

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им Ф. СКОРИНЫ

УДК 512.542

ВИШНЕВСКАЯ Татьяна Романовна

Факторизации p -насыщенных формаций

01.01.06 – математическая логика, алгебра
и теория чисел

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Гомель - 2001 г.

Работа выполнена в Гомельском государственном университете им. Ф.Скорины

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

СКИБА АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

ВОРОБЬЕВ НИКОЛАЙ ТИМОФЕЕВИЧ

кандидат физико-математических наук, доцент

СЕМЕНЧУК ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ

Оппонирующая организация — Институт математики НАН Украины

Защита состоится “ 01 ” июня 2001 года в 16⁰⁰ часов
на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Гомельском го-
сударственном университете имени Ф.Скорины по адресу: 246019, г.Гомель,
ул.Советская, 104. Телефон ученого секретаря: (0232) 57-37-91

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 Гомельского
государственного университета им. Ф.Скорины

Автореферат разослан “ 27 ” апреля 2001 года

Ученый секретарь

совета по защите диссертаций

кандидат физико-математических наук,

доцент



А.Ф.ВАСИЛЬЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации Важность изучения p -насыщенных, т.е. замкнутых относительно p -фраттиниевых расширений формаций, обусловлена многими причинами. Во-первых, если $\mathfrak{F} = \mathcal{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то $\mathfrak{H}$ — p -насыщенная формация для всех простых чисел p , не принадлежащих объединению множеств всех простых делителей порядков групп из $\mathcal{M}$ (Л.А.Шеметков, 1984). Таким образом, изучение факторизаций насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ с неизбежностью приводит к необходимости исследования частично насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$. Во-вторых, изучение любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ во многих важных случаях сводится к исследованию некоторой системы ее p -насыщенных подформаций, являющихся значениями максимального внутреннего локального экрана f формации $\mathfrak{F}$ (в частности, $\mathfrak{F}$ есть объединение в решетке всех формаций такой системы подформаций $\{f(p)\}$) (А.Н.Скиба и Л.А.Шеметков, 1997). Отметим, наконец, что p -насыщенные формации весьма полезны при изучении различных классов непростых конечных групп. Таким образом, задача изучения и классификации p -насыщенных формаций является вполне актуальной и перспективной.

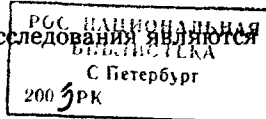
Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертация выполнена в рамках следующей госбюджетной темы:

“Структурная теория формаций и других классов алгебр” Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси №88 от 23 ноября 1995г. (номер госрегистрации в БелИСА — 19963987), тема выполнялась в 1996–2000 гг.

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертации является изучение факторизаций p -насыщенных формаций. Для достижения этой цели в диссертации решены следующие задачи:

- дано описание формаций $\mathcal{M}$ таких, что для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathcal{M}\mathfrak{H}$ является p -насыщенной формацией;
- дано описание формаций $\mathfrak{H}$ таких, что для любой неединичной формации $\mathcal{M}$ произведение $\mathcal{M}\mathfrak{H}$ является p -насыщенной формацией;
- дана полная классификация однопорожденных p -насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, представимых в виде произведения $\mathcal{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$;
- дано описание несократимых факторизаций однопорожденных и ограниченных p -насыщенных формаций, что в частности, даёт решение одной задачи А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются



факторизации формаций конечных групп. Предмет исследования — строение p -насыщенных формаций конечных групп, представимых в виде произведения неединичных формаций.

Методология и методы проведенного исследования. В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, методы теории формаций конечных групп. Используются также элементы теории представлений групп, а также методы общей теории классов.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все полученные результаты являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

3.1.4. Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathcal{H}$ произведение $\mathcal{MH}$ является p -насыщенной формацией, когда $\mathcal{M}$ — такая p -насыщенная формация, что $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}$.

3.1.5. Теорема. Пусть $\mathcal{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathcal{M}$ произведение $\mathcal{MH}$ является p -насыщенной формацией, когда $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ — класс всех групп.

3.2.6. Теорема. В том и только в том случае $\mathcal{F}$ — однопорожденная (ограниченная) p -насыщенная формация, когда $\mathcal{F}$ имеет такой внутренний p -локальный спутник, значения которого являются однопорожденными (соответственно ограниченными) формациями.

