САМОПОДОБНОЕ ОДНОРОДНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ ЛИ $SE(2)\times R^+$

Шпакова Ю.А.,
студентка 2 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

В данной работе мы рассмотрим четырехмерную группу Ли $G_4 = SE(2)\times\boldsymbol{R}$, где $SE(2)$ – группа движений евклидовой плоскости, сохраняющих ориентацию плоскости. Цель данной работы: исследовать структуру соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{E}(2)\oplus\mathcal{R}$, ввести на ней координаты, определять координаты в группе Ли $G_4 = SE(2)\times\boldsymbol{R}^+$, найти формулы по которым действуют экспоненциальное отображение и обратное к нему отображение. Это позволит в дальнейшем построить левоинвариантную лоренцеву метрику на группе Ли G_4, при которой она становится самоподобным многообразием.

Материал и методы. Объектом исследования являются четырёхмерные группа Ли $SE(2)\times R^+$ и ее алгебра Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{E}(2)\oplus\mathcal{R}$. Используются методы дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли.

Результаты и их обсуждение. Группа Ли G_4 и алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ могут быть представлены, как состоящие соответственно из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} \cos x^1 & -\sin x^1 & x^2 & 0 \\ \sin x^1 & \cos x^1 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & -u^1 & u^2 & 0 \\ u^1 & 0 & u^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^4 \end{pmatrix}.$$

с обычными операциями умножения матриц и коммутатора матриц ($u^i \in \boldsymbol{R}, i = 1,\ldots,4$; $x^j \in \boldsymbol{R}$, $j = 1,2,3$; $x^4 > 0$). В алгебре Ли G_4 можно выбрать базис (E_1, E_2, E_3, E_4), состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда операция скобки будет задаваться равенствами $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_1, E_3] = -E_2$, а остальные скобки Ли равны нулевому вектору.

Алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ содержит трёхмерный коммутативный идеал $\mathcal{H} = \langle E_2, E_3, E_4\rangle$, одномерный центр $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}E_4$, а производная алгебра Ли двумерна: $\mathcal{G}_4^{(2)} = \mathcal{L} = \langle E_2, E_3\rangle$. Вектор E_1 действует на $\mathcal{H}$ с помощью преобразования $\mathrm{ad}(E_1)$; ядро этого преобразования есть $\mathcal{Z}$. Произвольный базис (V_1, V_2, V_3, V_4) в $\mathcal{G}_4$, относительно которого операция скобки задаётся равенствами $[V_1, V_2] = V_3$, $[V_1, V_3] = -V_2$, будем называть каноническим. В любом каноническом базисе верно, что $\mathcal{H} = \langle V_2, V_3, V_4\rangle$, $\mathcal{L} = \langle V_2, V_3\rangle$ и $\mathcal{Z} = \boldsymbol{R}V_4$.

Группа Ли $SE(2)$ не является односвязным многообразием, и поэтому мы не можем определить на ней одну глобальную карту. Тем не менее, мы припишем матрице X координаты (x^1, x^2, x^3, x^4), $x^1 \in (-\pi, \pi]$. На алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ зададим карту $\psi : \mathcal{G}_4 \to \boldsymbol{R}^4$, приписывающую матрице U координаты (u^1, u^2, u^3, u^4).

Имеем формулу для нахождения матричной экспоненты:

$$\exp U = E + U + \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{6}U^3 + \ldots + \frac{1}{n!}U^n + \ldots,$$

Находим

$$U^2=\begin{pmatrix}-(u^1)^2 & 0 & -u^1u^3 & 0\\ 0 & -(u^1)^2 & u^1u^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (u^4)^2\end{pmatrix},\ U^3=\begin{pmatrix}0 & (u^1)^3 & -u^2(u^1)^2 & 0\\ -(u^1)^3 & 0 & -u^3(u^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (u^4)^3\end{pmatrix},$$

$$U^4=\begin{pmatrix}(u^1)^4 & 0 & u^3(u^1)^3 & 0\\ 0 & (u^1)^4 & -u^2(u^1)^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (u^4)^4\end{pmatrix},$$

$$U^5=\begin{pmatrix}0 & -(u^1)^5 & u^2(u^1)^4 & 0\\ (u^1)^5 & 0 & u^3(u^1)^4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (u^4)^5\end{pmatrix},\ U^6=\begin{pmatrix}-(u^1)^6 & 0 & -u^3(u^1)^5 & 0\\ 0 & -(u^1)^6 & u^2(u^1)^5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (u^4)^6\end{pmatrix},\ldots$$

