(ознакомительный фрагмент)

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ЛЕНИНА

На правах рукописи

БУДЬКО Татьяна Степановна

УДК 517.925.7

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и
математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 1987

Работа выполнена в Минском государственном педагогическом институте им. А.М.Горького.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.И.ЯБЛОНСКИЙ (Белорусский государственный институт народного хозяйства им. В.В.Куйбышева).

Официальные оппоненты – доктор физико-математических наук, профессор Н.В.АЗБЕЛЕВ (Пермский политехнический институт),
доктор физико-математических наук, профессор Н.А.ЛУКАШЕВИЧ (Белорусский государственный университет им. В.И.Ленина).

Ведущая организация – Тбилисский государственный университет.

Защита диссертации состоится "17" июня 1988 года в 10 часов на заседании специализированного Совета К 056.03.10 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И.Ленина ([illegible]), г.Минск-80, Ленинский пр., 4, гл. корпус, комната [illegible]

С диссертацией можно ознакомиться [illegible]теке Белорусского государственного университета им[illegible]нина.

Автореферат разослан "___" ________ 1988 года

Ученый секретарь
специализированного Совета
доцент В.И.Корзюк

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из основных задач аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений является задача нахождения условий существования решений с бесконечными предельными значениями компонент. Решение этой задачи было начато еще О.Коши и продолжено в работах многих отечественных и зарубежных математиков (Н.П.Еругин, Т.Кимура, Р.Смит, А.И.Яблонский, С.Г.Кондратеня, Б.П.Богословский, Ю.И.Дежурко и другие).

Однако задача о построении решений дифференциальных систем с бесконечными предельными значениями компонент в общем случае далека еще до полного решения. В частности, не разработаны эффективные приемы построения решений, у которых не менее двух компонент стремится к бесконечности при приближении к особой точке.

В связи с важностью этой задачи для теоретических и прикладных исследований, решение ее для систем двух и трех дифференциальных уравнений с произвольными рациональными правыми частями предусмотрено разделом "Дифференциал 3.I4" Пятилетнего плана важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Белорусской ССР на I986-I990 годы, утвержденного постановлением Президиума АН БССР от 3 апреля I986 года. Решению этой задачи и посвящена наша диссертационная работа.

Цель работы: найти новые условия существования и структуру решений нелинейных систем двух и трех дифференциальных уравнений с бесконечными предельными значениями компонент.

Научная новизна. Получены новые условия существования решений автономных систем двух и трех дифференциальных уравнений первого порядка с бесконечными предельными значениями компонент. Впервые в общем случае найдены решения с неалгебраическими главными членами разложений.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего развития аналитической и качественной теорий дифференциальных уравнений, в теоретической и небесной механике, математической и теоретической физике и других науках, где применяются сведения о решениях дифференциальных систем второго и третьего порядка.

На защиту выносятся следующие результаты:

I. Метод построения решений автономных дифференциальных систем, хотя бы одна компонента которых имеет бесконечное предельное значение.

2. Полученные с помощью этого метода новые достаточные условия существования и представление решений автономных систем двух и трех дифференциальных уравнений первого порядка с бесконечными предельными значениями компонент.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на Куйбышевском областном межвузовском совещании-семинаре в 1984 году, на IУ внутривузовской научно-практической конференции молодых ученых Минского государственного педагогического института им. А.М.Горького в 1987 году, а также на научно-исследовательских семинарах по обыкновенным дифференциальным уравнениям у профессора Лукашевича Н.А. (при Белорусском государственном университете им. В.И.Ленина), у профессора Яблонского А.И. (при Белорусском государственном институте народного хозяйства им. В.В.Куйбышева) и у профессора Кондратепи С.Г. (при Брестском государственном педагогическом институте им. А.С.Пушкина).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка используемой литературы и выполнена на 90 страницах машинописного текста. Библиография содержит 51 наименование.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий обзор литературы по исследуемой проблеме и изложены основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе рассматривается система двух дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями вида

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \tag{I}$$

где x, y и t – комплекснозначные переменные.