3.3.13. Теорема. Пусть $\mathcal{MH} \subseteq \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — однопорожденная p -насыщенная формация, $\mathcal{MH}$ — такая p -насыщенная формация, что $\mathcal{H} \neq \mathcal{MH}$. Тогда формация $\mathcal{M}$ также является p -насыщенной.

3.4.5. Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ — формация. Тогда в том и только в том случае $\mathcal{M}$ является однопорожденной p -насыщенной формацией входящей в $\mathcal{N}_p \mathcal{N}_p$, когда $\mathcal{M}$ является первым сомножителем в некотором произведении вида $\mathcal{MH} = \mathcal{F} = l^p \text{ form } G$, где $\mathcal{H} \neq \mathcal{F}$.

3.5.5. Теорема. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{MH}$ — p -насыщенная формация, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H} \neq \mathcal{F}$ — неединичные формации и $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{N}_p$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $\mathcal{F}$ — однопорожденная p -насыщенная формация;
- 2) $\mathcal{F}$ — ограниченная p -насыщенная формация;
- 3) формации $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ удовлетворяют следующим условиям:
 - a) $\mathcal{M}$ — однопорожденная p -насыщенная формация и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}_p \mathcal{N}_p$.
 - b) $\mathcal{H}$ — абелева однопорожденная формация, причем, если $p \in \pi(\mathcal{M})$ то $p \notin \pi(\mathcal{H})$;
 - c) $\pi(\mathcal{M}) \cap \pi(\mathcal{H}) \subseteq \{p\}$

Личный вклад соискателя. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В опубликованных совместно с научным руководителем работах идеи и методы принадлежат научному руководителю, а доказательства соискателю.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета. Второй международной алгебраической конференции в Украине, посвящённой памяти профессора Л.А.Калужнина (г.Киев, 1999), Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца (г.Гомель, 2000), VIII Белорусской математической конференции (г.Минск, 2000).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в трех статьях [30–32], пяти препринтах [33–37] и в двух тезисах [38, 39]. Общее количество страниц опубликованных материалов — 86.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, шести глав основной части, выводов и списка использованных источников в алфавитном порядке в количестве 69 наименований. Объем диссертации 95 страниц.

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Ниже охарактеризовано содержание диссертации по главам. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения принятые в книгах [15, 19, 21], а также в статье А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [14].

Глава 1 содержит обзор основных результатов диссертации.

В главе 2 собраны некоторые известные результаты, используемые в основном тексте диссертации.

Естественным расширением понятия насыщенной формации является следующее понятие. Формация $\mathfrak{F}$ называется ω -насыщенной (Л.А.Шеметков [20]) ($\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$), если ей принадлежит всякая группа G с $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Omega_\omega(G) \cap \Phi(G)$. Если $\omega = \{p\}$, то ω -насыщенные формации называют p -насыщенными. Важность изучения p -насыщенных формаций обусловлена многими причинами. Отметим здесь часть из них. Во-первых, как это впервые замечено в работе Л.А.Шеметкова [20], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то формация $\mathfrak{H}$ является p -насыщенной для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{M})$ (здесь $\pi(\mathfrak{M})$ — множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{M}$). Таким образом изучение факторизаций насыщенных формаций с неизбежностью приводит к необходимости исследования p -насыщенных формаций для определенных простых p . Во-вторых, как установлено в работе А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [14] изучение любых насыщенных формаций во многих важных случаях сводится к исследованию некоторой системы частично насыщенных формаций. Отметим, наконец, что как показывают исследования [1, 5, 6, 14] p -насыщенные формации полезны и в прикладном аспекте теории формаций. Таким образом, задача изучения и классификации p -насыщенных формаций вполне актуальна и перспективна.

Если $\mathfrak{H}$ — непустая формация и G — группа, то в G имеется наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{H}}$ со свойством $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — это класс $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Нетрудно заметить, что произведение любых двух формаций снова является формацией. Более того, как установил Галлюц, такая операция на множестве формаций ассоциативна.

Хорошо известно (см., например, работу Л.А.Шеметкова [20]), что произведение любых двух насыщенных формаций снова является насыщенной формацией. Обратное утверждение в общем случае неверно. Отметим, что первые примеры насыщенных произведений ненасыщенных формаций были найдены В.А.Ведерниковым [3] и Н.Т.Воробьевым [4]. Новые примеры такого рода можно найти в работе Баллестера-Болинше и Перен-Рамош [24]. В связи с этими результатами интересна следующая теорема А.Н.Скибы. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однорожденная насыщенная формация (т.е. $\mathfrak{F}$ — пересечение

всех насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу $G \in \mathfrak{F}$). Тогда если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация.

