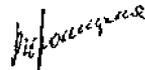


# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

На правах рукописи  
УДК 517.917



**ВОРОНЕЦКАЯ МАРИНА АЛЕКСАНДРОВНА**

**НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ,  
ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ  
ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2006

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент Иванов Александр Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Альбрехт Эрнст Генрихович

доктор физико-математических наук,  
профессор Чубурин Юрий Павлович

Ведущая организация: Институт математики Национальной  
Академии наук Беларуси

Защита состоится «27» декабря 2006 г. в 14<sup>00</sup> на заседании  
диссертационного совета К 212.275.04 в ГОУ ВПО «Удмуртский го-  
сударственный университет» по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Уни-  
верситетская, 1 (корп. 4), ауд. 222. E-mail: [imi@uni.udm.ru](mailto:imi@uni.udm.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского го-  
сударственного университета.

Автореферат разослан «23» ноября 2006 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к.ф.-м.н., доцент



Петров Н.Н.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Как сказано в монографии Н.Г. Малкина <sup>1)</sup> «С середины 50-х годов акцент с исследования периодических колебаний сместился в сторону изучения условно периодических и почти периодических (п.п.) колебаний». Во многих интегрируемых задачах движение оказывается условно периодическим. Более точно: во многих физических системах с несколькими степенями свободы множество периодических движений составляет «множество меры 0», а множество полной меры составляют п.п. движения (например, движения небесных тел, движения твердого тела с закрепленной точкой без воздействия внешних сил, колебания, возникающие в электрических цепях). Кроме того, возмущающая сила в физических системах также зачастую имеет п.п. характер. Одним из важных вопросов исследования является вопрос о существовании п.п. решения нелинейного дифференциального уравнения, в частности, уравнения Эйлера-Лагранжа (или системы уравнений Гамильтона), описывающего движение физической системы. Результаты исследований находят применение в теоретической механике, небесной механике, теории электрических цепей и т.д.

Одним из методов качественного изучения уравнений Эйлера-Лагранжа является переход к рассмотрению соответствующей вариационной задачи. По-видимому, впервые Blot J. доказал, что множество п.п. решений уравнения Эйлера-Лагранжа совпадает со множеством стационарных точек функционала

$$J(x(\cdot)) = M\{L(x(t), \dot{x}(t))\} \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

определенного на множестве  $B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  п.п. по Бору вместе со своей производной функций. В работах <sup>2) 3)</sup> он исследовал задачу

$$J(x(\cdot)) \rightarrow \inf, \quad x(\cdot) \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad (0.1)$$

---

<sup>1)</sup> Малкин Н. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

<sup>2)</sup> Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. // J. Math. Anal. — 1988. — V.134, №2. — P. 312 — 321.

<sup>3)</sup> Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. II // Bull. Austral. Math. Soc. — 1989. — V.40. — P. 457 — 463.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

названную им простейшей задачей вариационного исчисления в среднем. Применение вариационного формализма позволило ему привести некоторые необходимые и достаточные условия существования (а также отсутствия) п.п. решения уравнения Эйлера-Лагранжа, и исследовать структуру множества таких решений <sup>4)</sup>.

Другой актуальной задачей, связанной с п.п. движениями, является задача п.п. оптимизации, и здесь следует отметить в первую очередь работы А.Г. Иванова. Задача п.п. оптимизации возникает в случае, когда у управляемой системы координатные функции периодичны, и периоды несоизмеримы. Такая ситуация встречается во многих прикладных задачах. Задача п.п. оптимизации является непосредственным обобщением задачи периодической оптимизации, исследованием которой занимались многие авторы. Для этой задачи получен ряд сильных результатов, составляющих теорию периодической оптимизации. В то же время задачи п.п. оптимизации исследованы пока недостаточно. Задача оптимального управления п.п. движениями

$$M\{f(t, x(t), \dot{x}(t))\} \rightarrow \text{extr}, \quad \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t))$$

исследовалась в работе <sup>5)</sup> в предположении, что система уравнений в вариациях, отвечающая уравнению связи, является экспоненциально дихотомичной. Вариационные задачи могут рассматриваться как задачи оптимального управления п.п. движениями. Здесь следует отметить, что при такой формализации в уравнении связи  $\dot{x}(t) = u(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  управления  $u(\cdot)$  должны быть таковы, что соответствующая функция  $x(t) = x(0) + \int_0^t u(s) ds$  почти периодична по Бору, а значит, ограничена на  $\mathbb{R}$ . Это обстоятельство потребовало при доказательствах построения вариаций специального вида. Отметим, что при формализации вариационных задач в виде задач оптимального управления п.п. движениями оптимальный процесс является решением вариационной задачи в сильном смысле. Поэтому в диссертации рассматривались решения в сильном и слабом смыслах.

Сказанное свидетельствует об актуальности задач, рассмотренных в диссертации.

---

<sup>4)</sup>Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. IV //Ricerche di Math. 1991. V.XL, fasc. 1. P. 3 — 18.L.

<sup>5)</sup> Иванов. А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние. // Доклады РАН. — 1995 г. — Т.343, №6. — с. 51- 53.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

**Цель работы.** Основной целью работы является вывод необходимых условий первого и второго порядков решения в сильном и слабом смысле ряда экстремальных задач, определенных на множестве п. п. по Бору функций, производная которых принадлежит пространству ограниченных (в существенном) п. п. по Степанову отображений.

**Методы решения.** Используются методы теории п.п. функций, дифференциальных уравнений с п.п. коэффициентами, вариационное исчисление, а также некоторые методы, использующиеся при изучении задач оптимального управления п.п. движениями.

