия равносильны:

1) $\mathfrak{F}$ — является однопорожденной формацией;

2) $\mathfrak{F}$ — является ограниченной формацией;

3) $t = 2$, $\mathfrak{M}_1$ — однопорожденная нильпотентная формация, $\mathfrak{M}_2$ — однопорожденная абелева формация и $\pi(\mathfrak{M}_1) \cap \pi(\mathfrak{M}_2) = \varnothing$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решены следующие задачи:

— дано описание формаций $\mathfrak{M}$ таких что для любой нееденичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией;

— дано описание формаций $\mathfrak{H}$ таких что для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией;

— дана полная классификация однопорожденных p-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, представимых в виде произведения $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$;

— дано описание несократимых факторизаций однопорожденных и ограниченных p-насыщенных формаций, что в частности, даёт решение одной задачи А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова

ЛИТЕРАТУРА

1. Аль-Шаро Халед. О пересечении некоторого семейства максимальных подгрупп конечной группы // Вопросы алгебры. Гомель: Изд–во Гомельского ун–та.–1996.– Вып. 9.– С. 144–152.

2. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. – Смоленск: Смоленский госпединститут, 1988. – 122 с.

3. Ведерников В.А. О насыщенных формациях конечных групп // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, N 3. – С. 32–37.

4. Vorob'ev N.T. On the factorization of local and non-local products of non-local formations. Proc. Intern. Math. Conf , Zielona Gura 1990, 9–13.

5. Джарадин Джехад. О формациях с системами наследственных подформаций // Изв. Вузов. Серия "Математика" – 1997.– N 1.– С. 1–5.

6. Жевнова Н.Г. Внешняя характеризация класса конечных p-разложимых групп // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. н – 1997. – N 2.– С. 46–48.

7. Каморников С.Ф., Шеметков Л.А. Разложимые идемпотенты полугруппы формаций конечных групп // ДАН БССР 1991. – Т. 35, № 10. С. 869–871.

8 Рыжик В.Н. Частично насыщенные формации с заданными нормально наследственными подформациями: Дис к-та физ.-мат. наук: Д 02.12.01. - Гомель, 1997. — 93 с.

9. Рыжик В.Н., Скиба А.Н. О факторизациях однопорожденных p-насыщенных формаций // Вопросы алгебры Гомель: Изд–во Гомельского ун–та, 1997.– Вып. 11.–С. 104–116

10. Селькин М.В Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997. 144 с.

11 Скиба А Н. Характеризация конечных метанильпотентных групп // Мат. заметки. – 1980. – Т.27. N 3. – С. 345–351.

12 Скиба А.Н. О произведении формаций / Алгебра и логика. – 1983 – Т. 22, N 5. – С. 574–583

13 Скиба А.Н., Шеметков Л.А. О частично локальных формациях // ДАН Беларуси. – 1995 – Т. 39, N 3.– С.9–11.

14. Скиба А Н . Шеметков Л А Кратно ω-насыщенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 1 – С. 1–34.

15. Скиба А.Н Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

16. Скиба А Н. Факторизации композиционных формаций // Мат. заметки. – 1999. – Т.65. N 3. – С 389–395.

17. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. Сб. – 1974. – Т. 94, N 4. – С. 628-648.

18. Шеметков Л.А. Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук – 1975. – Т. 30, N 2. – С. 179–198.

19. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. –267 с.

20. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. –1984. –Т.28. N 2. – С. 101–103.

21. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем.– М.: Наука, 1989.– 253 с.

22. Л.А.Шеметков. Гашюцовы произведения классов групп // Докл. НАН РБ. 1998. – Т. 42, № 3. – С. 22–26.

23. Шмелькин А.Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Математика. 1965. – Т. 29. – С. 149–170.

24. A Ballester-Bolinches, M.D.Perez-Ramos. Some questions of the Kourovka Notebook concerning formation products // Comm. Algebra. 1998. – V. 26, № 5. – P. 1581–1587.

25. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. –1963 – Bd. 80. N 4.– S 300–305.

26. Guo Wenbin. On one question of the Kourovka notebook // Comm Algebra. 1000. – V. 28, № 10. P. 4767 4782.

27. Neumann P.M A note on formations of finite nilpotent groups // Bull. London Math. Soc – 1970. V. 2, N 1. – P. 91.

28. Shemetkov L.A. Frattini extension of Finite groups and formations // Communications in Algebra. 1997. – Vol. 25, N 3 – P. 955 964.

29 Skiba A.N. On nontrivial factorisations of an one-generated local formation of finite groups // Proc. Int. Conf. Algebra Dedicat. Mem. A.I.Mal'cev, Novosibirsk, Aug. 21–26, 1989. Pt. z. – Providence (R I), 1992, p. 363–374.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

30 Vishnevskaya T.R. On factorizations of one-generated p-local formations // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Вопросы алгебры. 2000. – №3(16). – С 88–92

31. Skiba A.N, Vishnevskaya T.R. On the Gaschütz product of ω-local formations of finite groups // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Вопросы алгебры. 2000. - №3(16). – С. 201–202.