Одна из главных целей данной диссертации состоит в доказательстве аналогичного результата для p -насыщенных формаций.

В 1963 году П.Нейман доказал, что если произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных многообразий групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ является кроссовым (т.е. $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — многообразие, порожденное конечной группой), то многообразие $\mathfrak{H}$ абелево. Несколько позднее А.Л.Шмелькин установил в работе [23], что действительности верна следующая теорема: Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ в том и только в том случае является кроссовым многообразием, когда $\mathfrak{M}$ абелево, $\mathfrak{M}$ нильпотентно и экспоненты многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ взаимно просты. Поскольку всякое нильпотентное многообразие неразложимо, а согласно знаменитой теореме Нейманов-Шмелькина всякое представление многообразия в виде произведения неразложимых многообразий единственно, то отмеченная выше теорема П.Неймана и А.Л.Шмелькина дает по существу описание всех возможных факторизаций кроссовых многообразий.

Более общий результат был получен А.Н.Скибой в его работах [12, 29] (см. также гл. 3 книги А.Н.Скибы [15]), где были описаны все несократимые факторизации однопорожденных насыщенных формаций, что, в частности, позволило дать принципиально новое доказательство теоремы П.Неймана и А.Л.Шмелькина. Главной целью данной диссертации является описание всех несократимых факторизаций однопорожденных p -насыщенных формаций.

Как отмечено выше, произведение любых двух насыщенных формаций снова является насыщенной формацией. Обратная ситуация рассматривалась в работе Баллестера-Болинше и Перец-Рамош [24], где были описаны такие формации $\mathfrak{M}$, что для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, а также такие формации $\mathfrak{H}$, что для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация.

В разделе 3.1 аналогичная задача решается для разрешимо насыщенных и p -насыщенных формаций. При этом существенно используются методы главы 3 книги А.Н.Скибы [15].

3.1.2. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является разрешимо насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ — разрешимо насыщенная формация, содержащая класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$.

3.1.3. Теорема. Пусть $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является разрешимо насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ — класс всех групп.

3.1.4. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ — формация. Тогда в том и только в том

случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p -насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ — такая p -насыщенная формация, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$.

3.1.5. Теорема. Пусть $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p -насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.

Рассмотрим теперь некоторые следствия теорем 3.1.2–3.1.5.

3.1.6. Следствие. Пусть $\mathfrak{M}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является ω -насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ — такая ω -насыщенная формация, что $\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{M}$.

3.1.7. Следствие (Баллестер-Болинше и Перец-Рамон [24]). Пусть $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является насыщенной формацией, когда $\mathfrak{M}$ насыщенная формация, содержащая класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$.

3.1.8. Следствие. Пусть $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является ω -насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.

3.1.9. Следствие (Баллестер-Болинше и Перец-Рамон [24]). Пусть $\mathfrak{H}$ — формация. Тогда в том и только в том случае для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является насыщенной формацией, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп.

В разделе 3.2 описаны общие свойства факторизаций однопорожденных и ограниченных τ -замкнутых p -насыщенных формаций.

Пусть G — группа и $\tau^p \text{ form } G$ — пересечение всех тех τ -замкнутых p -насыщенных формаций, которые содержат группу G . Тогда, очевидно, что $\tau^p \text{ form } G$ — τ -замкнутая p -насыщенная формация. Формации такого типа называют однопорожденными τ -замкнутыми p -насыщенными формациями. Если τ -замкнутая p -насыщенная формация $\mathfrak{M}$ такова, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для некоторой однопорожденной τ -замкнутой p -насыщенной формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называют ограниченной τ -замкнутой p -насыщенной формацией. Формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной τ -замкнутой формацией, если $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением всех тех τ -замкнутых формаций, которые содержат некоторую фиксированную группу $G \in \mathfrak{F}$. При этом пишут

$$\mathfrak{F} = \tau \text{ form } G.$$

τ -Замкнутая формация $\mathfrak{M}$ называется ограниченной τ -замкнутой формацией, если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для некоторой однопорожденной τ -замкнутой формации $\mathfrak{F}$.

