САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени АЛИШЕРА НАВОИ

В. И. ВОЛОДЧЕНКОВ

Условия центра для одного вида обыкновенных дифференциальных уравнений

ДИССЕРТАЦИЯ НАПИСАНА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ
(01. 003. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самарканд—1972

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени АЛИШЕРА НАВОИ

В. И. ВОЛОДЧЕНКОВ

Условия центра для одного вида обыкновенных дифференциальных уравнений

ДИССЕРТАЦИЯ НАПИСАНА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ
(01. 003. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самарканд—1972

Работа выполнена на кафедре математического анализа Смоленского государственного педагогического института имени Карла Маркса.

Научный руководитель—кандидат физико-математических наук **И. М. Уваренков.**

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Член-корр. АН УзССР, заслуженный деятель науки, доктор физико-математических наук, профессор **И. С. Куклес** и кандидат физико-математических наук, доцент **Т. Н. Нуров.**

Ведущее высшее учебное заведение — Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова.

Автореферат разослан «22» августа 1972 г.

Защита диссертации состоится « в » сентябре 1972 г. на заседании Ученого Совета по естественным наукам Самаркандского государственного университета имени А. Навои (Самарканд, бульвар им. М. Горького, 15, главный учебный корпус университета).

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале фундаментальной библиотеки Самаркандского госуниверситета.

Ученый секретарь.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Одной из важных задач качественной теории дифференциальных уравнений является вопрос об отличии центра от фокуса для дифференциального уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции.

Основные методы решения этой задачи были разработаны основоположниками качественной теории дифференциальных уравнений А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым.

Выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым, как известно, указаны два метода отличия центра от фокуса.

Французский математик А. Пуанкаре почти одновременно с А. М. Ляпуновым дал метод решения указанной задачи в прямоугольной системе координат, очень близкий ко второму методу А. М. Ляпунова.

Дальнейшее развитие эти методы получили в исследованиях И. С. Куклеса, М. И. Альмухамедова, Н. А. Сахарникова, Н. И. Шилова и других.

В 1939 году И. С. Куклес разработал новый метод отличия центра от фокуса, названный им методом обобщенной симметрии. Применяя этот метод, И. С. Куклес установил эффективные критерии наличия центра для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + F(x, y)}{y},$$

где $F(x, y)$ — аналитическая функция, и выявил все случаи наличия центра, когда $F(x, y)$ — полином третьей или пятой степени.

В 1949 году М. И. Альмухамедов разработал еще один метод отличия центра от фокуса для уравнения в полярной системе координат. Применяя этот метод к исследованию уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^2u_1 + r^3u_2 + \ldots + r^{n+1}u_n}{1 + rv_1 + r^2v_2 + \ldots + r^nv_n}, \tag{2}$$

где u_j и v_j ($j=1, 2, 3, \ldots, n$) — тригонометрические полиномы, он показал, что наличие центра в начале координат для уравнения (2) можно установить проверкой конечного числа условий и указал несколько новых достаточных условий центра.

Задача отличия центра от фокуса решалась и многими другими математиками. Так, например, Н. А. Сахарниковым дано решение проблемы центра и фокуса для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + P(x, y)}{y + Q(x, y)},$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные полиномы второй степени. Им же решена эта задача, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные полиномы третьей степени.

В настоящей диссертации рассматривается уравнение в полярной системе координат вида:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^2u_1 + r^3u_2 + \ldots + r^{k+1}u_k}{1 - rv_1 - r^2v_2 - \ldots - r^kv_k}. \tag{3}$$

Работа состоит из введения и трех глав.

В § 1. 1 главы 1 вводится понятие само-сопряженных полиномов и указываются основные их свойства. В частности, показывается, что всякий тригонометрический полином степени n с действительными коэффициентами есть само-сопряженный полином той же степени.

Таким образом, если в уравнении (3) считать u_j и v_j ($j=1, 2, 3, \ldots, k$) само-сопряженными полиномами, то все результаты, полученные для уравнения (2), имеют место и для уравнения (3).

В § 1. 2 той же главы дан краткий обзор метода М. И. Альмухамедова решения проблемы центра и фокуса для уравнения (2).

§ 1. 3 посвящен установлению **точной верхней границы** числа условий центра для уравнения (3).

