

УДК 517.9+521.3

**ВОРОНОВ**  
**АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ**

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ**  
**В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.01. – вещественный, комплексный и  
функциональный анализ

Минск, 2011

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в УО «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Научный руководитель – **Трубников Юрий Валентинович**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
заведующий кафедрой теоретической физики  
физического факультета  
УО «Витебский государственный университет  
имени П.М. Машерова».

Официальные оппоненты: **Лебедев Андрей Владимирович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой нелинейного анализа и  
аналитической экономики  
механико-математического факультета  
Белорусского государственного университета;

**Ляликов Александр Сергеевич**,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры математического анализа  
факультета математики и информатики  
УО «Гродненский государственный университет  
имени Янки Купаль».

Оппонирующая организация: Государственное научное учреждение  
**«Институт математики Национальной  
академии наук Беларуси».**

Защита состоится « 18 » марта 2011 г. в 10:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская 8 (юридический факультет), ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета

Автореферат разослан «10» февраля 2011 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций, доктор  
физико-математических наук, профессор



Н. В. Лазакович

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ) КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Базовым объектом исследования являются системы нелинейных дифференциальных уравнений некоторых задач небесной механики. Выбор данного объекта, прежде всего, обосновывается актуальностью задачи расчета траекторий движения планет и ИСЗ (искусственных спутников Земли).

Фундаментальную основу небесной механики составляет задача “ $N$  гравитирующих материальных точек” ( $N$  тел): описать движение в трехмерном евклидовом пространстве изолированной системы, состоящей из  $N$  материальных точек с фиксированными массами, притягивающих друг друга по закону Ньютона.

Сложность поиска общего решения уже задачи 3-х тел, математическая модель которой представляет собой систему девяти нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, привела к тому, что именно эта знаменитая “ньютонова проблема трех тел” на протяжении трех веков играла определяющую роль в развитии математических методов и в возникновении новых плодотворных направлений в математике и небесной механике.

Задача считается интегрируемой, если она решается в “квадратурах”, то есть если можно построить общий интеграл дифференциальных уравнений задачи, содержащий нужное число независимых произвольных постоянных. И в этом смысле общая задача трех тел является неинтегрируемой. В 1887 году Брунс доказал, что дифференциальные уравнения движения для задачи трех тел не имеют никаких других (кроме десяти классических) интегралов, левые части которых были бы алгебраическими функциями прямоугольных координат и их производных. В 1889 г. Пенлсе доказал аналогичное утверждение для задачи многих тел.

Поэтому практические вычисления могут быть эффективно проведены только на основе аппроксимирующих систем уравнений с более простой структурой. Первые аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли, которые допускают интегрирование в квадратурах, были предложены в 1959 и 1960 годах в работах Дж. Винти и М.Д. Кислика. Однако построенные интегралы не дают явного аналитического выражения зависимости координат от времени.

В диссертации предложен метод построения приближенной модели гравитационного взаимодействия многих тел, позволяющий получить эффективные формулы для вычисления координат движущихся тел как функций времени. В основе метода лежит чебышевская аппроксимация потенциала, как функции многих переменных. На этой базе удалось построить линейную модель гравитационного взаимодействия планет Солнечной системы, дающую результаты достаточно хорошо согласованные с наблюдаемыми величинами.

## Связь работы с крупными научными программами и темами

Тема диссертации соответствует п.6.1 «Математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе» Перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований РБ на 2006–2010 гг., утвержденного Постановлением Совета Министров РБ 17.05.2005 №512.

## Цель и задачи исследования

Основной целью диссертационного исследования является разработка методов построения явных и аппроксимационных решений в задаче многих тел.

Для достижения этой цели были поставлены следующие **основные задачи**:

- разработать метод собственного “пространства-времени” в задаче двух тел с произвольным потенциалом и на основе такого метода получить явную аналитическую зависимость радиальной составляющей и декартовых координат от времени в случае невозмущенного кеплеровского движения;

- найти в явном аналитическом виде коэффициенты полиномов наилучшего приближения в чебышевской метрике для потенциала в классическом ньютоновском случае, а также в тех случаях, которые представляют интерес для задач небесной механики (эти функции содержат отрицательные степени);

- построить аппроксимационную модель в задаче многих тел на основе найденной аппроксимации потенциала;

- провести исследование полученной аппроксимационной математической модели задачи многих тел: получить систему первых интегралов, сравнить эту систему с классической, решить в явном виде задачу Коши и двухточечную краевую задачу;

- сравнить результаты вычислений эфемерид (координат), проведенных на основе разработанного метода, для планет Солнечной системы с астрономическими таблицами и, таким образом, убедиться в эффективности предлагаемого метода.