3.2.5. Теорема. В том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (ограниченная) τ -замкнутая p -насыщенная формация, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний p -локальный спутник, значения которого являются однопорожденными (соответственно ограниченными) τ -замкнутыми формациями.

3.2.6. Теорема. В том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (ограниченная) p -насыщенная формация, когда $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний p -локальный спутник, значения которого являются однопорожденными (соответственно ограниченными) формациями.

Первые примеры насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, представимых в виде произведения $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где обе формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ ненасыщенны, были построены В.А.Ведерниковым [3] и Н.Т.Воробьевым [4]. Отметим также работу [24], где описан общий метод построения примеров такого рода. В книге А.Н.Скибы [15] на с.120 выделен следующий наиболее простой пример в этом направлении: Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \text{ form } Z_q$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_q \text{ form } Z_p$, где Z_q и Z_p — группы простых порядков q и p соответственно. И пусть

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} &= (\mathfrak{N}_p \text{ form } Z_q)(\mathfrak{N}_q \text{ form } Z_p) = \\ &= \mathfrak{N}_p((\text{form } Z_q)\mathfrak{N}_q)(\text{form } Z_p) = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q) \text{ form } Z_p.\end{aligned}$$

Формация $\mathfrak{F}$ насыщена как произведение насыщенной формации $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ на формацию $\text{form } Z_p$, для которой мы имеем

$$\pi(\text{form } Z_p) = \{p\} \subseteq \{p, q\} = \pi(\mathfrak{M}).$$

С другой стороны, очевидно, обе формации $\mathfrak{N}_p \text{ form } Z_q$ и $\mathfrak{N}_q \text{ form } Z_p$ ненасыщенны.

В связи со всеми этими наблюдениями весьма интересен следующий результат А.Н.Скибы: Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная насыщенная формация. Тогда, если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация. В дальнейшем были получены аналоги этого результата для композиционных формаций (А.Н.Скиба [15], Го Вэньбинь [26]) и для однопорожденных p -насыщенных формаций $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ при условии, что $\mathfrak{M}$ нормально наследственная формация (А.Н.Скиба и В.Н.Рыжик [9]). В разделе 3.3 на основе наблюдений раздела 3.2, доказана следующая теорема

3.3.1. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ -замкнутая p -насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая τ -замкнутая p -насыщенная формация, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p -насыщенной.

Отметим следующие частные случаи теоремы 3.3.1.

3.3.13. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная p -насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая p -насыщенная формация, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p -насыщенной.

3.3.14. Следствие. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная τ -замкнутая p -насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p -насыщенной.

3.3.15. Следствие. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная p -насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p -насыщенной.

3.3.16. Следствие. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — однопорожденная (нормально) наследственная p -насыщенная формация, $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — такая (нормально) наследственная формация, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p -насыщенной.

3.3.17. Следствие. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная (нормально) наследственная p -насыщенная формация, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также является p -насыщенной.

Отметим, что следствие 3.3.15 доказано А.Н.Скибой и В.Н.Рыжик в работе [9] при условии, что формация $\mathfrak{M}$ нормально наследственна.

Согласно теореме П. Неймана [27] всякая нильпотентная формация наследственна. В работе [11] А.Н.Скибой было доказано следующее обращение этого результата: если у формации $\mathfrak{F}$ все ее подформации наследственны, то формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна. Кроме того, в работе [11] было доказано, что у насыщенной формации $\mathfrak{F}$ все ее насыщенные подформации наследственны тогда и только тогда, когда формация $\mathfrak{F}$ метанильпотентна. Развивая эти результаты, Джарадин Джехад доказал [5], что у p -насыщенной формации $\mathfrak{F}$ все ее p -насыщенные подформации наследственны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p$, т.е. $\mathfrak{F}$ состоит из групп, являющихся расширением p -групп при помощи нильпотентных p' -групп.

Оказывается, что [12] однопорожденные нильпотентные формации $\mathfrak{M}$ — это в точности формации, встречающиеся в качестве первого сомножителя в однопорожденных произведениях $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \neq (1)$. С другой стороны [12], однопорожденные метанильпотентные насыщенные формации $\mathfrak{M}$ — это в точности формации, встречающиеся в качестве первого сомножителя в произведениях вида $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = l \text{ form } G$ (т.е. в произведениях, являющихся однопорожденными насыщенными формациями, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \neq (1)$). В разделе 3.4 доказано, что такая закономерность сохраняется и в классе p -насыщенных формаций (т.е. однопорожденные p -насыщенные подформации из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p$ — это в точности формации, встречающиеся в качестве первого сомножителя в произведениях вида $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = l^p \text{ form } G$, где $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{H} \neq (1)$).