**Научная новизна.** В рамках общих принципов теории экстремальных задач для ряда экстремальных задач, определенных на множестве п.п. по Бору функций, производная которых принадлежит пространству ограниченных п.п. по Степанову отображений, приведены необходимые условия первого и второго порядков решений в слабом и сильном смыслах. Для функционалов в виде среднего значения квадратичной формы с п.п. по Степанову коэффициентами приведены необходимые и достаточные условия неотрицательности и необходимое условие строгой положительности. В одномерном случае получены достаточные условия решения простейшей задачи вариационного исчисления, определенной на указанном множестве п.п. функций.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть в дальнейшем использованы при исследовании конкретных прикладных задач, в которых возникают колебательные процессы, и задач, допускающих управление такими процессами.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 1998-2006 годы), научной конференции молодых ученых (МГУ, Мехмат, май 1998 года), семинаре кафедры прикладной математики УрГУ (Екатеринбург, 2003 год), научной конференции "Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям", (Минск, 2005 год), научной конференции "Теория управления и математическое моделирование", посвященная 50-ти летию Ижевского государственного технического университета (Ижевск, 2006 год), научной конференции "Теория управления и математическое моделирование", посвященная 75-ти летию Удмуртского государственного университета (Ижевск,

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

2006 год).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах [1]-[5].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, одиннадцати параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы. Объем диссертации 97 страниц. Библиографический список содержит 47 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описывается общая постановка задачи и излагается краткое содержание работы.

В первом параграфе приведены определения и используемые в дальнейшем свойства банаховых пространств  $B \doteq B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  почти периодических (п.п.) по Бору и  $S \doteq S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  п.п. Степанову функций, а также пространства  $S_\infty \doteq S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , состоящего из ограниченных (в существенном) п.п. по Степанову функций.

Напомним, что каждой п.п. по Степанову функции  $f$  можно поставить в соответствие ряд Фурье  $\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda, f) e^{i\lambda t}$ . В первом параграфе доказана следующая

**Теорема 0.1.** Если ряд Фурье  $\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda, f) e^{i\lambda t}$ , отвечающий функции  $f \in S_\infty$ , совпадает с формально продифференцированным рядом Фурье  $\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda, g) e^{i\lambda t}$  для функции  $g \in S$ , то функция  $g$  принадлежит пространству  $B$ , и при почти всех  $t \in \mathbb{R}$  имеет место равенство  $\dot{g}(t) = f(t)$ .

Результаты второго параграфа носят вспомогательный характер. В нем введено в рассмотрение пространство  $B(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}^n)$ ,  $U$  — компактное множество в  $\mathbb{R}^n$ , состоящее из непрерывных отображений  $(t, u) \mapsto f(t, u)$ , которые п.п. по  $t \in \mathbb{R}$  в смысле Бора равномерно по  $u \in U$ , а также пространство  $S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}^n))$ , состоящее из таких отображений  $f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что для любого  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  функция  $(t, u) \mapsto f(t, u)$ ,  $(t, u) \in [a, b] \times U$  удовлетворяет условиям Каратеодори, и для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $\varepsilon$ -почти периодов  $E_S(f, \varepsilon) \doteq \bigcap_{u \in U} E_S(f(\cdot, u), \varepsilon)$  относительно плотно.

Обоснована корректность определения на множестве  $S_\infty(\mathbb{R}, U)$  функционала  $u(\cdot) \mapsto \mathcal{J}(u(\cdot)) \doteq M\{g(t, u(t))\}$ , отвечающего заданной функции  $g \in S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$ , и указан ряд свойств этого функционала.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

**Теорема 0.11.** Пусть функция  $\hat{x} \in \mathfrak{B}$  удовлетворяет следующим условиям:

- а) для почти всех  $t \in \mathbb{R}$  выполнено равенство (0.4);
  - б)  $\hat{L}''_{uu}, \hat{L}''_{xu} \in \mathfrak{B}$  и  $\inf_{t \in \mathbb{R}} \hat{L}''_{uu}(t) > 0$ ;
  - в) найдется такая функция  $z \in \mathfrak{B}^2$ , что  $\inf_{t \in \mathbb{R}} z(t) > 0$ , и для почти всех  $t \in \mathbb{R}$  оператор  $L$ , отвечающий функции Лагранжа задачи (0.2), удовлетворяет неравенству  $L[z](t) \leq 0$  (при этом  $L[z](t) \neq 0$ ).
- Тогда  $\hat{x}$  является решением задачи (0.3) в слабом смысле.

## Публикации по теме диссертации

1. Воронцовская М. А., Иванов А. Г. О необходимых условиях сильного минимума для простейшей задачи вариационного исчисления в классе почти периодических функций // Известия Института математики и информатики УдГУ. №2(13). — Ижевск: Изд-во УдГУ. — 1998. С. 59-70.
2. Воронцовская М. А., Иванов А. Г. О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций // Деп. в ВИНТИ 27.12.03, №1902-В2003. УдГУ, Ижевск, 2003. 32 с.
3. Воронцовская М. А., Иванов А. Г. Почти периодическая задача Больца. // Известия ВУЗов. Математика. 2005. № 7 (518) С.8-24.
4. Воронцовская М. А. О некоторых свойствах среднего значения почти периодической квадратичной формы. // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Ижевск, 2005. С. 19-34.
5. Воронцовская М. А. О задачах вариационного исчисления в классе почти периодических функций. // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск. — 2005. С. 96-97.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

**Отпечатано с оригинал-макета заказчика**

**Подписано в печать 17.11.2006. Формат 60x84 1/16.**

**Тираж 100 экз. Заказ № 1957.**

**Типография ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»  
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.**

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)