Очевидно, что полиномы P и Q всегда можно представить в виде

$$P(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu(x,y),\quad Q(x,y)=\sum_{\nu=0}^{m}q_\nu(x,y),$$

где p_ν и q_ν – однородные полиномы по x, y степени ν, а n и m – целые неотрицательные числа.

Применяемый нами метод нахождения решений

$$x=x(t),\quad y=y(t) \tag{2}$$

системы (I) со свойствами

$$x(t)\to\infty,\ y(t)\to\infty \text{ при } t\to t_0, \tag{3}$$

$$x(t)\to\infty,\ y(t)\to y_0 \text{ при } t\to t_0, \tag{4}$$

$$x(t)\to x_0,\ y(t)\to\infty \text{ при } t\to t_0, \tag{5}$$

где x_0, y_0, t_0 - произвольные конечные числа, заключается в следующем.

При помощи замены

$$x=\frac{1}{u},\quad y=\frac{v+\beta}{u} \tag{6}$$

или

$$y=\frac{1}{u},\quad x=\frac{v+\alpha}{u} \tag{7}$$

система (I) сводится к системе

$$\begin{gathered}\frac{dt}{du}=-\frac{u^{n-2}}{\sum\limits_{i=0}^{n}P_i(1,v)u^{n-i}}\\ u\frac{dv}{du}=v-\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}Q_i(1,v)u^{m-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n}P_i(1,v)u^{n-i}}u^{n-m}.\end{gathered} \tag{8}$$

Учитывая условия, при которых второе уравнение системы (8) является уравнением Брио и Буке, применяем к нему известные результаты о существовании и структуре решений $v=v(u)$ этого уравнения со свойством $v(u)\to\beta$ при $u\to 0$. Используя представления этих решений в виде сходящихся рядов в окрестности точки $u=0$, подставляем их в первое уравнение системы (8). В результате получаем выражения $\frac{dt}{du}$ в виде некоторого сходящегося ряда, откуда почленным интегрированием находим представление $t=t(u)$ в окрестности точки $u=0$. Обращая полученный ряд и возвращаясь с помощью замены (6) или (7) к переменным x и y, получаем решения (2) системы (I) со свойствами (3), (4), (5).

Заметим, что нам пришлось интегрировать, обращать, подставлять ряд в ряд не только степенные ряды, но и ряды вида

$A\{u, u^{\lambda}[c+h\ln u]\}$, где A – двойной степенной ряд по переменным u и $U = u^{\lambda}[c+h\ln u]$.

Основные результаты первой главы описывают следующие теоремы.

Теорема I. Пусть $n=m>1$ и полином

$$\Pi(v) = v p_n(1,v) - q_n(1,v)$$

имеет ненулевой корень $v=\beta$, причем $p_n(1,\beta)\neq 0$. Пусть

$$\lambda = \frac{\Pi'(\beta)}{p_n(1,\beta)}, \quad \tau = [-(n-1)p_n(1,\beta)(t-t_0)]^{1/n-1}.$$

Если λ не является целым положительным числом, то система (I) имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \tau^{-1}\Big\{1+\sum_{\sigma=1}^{\infty} a_{\sigma}\tau^{\sigma}\Big\}, \quad y = \tau^{-1}\Big\{\beta+\sum_{\sigma=1}^{\infty} b_{\sigma}\tau^{\sigma}\Big\}. \tag{9}$$

Если при этом $\operatorname{Re}\lambda>0$, то наряду с решением вида (9) система (I) имеет однопараметрическое семейство решений вида

$$\begin{aligned} x &= \tau^{-1}\Big\{1+\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty} a_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda})^{\sigma_1}\Big\}, \\ y &= \tau^{-1}\Big\{\beta+\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty} b_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda})^{\sigma_1}\Big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Параметром семейства (10) будет коэффициент $b_{0,1}$.

Если же $\operatorname{Re}\lambda<0$, то кроме решения вида (9) система (I) не имеет никаких других решений, обладающих свойством (3) при $t\to t_0$ по крайней мере по путям, расположенным в секторе конечного раствора с вершиной в точке $t=t_0$.