На основе результатов разделов 3.1–3.4 и разделе 3.5 описаны такие однопорожденные τ -замкнутые p -насыщенные формации $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ для некоторых неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Отметим, что в работах [8

9] такая задача рассматривалась при условии, что формация $\mathfrak{M}$ нормально наследственна.

3.5.1. Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — τ -замкнутая p -насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ — неединичные τ -замкнутые формации и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_p$. Тогда следующие условия равносильны.

- 1) $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ -замкнутая p -насыщенная формация;
- 2) $\mathfrak{F}$ — ограниченная τ -замкнутая p -насыщенная формация;
- 3) формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют следующим условиям:
 - a) $\mathfrak{M}$ — однопорожденная p -насыщенная формация и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$;
 - b) $\mathfrak{H}$ — абелева однопорожденная формация, причем, если $p \notin \pi(\mathfrak{M})$, то $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;
 - c) $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) \subseteq \{p\}$.

3.5.3. Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — τ -замкнутая p -насыщенная формация, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ — неединичные τ -замкнутые формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ -замкнутая p -насыщенная формация, когда обе формации $\mathfrak{H}_\tau(p)$ и $\mathfrak{H}_\tau(p')$ являются однопорожденными τ -замкнутыми формациями и если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p$, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}.$$

Напомним [15], что всякое представление формации $\mathfrak{F}$ в виде произведения

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t, \quad (1)$$

где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ — τ -замкнутые формации и $t \geq 2$ называется τ -факторизацией формации $\mathfrak{F}$. τ -Факторизация (1) называется несократимой [15], если

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \dots \mathfrak{F}_t$$

для всех $i = 1, 2, \dots, t$.

В разделе 3.6, в частности, доказана следующая теорема.

3.6.1. Теорема. В том и только в том случае

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{H} \quad (2)$$

несократимая τ -факторизация однопорожденной τ -замкнутой p -насыщенной формации $\mathfrak{F}$, когда выполняются следующие условия:

- 1) $t \leq 3$.
- 2) $\mathfrak{F}$ — однопорожденная p -насыщенная формация, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{p'}$ и если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$.

3) если $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{N}_p$, то $t = 2$ и $\mathfrak{H}$ — такая однопорожденная абелева формация, что

$$\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{H}) \subseteq \{p\};$$

4) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $t = 3$, то $\mathfrak{H}$ — однопорожденная абелева формация, $(\mathfrak{F}_2)(p)$ — однопорожденная нильпотентная формация и для любых групп $A \in \mathfrak{F}_2$ и $B \in \mathfrak{H}$ имеет место

$$\pi(A/O_p(A)) \cap \pi(B) = \emptyset;$$

5) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ и $t = 2$, то обе формации $\mathfrak{H}_\tau(p)$ и $\mathfrak{H}_\tau(p')$ являются однопорожденными τ -замкнутыми формациями.

Среди следствий теоремы 3.6.1 отметим следующий результат.

3.6.10. Следствие (А.Н.Скиба [15]). Пусть

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_t$$

— несократимая факторизация формации $\mathfrak{F}$. Следующие условия равносильны:

- 1) $\mathfrak{F}$ — является однопорожденной формацией;
- 2) $\mathfrak{F}$ — является ограниченной формацией;
- 3) $t = 2$, $\mathfrak{M}_1$ — однопорожденная нильпотентная формация, $\mathfrak{M}_2$ — однопорожденная абелева формация и $\pi(\mathfrak{M}_1) \cap \pi(\mathfrak{M}_2) = \emptyset$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решены следующие задачи:

- дано описание формаций $\mathfrak{M}$ таких, что для любой неединичной формации $\mathfrak{H}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p -насыщенной формацией;
- дано описание формаций $\mathfrak{H}$ таких, что для любой неединичной формации $\mathfrak{M}$ произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является p -насыщенной формацией;
- дана полная классификация однопорожденных p -насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, представимых в виде произведения $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$;
- дано описание несократимых факторизаций однопорожденных и ограниченных p -насыщенных формаций, что в частности, даёт решение одной задачи А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова

ЛИТЕРАТУРА

1. Аль-Шаро Халед. О пересечении некоторого семейства максимальных подгрупп конечной группы // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та.-1996.- Вып. 9.- С. 144-152.
2. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. – Смоленск: Смоленский госпединститут, 1988. – 122 с.
3. Ведерников В.А. О насыщенных формациях конечных групп // Матем. заметки. – 1989. – Т. 46, N 3. – С. 32-37.
4. Vorob'ev N.T. On the factorization of local and non-local products of non-local formations. Proc. Intern. Math. Conf , Zielona Gura 1990, 9-13.
5. Джарадин Джехад. О формациях с системами наследственных подформаций // Изв. Вузов. Серия "Математика" – 1997.- N 1.- С. 1-5.
6. Жевнова Н.Г. Внешняя характеристика класса конечных p -разложимых групп // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. н – 1997. – N 2.- С. 46-48.
7. Каморников С.Ф., Шеметков Л.А. Разложимые идемпотенты полугруппы формаций конечных групп // ДАН БССР 1991. – Т. 35, № 10. С. 869-871.
8. Рыжик В.Н. Частично насыщенные формации с заданными нормально наследственными подформациями: Дис. к-та физ.-мат. наук: Д 02.12.01. – Гомель, 1997. – 93 с.
9. Рыжик В.Н., Скиба А.Н. О факторизациях однопорожденных p -насыщенных формаций // Вопросы алгебры Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1997.- Вып. 11.-С. 104-116
10. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997. 144 с.
11. Скиба А.Н. Характеризация конечных метанильпотентных групп // Мат. заметки. – 1980. – Т.27. N 3. – С. 345-351.
12. Скиба А.Н. О произведении формаций / Алгебра и логика. – 1983 – Т. 22, N 5. – С. 574-583
13. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. О частично локальных формациях // ДАН Беларуси. – 1995 – Т. 39, N 3.- С.9-11.

14. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω -насыщенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 1 – С. 1–34.
15. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
16. Скиба А.Н. Факторизации композиционных формаций // Мат. заметки. – 1999. – Т.65. N 3. – С. 389–395.
17. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Матем. Сб. – 1974. – Т. 94, N 4. – С. 628–648.
18. Шеметков Л.А. Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук – 1975. – Т. 30, N 2. – С. 179–198.
19. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
20. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. – 1984. – Т.28. N 2. – С. 101–103.
21. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
22. Л.А.Шеметков. Гашюновы произведения классов групп // Докл. НАН РБ. 1998. – Т. 42, № 3. – С. 22–26.
23. Шмелькин А.Л. Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Математика. 1965. – Т. 29. – С. 149–170.
24. A Ballester-Bolinches, M.D.Perez-Ramos. Some questions of the Kurovka Notebook concerning formation products // Comm. Algebra. 1998. – V. 26, № 5. – P. 1581–1587.
25. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. – 1963 – Bd. 80. N 4. – S. 300–305.
26. Guo Wenbin. On one question of the Kurovka notebook // Comm. Algebra. 1000. – V. 28, № 10. P. 4767–4782.
27. Neumann P.M. A note on formations of finite nilpotent groups // Bull. London Math. Soc. – 1970. – V. 2, N 1. – P. 91.
28. Shemetkov L.A. Frattini extension of Finite groups and formations // Communications in Algebra. 1997. – Vol. 25, N 3 – P. 955–964.

- 29 Skiba A.N. On nontrivial factorisations of an one-generated local formation of finite groups // Proc. Int. Conf. Algebra Dedicat. Mem. A.I.Mal'cev, Novosibirsk, Aug. 21–26, 1989. Pt. z. – Providence (R I), 1992, p. 363–374.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- 30 Vishnevskaya T.R. On factorizations of one-generated p -local formations // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Вопросы алгебры. 2000. – №3(16). – С 88–92
31. Skiba A.N, Vishnevskaya T.R. On the Gaschutz product of ω -local formations of finite groups // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Вопросы алгебры. 2000. – №3(16). – С. 201–202.
32. Вишневская Т.Р. p -Локальные произведения формаций конечных групп // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П.М.Машэрава. – 2001. – N1(16). – С. 107–108.
33. Вишневская Т.Р. Общие свойства однопорожденных и ограниченных p -насыщенных формаций // Гомель, 2000 – N 97. – С. 10. – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)
- 34 Вишневская Т.Р., Скиба А.Н. Факторизации p -насыщенных формаций конечных групп // Гомель, 2000. – № 99 С 13 – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)
35. Вишневская Т.Р. Аналог теоремы А.Н.Скибы для p -насыщенных формаций // Гомель, 2000. – № 101. – С 19 – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)
- 36 Вишневская Т.Р. Некоторые приложения теоремы о факторизациях однопорожденных p -насыщенных формаций // Гомель, 2001 – №3(108) – С. 15. – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)
37. Вишневская Т.Р., Скиба А.Н. Описание факторизаций τ -замкнутых p -насыщенных подформаций однопорожденных p -насыщенных формаций // Гомель, 2001. – №4(109). – С. 18. – (Препринт / ГГУ им. Ф.Скорины)
- 38 Vishnevskaya T R. On factorizations of one-generated p -local formations // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем Тезисы докладов Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца, Гомель. 16–17 октября 2000 г., ГГУ им. Ф.Скорины. – Гомель 2000 – С 77

