БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.955+517.956.4

ВОРОШИЛОВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2006

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор
Килбас Анатолий Александрович,
Белорусский государственный университет,
кафедра теории функций.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Русак Валентин Николаевич,
Белорусский государственный университет, кафедра высшей математики и математической физики;

кандидат физико-математических наук, доцент
Василец Сергей Иванович,
учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка», кафедра математики.

Оппонирующая организация: Государственное научное учреждение
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Защита состоится 22 декабря 2006 г. в 10^{00} часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический факультет), ауд. 407. Телефон ученого секретаря — 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета

Автореферат разослан "17" ноября 2006 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций, доктор
физико-математических наук, профессор Н. В. Лазакович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена исследованию так называемых задач типа Коши и задач Коши для дробных диффузионных уравнений, полученных из классического уравнения теплопроводности заменой частной производной по переменной t на частные производные Римана—Лиувилля или Капуто произвольного положительного порядка. Этой тематикой занимались многие авторы, в том числе К.Б. Олдхам (K.B. Oldham), Дж. Спаниер (J. Spanier), В. Вайс (W. Wyss), В.Р. Шнайдер (W.R. Schneider), Ф. Майнарди (F. Mainardi), А.Н. Кочубей, И. Фуджита (Y. Fujita), Р.Р. Нигматуллин (R.R. Nigmatullin), Р. Горенфло (R. Gorenflo), И. Подлюбный (I. Podlubny), Р. Хилфер (R. Hilfer), А.А. Килбас, Т. Пиерантоззи (T. Pierantozzi), Х. Трухилло (J.J. Trujillo), Л. Васкес (L. Vaz'quez), А.В. Псху и др.

Диссертационная работа выполнена в этом направлении. Она посвящена нахождению в замкнутой форме решений задач Коши и типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений дробного порядка, изучению вопросов единственности этих решений и условий существования классического решения.

Важность изучения дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных и, среди них, дробных диффузионных уравнений, обусловлена их широким применением в теории дробного исчисления, а также в задачах физики, механики, химии, биологии, теории управления и других прикладных наук. В последние годы интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка возрос в связи с тем, что эти уравнения позволяют дать эффективные модели многих аномальных процессов в природе и теории сложных систем. Уравнение теплопроводности дробного порядка оказывается моделью, пригодной в процессах как так называемой субдиффузии, так и супердиффузии.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились на кафедре теории функций Белорусского государственного университета в рамках научно-исследовательских тем "Специальные функции, интегральные преобразования и их применение" (рег. № 20011679), "Дифференциальные уравнения дробного порядка и их приложения" (рег. № 20032171) и "Специальные функции и краевые задачи для уравнений с дробными производными" (рег. № 20051904), входящих соответственно в республиканскую программу "Математические структуры" (2001-2005 гг.) и программы Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (2003-2005 гг., 2005-2007 гг.).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является решение задач Коши и типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений дробного порядка; получение условий единственности решения этих задач; получение условий существования классических решений; иллюстрация полученных решений на трехмерных графиках с использованием системы *Mathematica.*

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

— найти решения в замкнутой форме задач типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Римана – Лиувилля произвольного положительного порядка;

— найти решения в замкнутой форме задач Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Капуто произвольного положительного порядка;

— доказать теоремы существования классических решений задач типа Коши и Коши для однородных дробных диффузионных уравнений с частными производными Римана—Лиувилля и Капуто;

— доказать теоремы единственности решения задач типа Коши и Коши для диффузионных уравнений дробного порядка;

— получить с помощью системы *Mathematica* трехмерные графики найденных решений.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются краевые задачи для однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с частными дробными производными Римана—Лиувилля и Капуто.

Предметом исследования являются явные формулы решений и теоремы существования и единственности решений рассматриваемых задач.

Методология и методы проведенного исследования. При решении поставленных задач используются методы интегральных преобразований Лапласа и Фурье и специальных функций Миттаг-Леффлера, Райта и H-функции.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Научная новизна работы заключается в следующем:

— получены в замкнутой форме решения задач типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Римана—Лиувилля произвольного положительного порядка;

— получены в замкнутой форме решения задач Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Капуто произвольного положительного порядка;

— получены достаточные условия существования классического решения задач типа Коши и Коши для однородных диффузионных уравнений с частными производными Римана–Лиувилля и Капуто;

— доказаны теоремы единственности решения задач типа Коши и Коши для диффузионных уравнений дробного порядка;

Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер и вносит определенный вклад в разработку теории краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных.

Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных и их приложений при решении конкретных задач физики, механики, химии, биологии, теории управления и других прикладных наук.

Результаты могут быть также использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Решения задач типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частными производными Римана–Лиувилля произвольного положительного порядка.

2. Решения задач Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частными производными Капуто произвольного положительного порядка.

3. Теоремы существования классических решений задач типа Коши и Коши для однородных диффузионных уравнений с частными производными Римана–Лиувилля и Капуто.

4. Теоремы единственности решений задач типа Коши и Коши для диффузионных уравнений дробного порядка с частными производными Римана–Лиувилля и Капуто.

Личный вклад соискателя. Все изложенные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем д. ф.-м. н., профессором А.А. Килбасом. Часть результатов опубликована в соавторстве с научным руководителем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на:

— Конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 18 — 21 мая 2004 г.).

— IX Белорусской международной математической конференции (Гродно, 3 — 6 ноября 2004 г.).

— Семинаре отдела теории функций Математического института имени В.А. Стеклова РАН (руководители — академик С.М. Никольский и член-корр. О.В. Бесов, Л.Д. Кудрявцев; Москва, 16 марта 2005 г.).

— Конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 17 — 20 мая 2005 г.).

— Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной столетию С.М. Никольского (Москва, 23 — 29 мая 2005 г.).

— X Республиканской научной конференции студентов и аспирантов Беларуси "НИРС-2005" (Минск, 14 — 16 февраля 2006 г.).

— Международной математической конференции "Еругинские чтения — XI" (Гомель, 24 — 26 мая 2006 г.).

— Минском городском семинаре по краевым задачам имени академика Ф.Д. Гахова (руководители — профессор Э.И. Зверович, профессор А.А. Килбас и доцент С.В. Рогозин; Минск, 2003 — 2006 гг.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах. Среди них 5 статей в научных журналах и 5 тезисов докладов на международных конференциях. Общий объем опубликованных материалов составляет 36 страниц. 5 работ опубликованы без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, списка использованных источников, насчитывающего 76 наименований, и приложения. Общий объем диссертации — 113 страниц, из которых 7 страниц занимает список использованных источников и 6 страниц – приложение.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** дается краткая характеристика работы, ее цели и задачи, описываются основные направления исследования и характеризуются результаты, полученные в диссертационной работе.

В **первой главе** приводится краткий обзор исторических сведений по вопросам, связанным с тематикой диссертации – теорией дифференциальных уравнений с частными дробными производными, описываются основные направления и методы исследования, а также дается краткое содержание работы.

Вторая глава посвящена исследованию задач типа Коши для однородных и неоднородных дробных диффузионных уравнений с частной производной Римана–Лиувилля в одномерном и многомерном случаях.

В разделе 2.1 даются вспомогательные сведения, содержащие элементы теории специальных функций, дробных интегралов и производных, интегральных преобразований.

В подразделе 2.1.1 приводятся определения функций Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in \mathbb{C}, \alpha > 0, \beta > 0) \tag{1}$$

и Райта

$$\varphi(\alpha, \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \tag{2}$$

а также их свойства[1].

В подразделе 2.1.2 дается определение и приводятся некоторые свойства H-функции, которая для целых неотрицательных m, n, p, q $(0 \le m \le q$, $0 \le n \le p)$, комплексных a_i, b_j и положительных α_i, β_j $(1 \le i \le p$, $1 \le j \le q)$ определяется контурным интегралом Меллина–Барнса

$$H_{p,q}^{m,n}(z) \equiv H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), \ldots, (b_q, \beta_q) \end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}, \tag{4}$$

контур L специально выбран, и пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице[2]. Показано, что функции Миттаг-Леффлера и Райта являются частными случаями H-функции, и приведены соответствующие формулы.

Подраздел 2.1.3 содержит определения дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}}, \tag{5}$$

и дробной производной Капуто

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right]\right)(x), \tag{6}$$

где $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$.

В подразделе 2.1.4 приводятся определения частной дробной производ-

---

[1] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.3. Эллиптические и автоморфные функции. М.: Наука, 1967. — 299 с.

[2] *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. — c.