Если λ – целое положительное число, то система (I) при выполнении некоторого условия (A_{λ}), наложенного на коэффициенты полиномов P и Q, имеет однопараметрическое семейство решений со свойством (3) вида (9), а при нарушении этого условия - однопараметрическое семейство решений со свойством (3) вида

$$x=\tau^{-1}\Big\{1+\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty}a_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda}\ln\tau)^{\sigma_1}\Big\},$$
$$y=\tau^{-1}\Big\{\beta+\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty}b_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda}\ln\tau)^{\sigma_1}\Big\}. \qquad (11)$$

Параметром семейства (9) является коэффициент b_λ, а семейства (11) - коэффициент $b_{\lambda,0}$.

Т е о р е м а 2 . Пусть $n=m>1$ и $v=\beta$ - нулевой корень полинома $\Pi(v)$, причем $q_n'(1,0)p_n(1,0)\neq 0$, а $q_n(1,0)=0$. Пусть
$$\tau=[-(n-1)p_n(1,0)(t-t_0)]^{1/n-1},\quad \lambda=1-\frac{q_n'(1,0)}{p_n(1,0)}.$$

Если λ не является целым положительным числом, то система (1) имеет единственное решение (2) со свойством (4) вида

$$x=\tau^{-1}\Big\{1+\sum_{\sigma=1}^{\infty}a_{\sigma}\tau^{\sigma}\Big\},\quad y=y_0+\sum_{\sigma=1}^{\infty}b_{\sigma}\tau^{\sigma}. \qquad (12)$$

Если к тому же $Re\,\lambda>0$, то система (1), наряду с решением вида (12), будет иметь однопараметрическое семейство решений вида

$$x=\tau^{-1}\Big\{1+\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty}a_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda})^{\sigma_1}\Big\},$$
$$y=b_{1,0}+b_{0,1}\tau^{\lambda-1}+\tau^{-1}\sum_{\sigma+\sigma_1=2}^{\infty}b_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda})^{\sigma_1}. \qquad (13)$$

Параметром семейства (13) является коэффициент $b_{0,1}$. Это семейство обладает свойством (3), если $0<Re\,\lambda<1$, и свойством (4), если $Re\,\lambda>1$.

Если $Re\,\lambda<0$, то кроме решений вида (12) система не имеет никаких других решений, обладающих свойством (4) при $t \to t_0$ по путям, расположенным в секторе конечного раствора с вершиной в точке $t = t_0$.

Если $\lambda > 1$ - целое положительное число, то система (I) при выполнении условия $(\mathcal{A}_\lambda)$, наложенного на коэффициенты полиномов P и Q, имеет однопараметрическое семейство решений со свойством (4) вида (I2), а при нарушении этого условия - однопараметрическое семейство решений со свойством (4) вида

$$x = \tau^{-1}\Big\{1 + \sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty} a_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda}\ln\tau)^{\sigma_1}\Big\},$$

$$y = b_{1,0} + b_{0,1}\tau^{\lambda-1}\ln\tau + \tau^{-1}\sum_{\sigma+\sigma_1=2}^{\infty} b_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau^{\lambda}\ln\tau)^{\sigma_1}. \qquad (I4)$$

Параметром семейства (I2) является коэффициент b_λ, а семейства (I4) - коэффициент $b_{\lambda,0}$.

Т е о р е м а 3 . Пусть $v = \beta$ - нулевой корень полинома $\Pi(v)$ и $\tau = [-(n-1)P_n(1,0)(t-t_0)]^{1/n-1}$.

Если выполнено одно из условий:

а) $n \geq m+2$, $P_n(1,0) \neq 0$,

б) $n = m+1$, $P_n(1,0) \neq 0$, $q_m(1,0) = 0$,

в) $n = m > 1$, $P_n(1,0) \neq 0$, $q_m(1,0) = q_m'(1,0) = q_{m-1}(1,0) = 0$,

то система (I) имеет однопараметрическое семейство решений (2) со свойством (4). Эти решения имеют вид

$$x = \tau^{-1}\Big\{1 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} a_\sigma\tau^{\sigma}\Big\}, \quad y = y_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} b_\sigma\tau^{\sigma}.$$

Параметром семейства является коэффициент y_0.