39. Skiba A N . Vishnevskaya T.R. On Gaschütz product of ω -local formations of finite groups // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем. Тезисы докладов Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца, Гомель. 16-21 октября 2000 г / ГГУ им. Ф.Скорины. — Гомель. — 2000. — С. 78.

Р Э З Ю М Э

Вінніеўская Таццяна Раманаўна

Фактарызацыі p -насычаных фармацый

Ключавыя словы фармацыя груп, p -насычаная фармацыя, здабытак фармацый, нескарачальная фактарызацыя, аднапараджальная фармацыя абмежаваная фармацыя

У дысертацыі даследуюцца фактарызацыі p -насычаных фармацый. Апісаны фармацыі $\mathfrak{F}$ такія што для кожнай неадзінкавай фармацыі $\mathfrak{H}$ здабытак $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ з'яўляецца p -насычанай фармацыяй. Даказана, што калі $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ аднапараджальная p -насычаная фармацыя, дзе $\mathfrak{M}$ і $\mathfrak{H}$ неадзінкавыя фармацыі і $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, тады $\mathfrak{M}$ — аднапараджальная p -насычаная фармацыя. Апісаны ўсе нескарачальныя фактарызацыі аднапараджальных і абмежаваных p -насычаных фармацый. што у прыватнасці, дае рашэнне адной задачы А.М.Скібы і Л.А.Шамяткова.

Усе асноўныя вынікі працы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры вывучэнні p -насычаных фармацый канечных груп, а таксама пры выкладанні спецкурсаў у дзяржуніверсітэтах і педінстытутах.

Р Е З Ю М Е

Вишневская Татьяна Романовна

Факторизации p -насыщенных формаций

Ключевые слова формация групп, p -насыщенная формация, произведение формаций, несократимая факторизация, однопорожденная формация, ограниченная формация.

В диссертации исследуются факторизации p -насыщенных формаций. Описаны формации $\mathcal{M}$ такие, что для любой неединичной формации $\mathcal{H}$ произведение $\mathcal{MH}$ является p -насыщенной формацией. Доказано, что если $\mathcal{MH}$ — однопорожденная p -насыщенная формация, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ — неединичные формации и $\mathcal{H} \neq \mathcal{MH}$, то $\mathcal{M}$ — однопорожденная p -насыщенная формация. Описаны все несократимые факторизации однопорожденных и ограниченных p -насыщенных формаций, что, в частности, дает решение одной задачи А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова.

Все полученные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы при изучении p -насыщенных формаций конечных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в госуниверситетах и пединститутах.

Summary

Vishnevskaya Tatyana Romanovna

Factorizations of p -saturated formations

Key words: formation of groups, p -saturated formation, product of formations, non-reducible factorization, one-generated formation, limited formation.

In this thesis p -saturated formations are studied. The formations $\mathfrak{M}$ are described such that for any non-identity formation $\mathfrak{H}$ the product $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is a p -saturated formation. It is proved that if $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ is a one-generated p -saturated formation where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ are non-identity formations and $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ then $\mathfrak{M}$ is a one-generated p -saturated formation. All non-reducible factorizations of one-generated and limited p -saturated formations are described that, in particular, gives a solution of one question of A.N.Skiba and L.A.Shemetkov.

All the main results of this thesis are new. They are of a theoretic character and may be used while studying p -saturated formations of finite groups and while teaching special courses in universities and pedagogical institutes.