Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

**Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова,
М.Н. Подоксёнов**

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2023

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.61я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 4 от 27.12.2022.

Авторы: доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин;** доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Ж.В. Иванова;** доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**

Рецензент:
старший преподаватель кафедры «Математика
и информационные технологии» УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*

Сурин, Т.Л.
С90 Сборник практических заданий по обыкновенным дифференциальным уравнениям : методические рекомендации / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова, М.Н. Подоксёнов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – 56 с.

Данное учебное издание подготовлено для студентов первой ступени высшего образования факультета МиИТ в соответствии с учебными программами по дисциплинам «Дифференциальные уравнения» (для специальностей «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Физико-математическое образование (математика и информатика)», «Компьютерная безопасность»), «Дифференциальные и интегральные уравнения» (для специальности «Физика»), «Математический анализ» (для специальностей «Программное обеспечение информационных технологий» и «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)») и «Высшая математика» (для специальности «Управление информационными ресурсами»). Излагаются теоретический материал, примеры решения задач и упражнения для самостоятельного решения.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.61я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические рекомендации являются продолжением ранее вышедших учебных изданий авторов М.Н. Подоксенова и Т.Л. Сурин [9] и [10], где подробно излагается материал по теории дифференциальных уравнений первого и высших порядков.

Данная работа предназначена для студентов, изучающих дисциплины «Дифференциальные уравнения» (специальности «Физико-математическое образование (математика и информатика)», «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Компьютерная безопасность») и «Дифференциальные и интегральные уравнения» (специальность «Физика»). Она также охватывает разделы, посвященные дифференциальным уравнениям и входящие в предметы «Математический анализ» (специальности «Программное обеспечение информационных технологий», «Информационные системы и технологии (в здравоохранении)») и «Высшая математика» (специальность «Управление информационными ресурсами»).

Авторами рассматриваются дифференциальные уравнения первого и высших порядков. Кратко приводятся теоретические сведения и предлагаются примеры решения задач. Основную часть издания составляют задачи, которые предназначены для решения на практических занятиях и обеспечения самостоятельной работы студентов. Каждый параграф посвящен определенному типу задач.

В конце методических рекомендаций приведен список литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов дифференциальных уравнений. Для построения решений на чертеже могут быть полезны некоторые сведения по геометрии, которые можно найти в [11].

Материал теоретического и практического содержания, приведенный в пособии, соответствует учебным программам по дифференциальным уравнениям для вышеперечисленных специальностей.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ИЗОКЛИНЫ

1. Основные теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение для отыскания неизвестной функции, содержащее производные или дифференциалы этой функции.

Порядок старшей производной или старшего дифференциала, входящих в состав уравнения, называется *порядком* уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая имеет непрерывные производные до порядка уравнения включительно, и при её подстановке в уравнение мы получаем тождество (предполагается, что эта функция определена при тех же значениях переменной x, что и функции, задающие уравнение).

Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $y'=f(x)$. Из математического анализа известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a,b), то решением уравнения является функция $y=\int f(x)dx + C$. Совокупность решений, содержащую произвольную постоянную, называется *общим* решением.

Пусть $y = y(x)$ – решение уравнения. Тогда график этой функции – это кривая на плоскости, которая называется *интегральной кривой* рассматриваемого ОДУ.

Рассмотрим уравнение $y'=f(x, y)$. Возьмём произвольную точку $(x, y)\in D$. В этой точке мы можем найти значение $f(x, y)$, а, следовательно, найти значение $\frac{dy}{dx}$. Это означает, что в каждой точке мы можем найти значение углового коэффициента касательной к проходящему через эту точку графику решения уравнения, т.е. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$.

Если в каждой точке (x, y) области D представить направление касательной, определяемое значением $f(x, y)$, в виде некоторого единичного отрезка с центром в этой точке, то получим *поле направлений*.

Геометрическое место точек плоскости, в которых наклон касательных к решению уравнения один и тот же, называется *изоклиной.*

Чтобы приближенно построить решения уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин $f(x, y) = k$, а затем провести решения

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Показать, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ является решением уравнения $yy'' = (y')^2$.