Если же выполнено одно из условий

г) $n = m+1$, $P_n(1,0)q_m(1,0) \neq 0$, или

д) $n=m>1,\ q_m(1,0)=q'_m(1,0)=0,\ p_n(1,0)q_{m-1}(1,0)\neq 0,$

то система (I) будет иметь однопараметрическое семейство решений со свойством (3) вида

$$x=\tau^{-1}\{1+\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty} a_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau\ln\tau)^{\sigma_1}\},$$

$$y=\tau^{-1}\sum_{\sigma+\sigma_1=1}^{\infty} b_{\sigma,\sigma_1}\tau^{\sigma}(\tau\ln\tau)^{\sigma_1}.$$

Параметром семейства является коэффициент $b_{1,0}$.

Во второй главе результаты первой главы обобщаются на системы двух дифференциальных уравнений с рациональными правыми частями, т.е. на системы вида

$$\frac{dx}{dt}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{R(x,y)}{S(x,y)},\tag{15}$$

где P, Q, R и S - произвольные полиномы от x и y. Здесь в общем случае найдены решения системы (15) со свойствами (3), (4), (5).

Третья глава посвящена нахождению условий существования и построению решений

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\tag{16}$$

обладающих свойствами

$$x(t)\to\infty,\ y(t)\to\infty,\ z(t)\to\infty \text{ при } t\to t_0,\tag{17}$$

$$x(t)\to\infty,\ y(t)\to\infty,\ z(t)\to z_0 \text{ при } t\to t_0,\tag{18}$$

$$x(t)\to\infty,\ y(t)\to y_0,\ z(t)\to\infty \text{ при } t\to t_0,\tag{19}$$

$$x(t)\to\infty,\ y(t)\to y_0,\ z(t)\to z_0 \text{ при } t\to t_0\tag{20}$$

у автономной системы трех дифференциальных уравнений с произвольными рациональными правыми частями вида

$$\frac{dx}{dt}=\frac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{R(x,y,z)}{S(x,y,z)},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{M(x,y,z)}{N(x,y,z)}. \tag{21}$$

При помощи замены

$$x=\frac{1}{u},\quad y=\frac{v+\beta}{u},\quad z=\frac{w+\gamma}{u}$$

система (2I) при довольно общих условиях сводится к системе

$$\frac{dt}{du}=F_1(u,v,w),$$

$$u\frac{dv}{du}=av+bw+F_2(u,v,w),$$

$$u\frac{dw}{du}=cv+dw+F_3(u,v,w),$$

у которой второе и третье уравнения зависят только от переменных u, v, w и вместе образуют систему двух уравнений Брио и Буке, где a, b, c, d - легко определяемые константы, а F_i - голоморфные функции от u, v и w в окрестности точки $(0,0,0)$, причем F_2 и F_3 исчезают в этой точке вместе со своими частными производными по v и w.

Используя далее известные результаты о структуре решений $(v=v(u),\ w=w(u))$ системы двух уравнений Брио и Буке со свойством $v(u)\to\beta$, $w(u)\to\gamma$ при $u\to 0$, нам в общем случае удается найти решения (I6) системы (2I) со свойствами (I7)-(20).

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Будько Т.С. Подвижные особенности решений автономных систем двух дифференциальных уравнений. - Дифференц. уравнения, 1985, т.2I, №2, с.318-32I.

II. Будько Т.С., Яблонский А.И. Существование полярных и псевдополярных решений автономных систем трех дифференциальных уравнений. I. - Дифференц. уравнения, 1985, т.21, №11, с. 1849-1857.

III. Будько Т.С. К вопросу существования решений автономных систем двух дифференциальных уравнений с особыми начальными условиями. - Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №5, с. 886-888.

IV. Будько Т.С., Яблонский А.И. Существование полярных и псевдополярных решений автономных систем трех дифференциальных уравнений. II. - Дифференц. уравнения, 1987, т.23, №5, с. 754-760.

Будь

АЕ 22024. Подписано в печать 8.02.88, ф. 60 х 84/16, офсетная печать, 0,4 уч.--изд.л., тираж 120 экз., заказ № 26. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте Брестского государственного педагогического института им. А.С.Пушкина, 224665, Брест, Советская, 8.