32. Вишневская Т.Р. p-Локальные произведения формаций конечных групп // Веснік Віцебскага дзяржаунага Універсітэта імя П.М.Машэрава. — 2001. — N1(16). — С. 107–108.

33. Вишневская Т.Р. Общие свойства однопорожденных и ограниченных p-насыщенных формаций // Гомель, 2000 — N 97. — С. 10. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)

34 Вишневская Т.Р., Скиба А.Н. Факторизации p-насыщенных формаций конечных групп // Гомель, 2000. — № 99 С 13 — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)

35. Вишневская Т.Р. Аналог теоремы А Н.Скибы для p-насыщенных формаций // Гомель, 2000. — № 101. — С 19 - (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)

36 Вишневская Т.Р. Некоторые приложения теоремы о факторизациях однопорожденных p-насыщенных формаций // Гомель, 2001 — №3(108) — С. 15. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)

37. Вишневская Т.Р., Скиба А.Н. Описание факторизаций τ-замкнутых p-насыщенных подформаций однопорожденных насыщенных формаций // Гомель, 2001. — №4(109). — С. 18. — (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)

38 Vishnevskaya T R. On factorizations of one-generated p-local formations // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем Тезисы докладов Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца, Гомель. 16 1 октября 2000 г , ГГУ им. Ф.Скорины. — Гомель 2000 - С 77

39. Skiba A N . Vishnevskaya T.R. On Gaschütz product of ω-local formations of finite groups // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем· Тезисы докладов Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца, Гомель. 16 21 октября 2000 г / ГГУ им. Ф.Скорины. — Гомель. — 2000. — С. 78.

Р Э З Ю М Э

Вішнеўская Таццяна Раманаўна

Фактарызацыі p-насычаных фармацый

Ключавыя словы фармацыя груп, p-насычаная фармацыя. здабытак фармацый, нескарачальная фактарызацыя, аднапараджальная фармацыя абмежаваная фармацыя

У дысертацыі даследуюцца фактарызацыі p-насычаных фармацый Апісаны фармацыі $\mathfrak{F}$ такія што для кожнай неадзінкавай фармацыі $\mathfrak{H}$ здабытак $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ з'яўляецца p-насычанай фармацыяй Даказана, што калі $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ аднапараджальная p-насычаная фармацыя, дзе $\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{H}$ неадзінкавыя фармацыі і $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, тады $\mathfrak{M}$ -- аднапараджальная p-насычаная фармацыя Апісаны ўсе нескарачальныя фактарызацыі аднапараджальных і абмежаваных p-насычаных фармацый. што у прыватнасці, дае рашэнне адной задачы А.М.Скібы і Л.А.Шамяткова.

Усе асноўныя вынікі працы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры вывучэнні p-насычаных фармацый канечных груп, а таксама пры выкладанні спецкурсаў у дзяржуніверсітэтах і педінстытутах.

РЕЗЮМЕ

Вишневская Татьяна Романовна

Факторизации p-насыщенных формаций

Ключевые слова формация групп, p-насыщенная формация, произведение формаций, несократимая факторизация, однопорожденная формация, ограниченная формация.

В диссертации исследуются факторизации p-насыщенных формаций. Описаны формации $\mathfrak{M}$ такие, что для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p-насыщенной формацией. Доказано, что если $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная p-насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — неединичные формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}$ — однопрожденная p-насыщенная формация Описаны все несократимые факторизации однопорожденных и ограниченных p-насыщенных формаций, что, в частности, дает решение одной задачи А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова.

Все полученные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы при изучении p-насыщенных формаций конечных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в госуниверситетах и пединститутах.

Summary

Vishnevskaya Tatyana Romanovna

Factorizations of p-saturated formations

Key words: formation of groups, p-saturated formation, product of formations, non-reducible factorization, one-generated formation, limited formation.

In this thesis p-saturated formations are studed. The formations $\mathfrak{M}$ are described such that for any non-identity formation $\mathfrak{H}$ the product $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is a p-saturated formation It is proved that if $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is a one-generated p-saturated formation where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ are non-identity formations and $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ then $\mathfrak{M}$ is a one-generated p-saturated formation. All non-reducible factorizations of one-generated and limited p-saturated formations are described that, in particular, gives a salution of one question of A.N.Skiba and L.A.Shemetkov.

All the main results of this thesis are new. They are of a theoretic character and may be used while studying p-saturated formations of finite groups and while teaching special courses in universities and pedagogical institutes.