Решение. Функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем y' и y'': $y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}$, $y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}$. Найденные значения подставим в уравнение: $C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} = (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2$. Получили тождество. Значит, данная функция является решением уравнения.

***Пример* 2.** Найти решение уравнения $y' = 2x$.

Решение. Его общее решение есть функция $y = x^2 + C$, которая задана на всей плоскости Oxy.

***Пример* 3.** Рассмотрим уравнение $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$. Данное уравнение задано всюду, кроме точки $(0,0)$. Пусть $-\dfrac{y}{x} = k = \operatorname{tg}\alpha$. Рассматриваем различные значения

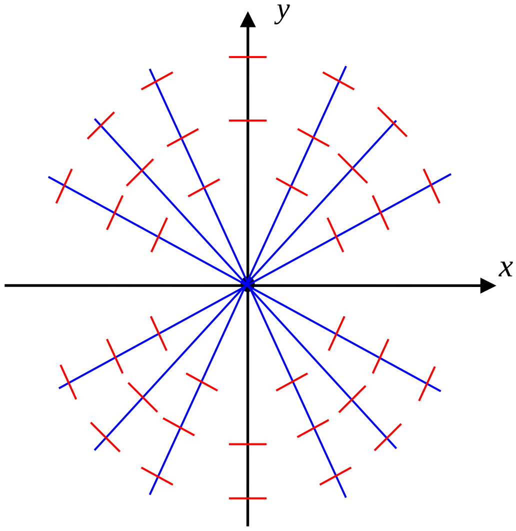

рис. 1

1) $-\dfrac{y}{x} = 0$, $x = 0$, $(y \neq 0)$, $\alpha = 0$;

2) $-\dfrac{y}{x} = 1$, $y = -x$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $-\dfrac{y}{x} = -1$, $y = x$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$;

4) $-\dfrac{y}{x} = 2$, $y = -\dfrac{1}{2}x$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$;

5) $-\dfrac{y}{x} = 2$, $y = \dfrac{1}{2}x$, $\alpha = -\operatorname{arctg} 2$.

Все эти значения изображены на рисунке 1.

Из рисунка можно заметить, что интегральные кривые – это окружности $x^2 + y^2 = C$.

3. Задания для практических занятий

Показать, что функции $y = y(x)$, зависящие от произвольных постоянных, являются решениями соответствующих уравнений. Указать максимальный интервал, на котором задано это решение.

1. $y = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$; $\qquad y - xy' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

1.2. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; $\qquad y'' + 4y = 0$.

1.3. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x/4$; $\quad y'' + 4y = x$.

1.4. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + e^{2x}$; $\quad y'' + 4y = 8e^{2x}$.

1.5. $y = x + C\sqrt{1+x^2}$; $\quad (xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0$.

Составить дифференциальные уравнения семейства кривых.

1.6. $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

1.7. $y = \sin x + C\cos x$.

1.8. $y = e^{Cx}$;

1.9. $y = Cx^3$;

1.10. $y^2 + Cx = x^3$.

1.11. $x^2 + Cy^2 = 2y$.

Проинтегрировать простейшие уравнения.

1.12. $y' = \dfrac{x^3}{x^4+2}$;

1.13. $y' = x\cos 2x$;

1.14. $y' = \dfrac{\ln^2 x + 1}{x}$;

1.15. $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + 1}$;

1.16. $y' = \operatorname{arctg} x$;

1.17. $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x}$;

1.18. $y' = \dfrac{1}{x(\ln x - 1)}$;

1.19. $y' = x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

С помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений.

1.20. $y' = \dfrac{y}{x}$;

1.21. $y' = \dfrac{x}{y}$;

1.22. $y' = \dfrac{2y}{x}$;

1.23. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

1.24. $y' = -\dfrac{y}{x}$;

1.25. $y' = \dfrac{y}{x+y}$.

2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЁННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Основные теоретические сведения

Дифференциальным уравнением с разделёнными переменными называется уравнение вида

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0, \tag{2.1}$$

в котором функции P и Q зависят соответственно только от x и только от y.