В матрице $\exp U$ находим отдельно элементы:

$$a_{11}=a_{22}=1-\frac{1}{2!}(u^1)^2+\frac{1}{4!}(u^1)^4-\frac{1}{6!}(u^1)^6+\ldots=\cos u^1,$$

$$a_{21}=-a_{12}=u^1-\frac{1}{3!}(u^1)^3+\frac{1}{5!}(u^1)^5-\ldots=\sin u^1,$$

$$a_{13}=u^2\Big(1-\frac{1}{3!}(u^1)^2+\frac{1}{5!}(u^1)^4-\ldots\Big)+u^3\Big(-\frac{1}{2!}u^1+\frac{1}{4!}(u^1)^3-\frac{1}{6!}(u^1)^5+\ldots\Big)=\frac{1}{u^1}(u^2\sin u^1+u^3(\cos u^1-1)),$$

$$a_{23}=u^2\Big(\frac{1}{2!}u^1-\frac{1}{4!}(u^1)^3+\frac{1}{6!}(u^1)^5+\ldots\Big)-u^3\Big(1-\frac{1}{3!}(u^1)^2+\frac{1}{5!}(u^1)^4-\ldots\Big)=\frac{1}{u^1}(-u^2(\cos u^1-1)+u^3\sin u^1),$$

$$a_{44}=1+\frac{1}{1!}u^4+\frac{1}{2!}(u^4)^2+\frac{1}{3!}(u^4)^3+\frac{1}{4!}(u^4)^4+\frac{1}{5!}(u^4)^5+\frac{1}{6!}(u^4)^6+\ldots=e^{u^4}$$

Тем самым запись отображения $\exp\colon \mathcal{G}_4\to G_4$ в выбранных координатах выглядит так:

$$\exp(u^1,u^2,u^3,u^4)=\Big(u^1,\frac{1}{u^1}(u^2\sin u^1+u^3(\cos u^1-1)),\frac{1}{u^1}(-u^2(\cos u^1-1)+u^3\sin u^1),e^{u^4}\Big)\qquad(1)$$

В этих формулах имеются неопределённости при $u^1=0$. Легко убедиться, что они устранимые. Поэтому необходимо определить $\exp(0,u^2,u^3,u^4)=(0,u^2,u^3,e^{u^4})$.Тогда формулы (1) показывают, что группа Ли G_4 является экспоненциальной (т.е. образ экспоненциального отображения совпадает со всей группой G_4).

Разрешая систему уравнений

$$x^1=u^1,\ x^2=\frac{1}{u^1}(u^2\sin u^1+u^3(\cos u^1-1)),\ x^3=\frac{1}{u^1}(-u^2(\cos u^1-1)+u^3\sin u^1),\ x^4=e^{u^4},$$

относительно неизвестных u^1,u^2,u^3,u^4, находим, что запись отображения $\exp^{-1}\colon G_4\to\mathcal{G}_4$ в выбранных координатах имеет вид:

$$\exp^{-1}(x^1,x^2,x^3,x^4)=\left(x^1,\frac{x^1}{2}\left(\frac{x^2\sin x^1}{1-\cos x^1}+x^3\right),\frac{x^1}{2}\left(-x^2+\frac{x^2\sin x^1}{1-\cos x^1}\right),\ln x^4\right).\qquad(2)$$

Здесь также имеем устранимую неопределенность, и надо добавить $\exp^{-1}(0,x^2,x^3,x^4)=(0,x^2,x^3,\ln x^4)$. Образ данного отображения не совпадает со всей алгеброй Ли. Заметим, что из области определения данных формул выпадают значения $x^1 = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z},\ k \neq 0$, однако мы ввели координаты на группе Ли так, что эти значения не соответствуют ни одной точке. Это отображение не является непрерывным в топологическом смысле.

Операция умножения в группе Ли G_4 имеет следующую запись в координатах:

$$(x^1, x^2, x^3, x^4)\cdot(y^1, y^2, y^3, y^4) = (x^1 + y^1, y^2\cos x^1 - y^3\sin x^1 + x^2, y^2\sin x^1 + y^3\cos x^1 + x^3, x^4 y^4), \quad (4)$$

и здесь надо уточнить, что $x^1 + y^1$ вычисляется с точностью до $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, так что $x^1 + y^1 \in (-\pi, \pi]$. Тем самым левый сдвиг на элемент $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$ действует по формуле

$$L_x(y^1, y^2, y^3, y^4) = (x^1 + y^1, y^2\cos x^1 - y^3\sin x^1 + x^2, y^2\sin x^1 + y^3\cos x^1 + x^3, x^4 y^4).$$

Заключение. В данной работе мы изучили структуру алгебры Ли $\mathcal{E}(2)\oplus\mathcal{R}$, определили системы координат в ней и в соответствующей группе Ли, нашли формулы по которым действуют экспоненциальное отображение, и обратное к нему отображение. Это поможет построить самоподобное однородное многообразие группы Ли $SE(2)\times\boldsymbol{R}^+$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой.