

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Федорец А.Р.,

*студентка 2 курса Полоцкого государственного университета
имени Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь*

Научный руководитель – Вабищевич Н.В., ст. преподаватель

Процессы переноса теплоты являются одними из самых распространенных в природе и технике. Это сложные процессы, зависящие от многих параметров одновременно. Для изучения и описания их разделяют на простые явления теплообмена: теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение. Цель настоящей работы состояла в анализе возможности применения метода разделения переменных для решения двумерных задач теплопроводности.

Материал и методы. Материалом исследования является температурное поле внутри тела, которая может быть определено в общем случае для конкретной задачи методом решения дифференциального уравнения теплопроводности, которое устанавливает связь между пространственным и временным изменением температуры [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad a = \frac{\kappa}{\rho c},$$

где a - физический параметр вещества, характеризующую скорость изменения температуры в нестационарных процессах, который был назван коэффициентом температуропроводности; κ - коэффициент теплопроводности; ρ - плотность; c - удельная теплоемкость [2].

Начальное условие для уравнения теплопроводности:

$$T(x, y, z, 0) \equiv T|_{t=0} = f(x, y, z)$$

где $f(x, y, z)$ - заданная функция, определенная и непрерывная во всех точках тела [3].

Следующее выражение представляет собой общий вид краевого условия, из которого могут быть получены выражения для краевых условий в более простых частных случаях [4]:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_r = h(T|_r - T).$$

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в двумерном случае для простейшей области — прямоугольника:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0;$$

$$T(0, y, t) = 0, \quad T(l_1, y, t) = 0;$$

$$T(x, 0, t) = 0, \quad T(x, l_2, t) = 0;$$

$$T(x, y, 0) = \varphi(x, y).$$

Применяя метод разделения переменных, будем искать ненулевые решения задачи в виде

$$T(x, y, t) = X(x)Y(y)K(t).$$

Посредством несложных преобразований, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{a} \frac{K'(t)}{K(t)}.$$

Каждое из отношений предыдущего равенства зависит только от своей переменной. Поэтому данное равенство возможно для всех значений переменных x, y, t из рассматриваемой области только если указанные отношения постоянны, т.е.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu, \quad \frac{1}{a} \frac{K''(t)}{K(t)} = -(\mu + \lambda).$$

С учетом граничных условий получаем из верхних отношений две задачи Штурма-Лиувилля и их решения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = X(l_1) = 0, Y''(y) + \mu Y(y) = 0, Y(0) = Y(l_2) = 0.$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2, X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l_1} x, k \in N, \mu_m = \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, Y_m(y) = \sin \frac{\pi m}{l_2} y, m \in N,$$

Функция $T(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$K'(t) + a\omega_{km}^2 K(t) = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$K_{km}(t) = A_{km} e^{-a(\omega_{km})^2 t}.$$

Итак, получаем выражение для искомых функций:

$$T_{km}(x, y, t) = X_k(x)Y_m(y)K_{km}(t) = A_{km} \sin \frac{\pi k}{l_1} x \sin \frac{\pi m}{l_2} y e^{-a(\omega_{km})^2 t},$$

Теперь ищем линейную комбинацию этих функций, которая обеспечивает выполнение начального условия. Воспользуемся ортогональной в прямоугольнике $0 < x < l_1, 0 < y < l_2$ системой функций

$$\{v_{km}(x, y)\} = \left\{ \sin \frac{\pi k}{l_1} x \cdot \sin \frac{\pi m}{l_2} y \right\}, k, m \in N,$$

квадрат нормы которых:

$$\|v_{km}\|^2 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} v_{km}^2(x, y) dx dy = \frac{l_1 l_2}{4}.$$

Ищем решение задачи в виде линейной комбинации функций:

$$T(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} v_{km}(x, y) e^{-a(\omega_{km})^2 t}.$$

Несложно определить коэффициенты из начального условия, окончательно получив:

$$T(x, y, t) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \left[\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \varphi(x, y) \sin \frac{\pi k}{l_1} x \sin \frac{\pi m}{l_2} y dx dy \right] e^{-a(\omega_{km})^2 t} \cdot \sin \frac{\pi k}{l_1} x \sin \frac{\pi m}{l_2} y.$$

Заключение. Таким образом, метод разделения переменных применим для решения двумерных задач теплопроводности и может использоваться как базовый для математического моделирования физических процессов, протекающих в реальных технических и природных системах.

1. Ерофеев, В. Л. Теплотехника. В 2 т. Том 1. Термодинамика и теории теплообмена : учебник для бакалавриата и магистратуры / В.Л. Ерофеев, А.С. Пряхин, П. Д. Семенов : под ред. В. Л. Ерофеева, А. С. Пряхина. – Москва. : Издательство Юрайт. 2017. – 308 с.
2. Самарский, А.А Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
3. Егоров, В.И. Аналитические методы решения задач теплопроводности. Учебное пособие / В.И. Егоров – Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2015. – 38 с.
4. Мазо, А.Б. Основы теории и методы расчета теплопередачи: учебное пособие / А.Б. Мазо – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 144 с.