Теорема. *Общим интегралом уравнения* (1) *служит соотношение*

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C. \tag{2.2}$$

Если при этом в точке (x_0,y_0) $P(x_0)$ и $Q(y_0)$ не равны нулю одновременно, то решение задачи Коши с начальным условием $y(x_0)=y_0$ задаётся формулой

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = 0.$$

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0. \tag{2.3}$$

Предположим, что в рассматриваемой области определения все функции p_1, q_1, p_2, q_2, непрерывны и $p_2(x)$, $q_1(y)$ не обращаются в ноль. Тогда разделим уравнение (2.3) на произведение $p_2(x)q_1(y)$:

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = 0.$$

Мы получили уравнение с разделёнными переменными. Как его решать, мы уже знаем.

Отдельно стоит рассмотреть случай, когда уравнения $p_2(x)=0$, $q_1(y)=0$ имеют вещественные корни $x=a$ и $y=b$ соответственно. Это даст дополнительные решения вида $x=a$ $(y\neq b)$, $y=b$ $(x\neq a)$. Эти решения могут оказаться особыми.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общий интеграл уравнения

$$e^{-x^2}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \quad (y>0).$$

Решение. Общий интеграл уравнения

$$\int_0^x e^{-x^2}dx + \int_1^y \frac{1}{y}dy = C \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-x^2}dx + \ln y = C.$$

Пусть дано начальное условие: $y(0)=1$. Тогда решением задачи Коши будет равенство $\int_0^x e^{-x^2}dx + \ln y = 0$ или функция $y = e^{-\int_0^x e^{-x^2}dx}$.

***Пример* 2**. Найти общий интеграл уравнения $(1+y)dy = x^2dx$.

Решение. Проинтегрируем уравнение $\int(1+y)dy = \int x^2dx + C$,

следовательно, общий интеграл уравнения имеет вид $y + \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$.

***Пример* 3.** Найти общий интеграл уравнения

$$2x\sqrt{y}dx \; + \; (1-x^2)dy = 0 \;\; (y \geq 0).$$

Решение. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{2x}{1-x^2}dx \; + \; \frac{dy}{\sqrt{y}} \; = \; 0\,, \;\; (1-x^2 \neq 0, \sqrt{y} \neq 0).$$

$$\int \frac{2x}{1-x^2}dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C\,.$$

Общий интеграл:

$$-\ln|1-x^2| + 2\sqrt{y} = C\,.$$

Мы делили на $1-x^2$. Поэтому следует отдельно рассмотреть случай $1-x^2=0$. Получаем решения $x=1$ и $x=-1$ ($y \neq 0$). Проверьте самостоятельно подстановкой, что это действительно решения. Кроме этого, решением является функция $y=0$ ($x \neq 1$, $x \neq -1$). Это решение является особым.

В тех точках, где $2x\sqrt{y} = 1-x^2 = 0$ поле направлений не определено. Это точки (1, 0) и (–1, 0). Это существенно особые точки. К ним примыкают решения $y=0$, $x=1$ и $x=-1$. Тем не менее, решения через эти точки не проходят.

Предположим, что поставлено условие: найти интегральную кривую, которая проходит через точку $M(0,\ 1)$. Подставляем в общий интеграл $x=0$ и $y=1$. Найдём $C=2$. Из равенства

$$-\ln|1-x^2| + 2\sqrt{y} = 2$$

можно получить решение в явном виде:

$$2\sqrt{y} = 2 + \ln|1-x^2| \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right)^2.$$

3. Задания для практических занятий

Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения:

2.1. $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0;\qquad y(0)=1.$

2.2. $xy' + y = y^2;\qquad y(1)=0.5.$

2.3. $y'ctgx + y = 2;\qquad y(0)=-1.$

2.4. $2x^2yy' + y^2 = 2.$ 2.5. $y' - xy^2 = 2xy.$

2.6. $y' = e^{x-y}.$ 2.7. $y' = y\cos x;\qquad y(0)=1.$

2.8. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0.$

2.9. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0;$

2.10. $\left(y^2+xy^2\right)dx+(x^2-yx^2)dy=0.$

2.11. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$

2.12. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

2.13. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$

2.14. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$

2.15. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$

2.16. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0.$

2.17. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$

2.18. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0.$

2.19. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0.$

2.20. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$ *а*) $y(1)=0$ *б*) $y(0)=0.$

2.21. $(e^x+8)dy-ye^xdx=0.$

2.22. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx.$

2.23. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$

2.24. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$

3. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные теоретические сведения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной степени* m, если

$$f(tx,\ ty)\equiv t^m f(x,\ y). \tag{3.1}$$

для всех (x,y) из области определения функции. Если это равенство выполняется только для $t>0$, то функция называется *положительно однородной*.