фузионных уравнений с частной производной Римана—Лиувилля в терминах функции Миттаг-Леффлера для произвольного $\alpha > 0$ и в терминах функции Райта и H-функции при $0 < \alpha < 2$ [1], [2], [5]–[8].

2. С помощью метода интегральных преобразований Фурье и Лапласа получены решения задач Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Капуто в терминах функции Миттаг-Леффлера для произвольного $\alpha > 0$ и в терминах функции Райта и H-функции при $0 < \alpha < 2$ [3], [4].

3. Исследована асимптотика полученных решений на бесконечности, и найдены условия, при которых решения стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ [3].

4. Доказаны теоремы существования классического решения задач Коши и типа Коши для однородных диффузионных уравнений с частными производными Римана—Лиувилля и Капуто [10].

5. Доказаны теоремы единственности решения задач Коши и типа Коши для диффузионных уравнений дробного порядка с частными производными Римана—Лиувилля и Капуто [9].

6. Приведены примеры решения рассматриваемых задач для конкретных значений α и полученные решения проиллюстрированы на графиках поверхностей с использованием системы *Mathematica* [3].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах:

1. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача типа Коши для уравнения диффузии дробного порядка // Доклады НАН Беларуси. — 2005. — Т. 49., № 3. — С. 14-18.

2. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана—Лиувилля // Доклады академии наук. — 2006. — Т. 406, № 1. — С. 12-16.

3. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференц. уравнения — 2006. — Т. 42, № 5. — С. 599-609.

4. Ворошилов А.А. Задача Коши для неоднородного диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2006. — № 2. — С. 27-31.

5. Ворошилов А.А. Задача типа Коши для неоднородного диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. — 2006. — №2. — С. 60-64.

Тезисы докладов на конференции:

6. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача типа Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения / Тезисы докладов IX Белорусской математической конференции. Вещественный и комплексный анализ. — Гродно. 2004. — С. 15-16.

7. Ворошилов А.А. Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка / Тезисы докладов Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". — Москва. 2005. — С. 76.

8. Ворошилов А.А. Решение краевых задач для дробного диффузионного уравнения методом интегральных преобразований / Тезисы докладов X Республиканской научной конференции студентов и аспирантов высших учебных заведений Республики Беларусь. Часть 2. — Минск. 2005. — С. 168.

9. Ворошилов А.А. Единственность решения задач Коши и типа Коши для уравнения диффузии дробного порядка / Еругинские чтения – XI. Тезисы докладов Международной математической конференции. — Гомель. 2006. — С. 4.

10. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Условия существования классического решения задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка / Еругинские чтения – XI. Тезисы докладов Международной математической конференции. — Гомель. 2006. — С. 4-5.

РЕЗЮМЕ

Ворошилов Александр Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ключевые слова: частная дробная производная Римана—Лиувилля, частная дробная производная Капуто, уравнения диффузии дробного порядка, задача Коши, задача типа Коши.

Объектом исследования являются краевые задачи для однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с частными дробными производными Римана—Лиувилля и Капуто. Предметом исследования являются явные формулы решений, теоремы существования и единственности решений рассматриваемых задач.

Целью диссертационной работы является решение задач Коши и типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений дробного порядка; получение условий единственности решения этих задач; получение условий существования классических решений; иллюстрация полученных решений на трехмерных графиках с использованием системы *Mathematica*.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты.

1. Получены в замкнутой форме решения задач типа Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Римана—Лиувилля произвольного положительного порядка.

2. Найдены в замкнутой форме решения задач Коши для однородных и неоднородных диффузионных уравнений с частной производной Капуто произвольного положительного порядка.

3. Получены достаточные условия существования классических решений задач типа Коши и Коши для однородных диффузионных уравнений с частными производными Римана—Лиувилля и Капуто.

4. Доказаны теоремы единственности решения задач типа Коши и Коши для диффузионных уравнений дробного порядка.

Работа носит теоретический характер и вносит определенный вклад в разработку теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных дробных производных. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений в частных производных и их приложений при решении конкретных задач физики, механики, химии, биологии, теории управления и других прикладных наук. Результаты могут быть также использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов.

РЭЗЮМЭ

Варашылаў Аляксандр Аляксандравіч

ДАСЛЕДАВАННЕ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ ДРОБАВАГА ПАРАДКУ МЕТАДАМ ІНТЭГРАЛЬНЫХ ПЕРАЎТВАРЭННЯЎ

Ключавыя словы: частковая дробавая вытворная Рымана—Ліўвілля, частковая дробавая вытворная Капута, раўнанні дыфузіі дробавага парадку, задача Кашы, задача тыпу Кашы.