Объектом исследования являются системы нелинейных уравнений некоторых задач небесной механики. Выбор данного объекта, прежде всего, обосновывается актуальностью задачи расчета траекторий движения планет, комет и ИСЗ. Предметом исследования являются методы чебышевской аппроксимации функций с отрицательными степенями и их применение к объекту нашего исследования.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Положения, выносимые на защиту

1. Метод собственного “пространства-времени” для задачи двух тел с произвольным потенциалом. Описание явной параметрической зависимости как радиальной составляющей, так и декартовых координат движущихся тел от “нового времени” в задаче двух тел в случае ньютоновского потенциала.

2. Явные формулы для полиномов наилучшего приближения в чебышевской метрике для произвольной строго выпуклой функции и полиномы наилучшего приближения для суммы функций независимых переменных. Явные формулы для полиномов наилучшего приближения для наиболее используемых в космологии и небесной механике потенциалов, порожденных степенными функциями.

3. Построение аппроксимационной системы уравнений в задаче многих тел. Анализ построенной системы:

I) анализ спектральной структуры матрицы, задающей систему;

II) нахождение и исследование свойств первых интегралов системы, сравнение их свойств со свойствами природных систем;

III) построение явных решений задачи Коши и двухточечной задачи, сравнение свойств этих решений со свойствами природных систем.

4. Построение аппроксимационной модели гравитационного взаимодействия планет Солнечной системы и разработка соответствующего алгоритма явного вычисления эфемерид.

Проведение сравнения результатов, полученных с помощью построенной аппроксимирующей модели с известными результатами астрономических наблюдений.

## **Личный вклад соискателя**

Все основные результаты, приведенные в выносимой на защиту диссертационной работе, получены соискателем лично. Научная идея и задачи исследования были сформулированы научным руководителем доктором физико-математических наук, доцентом Ю.В. Трубниковым.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми и подтверждены полными доказательствами. Эти результаты имеют важное значение для развития общей теории задачи многих тел и задачи расчета траекторий движения планет и ИСЗ.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- 4-й международной математической конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2006)», (13–19 сентября, Минск, 2006 г.);
- 4-й международной конференции «Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», (14–18 мая, Обнинск, 2008 г.);
- международной научной конференции «X Белорусская математическая конференция (БМК-10)», (3–7 ноября, Минск, 2008 г.);
- международной математической конференции «Актуальные проблемы анализа», (7-10 апреля, Гродно, 2009 г.);
- XV (62) региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, посвящённой 100-летию со дня основания УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
- научном семинаре по небесной механике в Государственном астрономическом институте имени П.К. Штернберга МГУ (ГАИШ МГУ) 19 февраля 2008 г., руководитель семинара доцент Л.Г. Лукьянов;
- научном семинаре по функциональному анализу в Белорусском государственном университете 16 октября 2008 г.

## **Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах: 1 монографии, прошедшей научное рецензирование, и 5 статьях в научных журналах, включенных в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований (общим объемом 13,23 авторского листа), а также 1 статье в сборнике научных трудов, 2 статьях в сборниках материалов научных конференций и 3 тезисах.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация включает в себя оглавление, введение, общую характеристику работы, четыре главы, заключение, библиографический список. Полный объем диссертации составляет 108 страниц, в том числе 1 рисунок занимает 0,4 страницы, 5 таблиц – 2,5 страницы. Библиографический список состоит из 113 наименований, включая собственные публикации автора.

В первой главе излагаются некоторые понятия и утверждения (без доказательств), использованные в процессе исследований, отраженных в настоящей диссертации, а так же дается обзор исторических сведений и литературы по теме диссертации. В разделе 1.1 приводятся основные этапы развития небесной механики и математических методов в ней. Рассмотрению понятия потенциала и различных форм его представления посвящен раздел 1.2. Далее в разделе 1.3 описываются различные направления исследований по данной тематике и определяется область диссертационных исследований, обосновывается ее новизна и актуальность. В разделе 1.4 дан обзор содержания диссертации и выводы к первой главе.

Во второй главе построены полиномы наилучшего приближения в чебышевской метрике для произвольной строго выпуклой функции (теорема 2.1, теорема 2.2), и полиномы наилучшего приближения для суммы функций независимых переменных (теорема 2.11). На этой основе явно подсчитаны полиномы наилучшего приближения для ряда наиболее используемых в космологии и небесной механике потенциалов, порожденных степенными функциями. Эти результаты являются базой для построения в следующей главе аппроксимационной модели системы многих тел.

В разделе 2.1 вычислены полиномы наилучшего приближения для дифференцируемой строго выпуклой функции. Основные формулы представлены в теоремах 2.1 и 2.2. Приведем формулировку первой из них.

**Теорема 2.1** [1, с. 68; 3]. Пусть  $a > 0$ ,  $0 \leq e < 1$  и  $f(r)$  – дифференцируемая, строго выпуклая функция на отрезке  $a(1-e) \leq r \leq a(1+e)$ . Тогда полиномом наилучшего приближения первой степени для  $f$  на данном отрезке является полином  $P_1(s) = a_1 r + a_0$ , в котором

$$a_0 = \frac{1}{4e} \left[ (1+e)f_1 - (1-e)f_3 \right] - \frac{f_3 - f_1}{4ae} \cdot (f')^{-1} \left( \frac{f_3 - f_1}{2ae} \right) + \frac{f}{2} \left[ (f')^{-1} \left( \frac{f_3 - f_1}{2ae} \right) \right],$$
$$a_1 = \frac{f_3 - f_1}{2ae}, \quad f_1 = f[a(1-e)], \quad f_3 = f[a(1+e)],$$

при этом

$$|f(r) - P_1(r)| \leq d_{\max} = \frac{1}{4e} \left[ (1+e)f_1 - (1-e)f_3 \right] + \frac{f_3 - f_1}{4ae} \cdot (f')^{-1} \left( \frac{f_3 - f_1}{2ae} \right) - \frac{f}{2} \left[ (f')^{-1} \left( \frac{f_3 - f_1}{2ae} \right) \right].$$

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Для системы трех тел получено явное решение задачи Коши. На этой базе для исследуемой системы выведен третий закон Кеплера с аппроксимационной поправкой [1], [6], [10].

Для аппроксимирующей системы в относительных координатах получены явные решения задачи Коши и двухточечной краевой задачи. На этой базе найдено соотношение, которое подтверждает наличие в нашей теории точки либрации, что соответствует физической действительности [1], [3].

4. На базе разработанного метода построена аппроксимационная модель гравитационного взаимодействия планет Солнечной системы и создан соответствующий алгоритм вычисления эфемерид. На основе полученного алгоритма в явном числовом виде найдены коэффициенты уравнений [1], [3], [4].

Проведено сравнение результатов, полученных с помощью построенной аппроксимирующей модели с известными результатами астрономических наблюдений [1], [3], [4].

## **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Практическая значимость проведенного исследования состоит в том, что полученные теоретические результаты могут быть использованы для анализа реальных данных, возникающих в физических, экономических, технических и других системах, что позволит более точно выявлять свойства таких систем и прогнозировать их поведение. Метод собственного времени может оказаться полезным в космологии, квантовой и небесной механике, для развития теории движения ИСЗ, теории строения вещества, в электродинамике и т. д.

Метод экстремальных полиномов может быть использован не только в космологии, квантовой и небесной механике для расчета траекторий движений ИСЗ, планет, комет и т. д., но и в других задачах, где соответствующие дифференциальные уравнения содержат отрицательные степени неизвестных функций.



## ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Монографии

1. Воронов, А.М. Метод чебышевской аппроксимации потенциала в задаче многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов. – Витебск: изд. УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2009. – 187 с.

### Статьи в научных журналах

2. Воронов, А.М. Решение задачи трех тел в терминах временных рядов / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2007. - №1 (43). – С. 132–136.

3. Воронов, А.М. Аппроксимативный метод решения задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008. - №2 (48). – С. 130–138.

4. Воронов, А.М. Аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел в метрике  $L_2$  / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2008. - №3. – С. 133–140.

5. Воронов, А.М. Метод собственного времени в задаче двух тел / А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2009. - №3 (53) – С. 145–151.