Используя условия центра, установленные М. И. Альмухамедовым для уравнения (2), доказывается теорема о том, что наличие центра в начале координат для уравнения (3) можно установить проверкой конечного числа условий.

Из предлагаемого способа доказательства этой теоремы, существенно отличающегося от способа М. И. Альмухамедова, непосредственно следует верхняя оценка числа условий центра:

$$\eta \leqslant k+2\sum_{j=1}^{k} s_j ,$$

где s_j —степень полинома u_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k)$.

В главе 2 рассматривается уравнение вида:

$$\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{r^2u}{1-rv}. \qquad (4)$$

где u и v—само-сопряженные полиномы степени m.

В § 2. 1 этой главы устанавливаются условия наличия центра для уравнения (4), выраженные явно через коэффициенты полиномов u и v.

Условия центра, заданные обычно системой рекуррентных уравнений, здесь получены в виде:

$$\begin{cases} p_0^{(1)}=c_0=0 \\ p_0^{(n)}=\sum\limits_{s_1,\,s_2,\ldots,s_n}\left(\dfrac{nc_{s_n}}{(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})i}+b_{s_n}\right)\times \end{cases}$$

$$\times\left(\frac{(n-1)c_{s_{n-1}}}{(s_1+s_2+\ldots+s_{n-2})i}+b_{s_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{2c_{s_2}}{s_1 i}+b_{s_2}\right)c_{s_1}=0(n\geqslant 2),$$

где c_0, c_{s_1}, c_{s_2}, ..., c_{s_n} — коэффициенты полинома u, b_{s_2}, b_{s_3}, ..., b_{s_n} — коэффициенты полинома v, а индексы s_1, s_2,...,s_n пробегают независимо друг от друга всевозможные значения: 0, ± 1, ± 2,...,$\pm m$ такие, что при фиксированном n $(n\geqslant 2)$ $s_1(s_1+s_2)\cdots(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})\neq 0$, $s_1+s_2+\cdots+s_n=0$.

В этом же параграфе установлены основные свойства полученных условий центра.

§ 2. 2 посвящен другому способу составления условий центра для уравнения (4). Преимущество этого способа перед другими заключается в том, что получение n-го условия центра значительно упрощается, так как автоматически учитывается выполнение всех предыдущих условий центра. Эти условия сравнительно просты и выражены явно через полиномы u и v и их первообразные.

В качестве примера приведены первые десять условий центра для уравнения (4):

$$1.\ \int_0^{2\pi} u\,d\varphi=0. \qquad 2.\ \int_0^{2\pi} a\,d\varphi=0. \qquad 3.\ \int_0^{2\pi} wa\,d\varphi=0,$$

$$4.\ \int_0^{2\pi} w^2 a\,d\varphi=0. \quad 5.\ \int_0^{2\pi} (w^3-w\,\overline{\alpha})\,a\,d\varphi=0. \quad 6.\ \int_0^{2\pi} (w^4-2w^2\,\overline{\alpha})\,u\,d\varphi=0.$$

$$7.\ \int_0^{2\pi} \left(w^5-3w^3\,\overline{\alpha}+\frac{3}{2}\,w\,\overline{\alpha}^2-w^2\,\overline{wa}\right)a\,d\varphi=0.$$

$$8.\ \int_0^{2\pi} \left(w^6-4w^4\,\overline{\alpha}+4w^2\,\overline{\alpha}^2-2w^3\,\overline{wa}-\overline{wa}^2\right)u\,d\varphi=0.$$

$$9.\ \int_0^{2\pi} \left(w^7-5w^5\,\overline{\alpha}-\frac{5}{2}\,w\,\overline{\alpha}^3+\frac{15}{2}\,w^3\,\overline{\alpha}^2-3w^4\,\overline{wa}-\right.$$

$$\left.-\overline{w^3\overline{w^2a}}+5w^2\,\overline{wa}\,\overline{\alpha}-\overline{wa\overline{w^2a}}\right)u\,d\varphi=0.$$

$$10.\ \int_0^{2\pi} \left(w^8-6w^6\,\overline{\alpha}+12w^4\,\overline{\alpha}^2-8w^2\,\overline{\alpha}^3-2\,\overline{w^2\alpha}^2+2w^2\,\overline{w\alpha}\,-\right.$$