Аб'ектам даследавання з'яўляюцца краявыя задачы для аднародных і неаднародных дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі дробавымі вытворнымі Рымана—Ліўвілля і Капута. Прадметам даследавання з'яўляюцца яўныя формулы рашэнняў, тэарэмы існавання і адзінасці рашэнняў разглядаемых задач.

Мэтай дысертацыйнай работы з'яўляецца рашэнне задач Кашы і тыпу Кашы для аднародных і неаднародных дыфузійных раўнанняў дробавага парадку; атрыманне ўмоў існавання класічных рашэнняў; ілюстраванне атрыманых рашэнняў на трохвымерных графіках з выкарыстаннем сістэмы *Mathematica*.

У дысертацыі атрыманыя наступныя новыя вынікі.

1. Атрыманыя ў замкнутай форме рашэнні задач тыпу Кашы для аднародных і неаднародных дыфузійных раўнанняў з частковымі вытворнымі Рымана—Ліўвілля адвольнага дадатнага парадку.

2. Знойдзеныя ў замкнутай форме рашэнні задач Кашы для аднародных і неаднародных дыфузійных раўнанняў з частковымі вытворнымі Капута адвольнага дадатнага парадку.

3. Атрыманыя дастатковыя ўмовы існавання класічных рашэнняў задач Кашы і тыпу Кашы для аднароных дыфузійных раўнанняў з частковымі вытворнымі Рымана—Ліувілля і Капута.

4. Даказаныя тэарэмы адзінасці рашэння задач Кашы і тыпу Кашы для дыфузійных раўнанняў дробавага парадку.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар і ўносіць пэўны ўклад у распрацоўку тэорыі краявых задач для дыферэнцыяльных раўнанняў ў частковых дробавых вытворных. Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаныя ў тэарэтычных даследаваннях дыферэнцыйных раўнанняў у частковых вытворных і іх прымянення пры вырашэнні канкрэтных задач фізікі, механікі, хіміі, біялогіі, тэорыі кіравання і іншых прыкладных навук. Вынікі могуць быць таксама выкарыстаныя ў навучальным працэсе пры выкладанні спецыяльных курсаў.

SUMMARY

Alexander A. Voroshilov

INVESTIGATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER BY USING INTEGRAL TRANSFORMS METHOD

Keywords: Riemann—Liouville partial fractional derivative, Caputo partial fractional derivative, fractional diffusion equations, Cauchy problem, Cauchy-type problem.

The objects of the research in this thesis are boundary value problems for the homogeneous and non-homogeneous differential equations with the Riemann—Liouville and Caputo fractional derivatives. The subjects of the research are explicit solutions, existence and uniqueness theorems for solutions of considered problems.

The purpose of this work is solutions of Cauchy and Cauchy-type problems for the homogeneous and non-homogeneous diffusion equations of fractional order; obtaining conditions for the uniqueness of solutions and conditions for the existence of classical solutions of these problems; illustration of solutions in three dimensional surface graphs by using *Mathematica* system.

The following new results have been obtained in the thesis.

1. Solutions in closed form of the Cauchy-type problems for the homogeneous and non-homogeneous fractional diffusion equations with the Riemann—Liouville partial derivatives of arbitrary positive order are established.

2. Solutions in closed form of the Cauchy problems for the homogeneous and non-homogeneous fractional diffusion equations with the Caputo partial derivatives of arbitrary positive order are found.

3. The existence theorems for the classical solutions of Cauchy and Cauchy-type problems for the homogeneous fractional diffusion equations with the Riemann—Liouville and Caputo partial derivatives are established.

4. The uniqueness theorems for solutions of Cauchy and Cauchy-type problems for the fractional diffusion equations with the Riemann—Liouville and Caputo partial derivatives are proved.

The work has a theoretical character and gives a certain contribution in the development of the theory of boundary value problems for partial differential equations of fractional order. The obtained results can be used in theoretical investigations in solving partial differential equations of fractional order, and their application to solving the concrete problems in physics, mechanics, chemistry, biology, control theory and other applied sciences which can be reduced to such equations. The results can be also used in teaching the special courses.