6. Воронов, А.М. Аналитическое решение задачи трёх тел методом аппроксимации потенциала / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2010. - №2 (56). – С. 26–35.

### Статьи в сборниках научных трудов

7. Воронов, А.М. Метод нелинейного времени в задаче двух тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Ученые записки УО «ВГУ им. П.М. Машерова»: сб. науч. ст. – Витебск: УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008. – Т. 7:.. – С. 255-268.

### Статьи в сборниках материалов конференций

8. Воронов, А.М. Решение задачи трех тел с предварительной чебышевской аппроксимацией / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Аналитические

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

методы анализа и дифференциальных уравнений: Труды междунар. Матем. Конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. Академика Ф.Д. Гахова, Минск, 13–19 сент. 2006 г. / Труды Института математики НАН Беларуси; редкол.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин. – Минск, 2006. – С. 134-138.

9. Воронов, А.М. Построение экстремального полинома для суммы функций независимых аргументов / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы XV (62) региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, посвящённой 100-летию со дня основания УО «ВГУ им. П.М. Машерова», Витебск, 3–5 марта 2010 г. / редкол.: А.П. Солодков, И.М. Прищепа и др. – Витебск, 2010. – С. 48-50.

## Тезисы докладов

10. Воронов, А.М. Чебышевская аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания: Тезисы 4-й междунар. матем. конф., Обнинск, 14–18 мая 2008 г. / Российский фонд фундаментальных исследований, Обнинский гос. технич. унив. атомной энергетики, Матем. инст. им. В.А. Стеклова РАН, Инст. матем. моделирования РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Инст. прикл. матем. им. Келдыша РАН, Инст. вычислит. матем. РАН; редкол.: В.А. Галкин [и др.]. – Обнинск, 2008. – С. 78-79.

11. Воронов, А.М. Аппроксимативный метод решения задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // X Белорусская математическая конференция: Тезисы междунар. научной конф, Минск, 3–7 ноября 2008 г. / Институт математики НАН Беларуси, БГУ; редкол.: С.Г. Красовский, А.А. Лепин. – Минск, 2008. – С. 68-69.

12. Воронов, А.М. Метод нелинейного времени в задаче двух тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Актуальные проблемы анализа: Тезисы междунар. матем. конф, Гродно, 7–10 апреля 2009 г. / НАН Беларуси, Институт математики НАН Беларуси, Министерство образования республики Беларусь, УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Белорусское математическое общество; редкол.: Я.В. Радыно, В.Г. Кротов, Ю.М. Вувуникян. – Гродно, 2009. – С. 178-179.

Воронов Андрей Михайлович

## ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ

Ключевые слова: аппроксимация потенциала, нелинейный параметр, коэффициенты полинома наилучшего приближения в чебышевской метрике, первые интегралы.

Целью диссертационной работы является разработка методов аппроксимации потенциала в задаче многих тел и на основе такой аппроксимации получение и исследование линейных математических моделей.

Результаты диссертационного исследования:

– разработан метод собственного времени в задаче двух тел с произвольным потенциалом и на основе такого метода получена явная аналитическая зависимость радиальной составляющей и декартовых координат от времени в случае невозмущенного кеплеровского движения;

– найдены в явном аналитическом виде коэффициенты полиномов наилучшего приближения в чебышевской метрике для силовой функции в классическом ньютоновском случае, а также в тех случаях, которые представляют интерес для расчета орбит ИСЗ;

– проведено исследование полученной в результате такого подхода линейной математической модели задачи многих тел: получена независимым образом система первых интегралов, эта система сопоставлена с классической, решена в явном виде задача Коши и двухточечная краевая задача;

– сопоставлены результаты вычислений эфемерид, проведенных на основе разработанного метода, для планет Солнечной системы с астрономическими таблицами и, таким образом, подтверждена эффективность предлагаемого метода.

Построен новый метод аппроксимации отрицательных степеней и сумм отрицательных степеней полиномом наилучшего приближения в чебышевской метрике и применен к потенциалу задачи многих тел. Развита метод собственного параметра в задаче двух тел, приводящий к явной аналитической зависимости радиальной составляющей и декартовых координат от данного параметра.

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и могут использоваться для вычисления эфемерид планет, ИСЗ и других небесных тел. Результаты могут быть также использованы при чтении специальных курсов.