$$-12\,\overline{wa}^2\,\overline{\alpha}-2w^4\,\overline{w^2a}-4w^5\,\overline{wa}-36w^3\,\overline{wa}\,\overline{\alpha}-$$

$$-54w\,\overline{w^3a}\,\overline{\alpha}+54w\,\overline{w\alpha}\,\overline{\alpha}+6w^3\,\overline{w^3\alpha}-6w^3\,\overline{wa}\,\overline{\alpha}-$$

$$\left.-48\,\overline{wa}\,\overline{w^3a}+48\,\overline{wa}\,\overline{w\alpha}\,\overline{\alpha}\right)u\,d\varphi=0;$$

где $w=v-\overline{u}$, $\alpha=\overline{ua}$, символ $\overline{f(\varphi)}$ означает $\int f(\varphi)\,d\varphi$.

При решении практических задач, возникающих, например, в теории колебаний и теории устойчивости движения, нередко приходится решать вопрос об отличии центра от фокуса для дифференциального уравнения (1), когда правая часть этого уравнения содержит сравнительно небольшое число нелинейных членов.

Глава 3 и посвящена решению задачи отличия центра от фокуса для уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sum\limits_{\mu=0}^{2k} a_{\mu,2k-\mu} x^{\mu} y^{2k-\mu}}{y + \sum\limits_{\mu=0}^{2k} b_{\mu,2k-\mu} x^{\mu} y^{2k-\mu}}, \tag{5}$$

когда правая часть этого уравнения содержит не более двух нелинейных членов, т. е. решается так называемая задача с двумя коэффициентами в проблеме центра и фокуса для уравнения (5).

Предварительно все коэффициенты уравнения (5) разбиваются на две группы:

$$|a_{2k,0};\ a_{2k-2,2};\ \ldots;\ a_{0,2k};\ b_{2k-1,1};\ b_{2k-3,3};\ \ldots;\ b_{1,2k-1}| \quad (\mathrm{I})$$

и

$$|b_{0,2k};\ b_{2,2k-2};\ \ldots;\ b_{2k,0};\ a_{1,2k-1};\ a_{3,2k-3};\ \ldots;\ a_{2k-1,1}|. \quad (\mathrm{II})$$

При решении задачи с двумя коэффициентами установлено: начало координат — центр, если

1) оба коэффициента, взятые либо из группы (I), либо из группы (II);

2) оба коэффициента имеют вид: $a_{1,2k-1}$, $b_{2k-1,1}$ или $a_{2k,0}$, $b_{0,2k}$;

3) оба коэффициента вида: $a_{2k-\mu,\mu}$, $b_{\mu,2k-\mu}$, причем

$$|a_{2k-\mu,\mu}| = |b_{\mu,2k-\mu}| \ (\mu \neq 0,\ \mu \neq 2k-1).$$

В случае задачи с одним коэффициентом начало координат будет центром, так как этот коэффициент окажется либо из группы (I), либо из группы (II).

Результаты данной работы были доложены и обсуждены на Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений в г. Рязани (1971 г.), на семинарах в Самаркандском университете, в Казанском, Чебоксарском и Смоленском пединститутах.

По теме диссертации автором опубликованы следующие работы:

1. К вопросу об условиях центра для дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^2u_1 + r^3u_2 + \ldots + r^{\kappa+1}u_\kappa}{1 - rv_1 - r^2v_2 - \ldots - r_\kappa v_\kappa}.$$

Ученые записки Смоленского пединститута, № 18, 1967 г.

2. Об условиях центра для уравнения.

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2u}{1 - rv}.$$

Ученые записки Смоленского пединститута, № 18, 1967 г.

3. К вопросу об условиях центра одного дифференциального уравнения. Ученые записки Смоленского пединститута, т. 8, 1969 г.

4. Задача с двумя коэффициентами в проблеме центра и фокуса для одного вида дифференциальных уравнений. Там же.

5. Задача с двумя коэффициентами в проблеме центра и фокуса для одного вида дифференциальных уравнений. Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений. Тезисы докладов, г. Рязань, 1971 г.

Подписано к печати 27/VII 1972 г.
Формат бумаги 60x90 1/16. Печ. л. 0,5.
НК 04433. Тир. 250. Зак. 2353.

Смолгортипография Смолоблупр. по печати 1972 г.