Воранаў Андрэй Міхайлавіч

## ЭКСТРЭМАЛЬНЫЯ ПАЛІНОМЫ Ў ЗАДАЧЫ МНОГІХ ЦЕЛ

Ключавыя словы: апраксімацыя патэнцыялу, нелінейны параметр, каэфіцыенты палінома найлепшага набліжэння ў чэбышэўскай метрыцы, першыя інтэгралы.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца распрацоўка метадаў апраксімацыі патэнцыялу ў задачы многіх цел і на аснове такой апраксімацыі атрымання і даследаванне лінейных матэматычных мадэляў.

Вынікі дысертацыйнага даследавання:

- распрацаваны метады уласнага часу ў задачы двух цел з адвольным патэнцыялам і на аснове такога метаду атрымана яўная аналітычная залежнасць радыяльнай састаўляючай і дэкартавых каардынатаў ад часу ў выпадку неабуранага кеплераўскага руху;
- знойдзены ў яўным аналітычным выглядзе каэфіцыенты паліномаў найлепшага набліжэння ў чэбышэўскай метрыцы для патэнцыялу ў класічным ньютанаўскім выпадку, а таксама ў тых выпадках, якія ўяўляюць цікавасць для разліку арбіт ІСЗ;
- праведзена даследаванне атрыманай у выніку такога падыходу лінейнай матэматычнай мадэлі задачы многіх цел: атрымана незалежным чынам сістэма першых інтэгралаў, гэтая сістэма супастаўлена з класічнай, вырашана ў яўным выглядзе задача Кашы і дзвюхкропкавая краёвая задача;
- супастаўленыя вынікі вылічэнняў эфемерыд, праведзеных на аснове распрацаванага метаду, для планет Сонечнай сістэмы з астранамічнымі табліцамі і, такім чынам, пацверджана эфектыўнасць прапанаванага метаду.

Пабудаваны новы метады апраксімацыі адмоўных ступеняў і сум адмоўных ступеняў паліномам найлепшага набліжэння ў чэбышэўскай метрыцы і ўжыты да патэнцыялу задачы многіх цел. Развіты метады уласнага параметра ў задачы двух цел, якія прыводзіць да яўнай аналітычнай залежнасці радыяльнай састаўляючай і дэкартавых каардынатаў ад гэтага параметра.

Усе вынікі, атрыманыя ў дысертацыі, з'яўляюцца новымі і могуць выкарыстоўвацца для вылічэння эфемерыд планет, ІСЗ і іншых нябесных цел. Вынікі могуць быць таксама выкарыстаны пры чытанні спецыяльных курсаў.

Voronov Andrei Mikhailovich

**EXTREME POLYNOMS  
IN THE PROBLEM OF MANY BODIES**

Keywords: potential approximation, nonlinear parameter, the coefficients of the polynomial of best approximation in the Chebyshev metric, the first integrals.

The purpose of dissertational work is working out of methods of approximation of potential in a problem of many bodies and on the basis of such approximation reception and research of linear mathematical models.

The results of dissertation research:

– developed a method of proper time in the two-body problem with arbitrary capacities and on the basis of this method we obtain an explicit analytical dependence of the radial component of the Cartesian coordinates, and from time to time in the case of the unperturbed Kepler motion;

– found in explicit analytic form of the coefficients of NAI-best approximation in the Chebyshev metric for the strength function in the classical Newtonian case, as well as in those cases that are of interest to calculate the orbits of satellites;

– a study resulting from this approach a linear mathematical model of many-body problem: the system is obtained independently of the first integrals, the system was compared with the classical, is solved in an explicit form of the Cauchy problem and the two-point boundary problem;

– compared the results of the ephemeris calculation carried out on the basis of the developed method, for the planets of the solar system with astronomical tables, and, thus, confirmed the effectiveness of the proposed method.

A new method for approximating the negative powers and sums of negative powers of a polynomial of best approximation in Chebyshev-tion metric and applied to the potential problem of many bodies. A method of setting its own two-body problem, which leads to an explicit analytical dependence of the radial component and the Cartesian coordinates of the parameter.

All the results obtained in the thesis, are new and can be used to calculate the ephemerides of the planets, satellites and other celestial bodies. Results can also be used while reading the special courses.