Уравнение вида

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0, \tag{3.2}$$

называется *однородным*, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными одной и той же степени.

Однородное уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=ux$, где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция.

Чаще всего ОДУ-1 задается в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. В случае, когда это уравнение однородное, мы можем его привести к виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) . \qquad (3.3)$$

Данное уравнение является однородным, если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени однородности.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0 .$$

Решение. Покажем, что данное уравнение является однородным. Находим

$$P(tx, ty) = (ty)^2 - 2tx ty = t^2(y^2 - 2xy) = t^2 P(x, y),$$

$$Q(tx, ty) = (tx)^2 = t^2 x^2 = t^2 Q(x, y).$$

Так как функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными одной и той же степени, то рассматриваемое уравнение является однородным. Сделаем подстановку $y = ux$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $dy = udx + xdu$. Подставим $u = u(x)$ и dy в уравнение:

$$((ux)^2 - 2xux)dx + x^2 (udx + xdu) = 0 .$$

Пусть $x \neq 0$, сократим полученное равенство на x^2. Получаем

$$(u^2 - 2u)dx + (udx + xdu) = 0, \text{ или}$$

$$(u^2 - u)dx + xdu = 0 .$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение, получаем

$$\ln|x| + \ln\frac{|y-x|}{|y|} = \ln|C| \qquad \text{или} \qquad \frac{x(y-x)}{y} = C .$$

Это общий интеграл уравнения.

$x = 0$ $(y \neq 0)$ является частным решением.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y .$$

***Решение*.** Разделим обе части уравнения на x, получим

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 + x^2} + y}{x} \text{ или } y' = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} + \frac{y}{x} ,$$

Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}+\frac{y}{x}$. Так как $f(tx,ty)=\sqrt{\left(\frac{ty}{tx}\right)^2+1}+\frac{ty}{tx}=f(x,y)$, то уравнение является однородным. Сделаем подстановку $y=ux$, где u – новая искомая функция. Тогда $y'=u'x+u$. Получим

$$u'x+u=\sqrt{u^2+1}+u \qquad \text{или} \qquad u'x=\sqrt{u^2+1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив их, получим

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{dx}{x} \quad (x\neq 0); \qquad \int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{dx}{x}+C_1, \quad C_1\in R;$$

$$\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|=\ln|x|+C_1; \qquad u+\sqrt{u^2+1}=\pm e^{C_1}x;$$

$$u+\sqrt{u^2+1}=Cx \quad \left(C=\pm e^{C_1}, \quad C\in R\setminus\{0\}\right);$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=Cx; \qquad \sqrt{x^2+y^2}+y=Cx^2.$$

Это общее решение уравнения. Проверим, не потеряли ли мы решение $x=0$. Подставляя в уравнение, получаем:

$$0=\sqrt{y^2}+y; \qquad 0=|y|+y.$$

Если $y\le 0$ то $0\equiv 0$, т.е. $x=0$ является решением уравнения в полуплоскости $y\le 0$.

3. Задания для практических занятий

Найти общее решение или общий интеграл уравнения.

3.1. $y'=\frac{y^2-x^2}{xy}$.

3.2. $y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{x}{y}$.

3.3. $y'=\frac{xy}{x^2}+7$.

3.4. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x^2}{x^2}$.

3.5. $y'=\frac{y}{x}+5$.

3.6. $x^2dy=(y^2-xy+x^2)dx$.

3.7. $y'=\frac{x^2y}{x^3}-3$.

3.8. $y'=\frac{3xy-4x^2}{x^2}$.

3.9. $x^2y'+y^2+xy+x^2=0$.

3.10. $(x^2+y^2)dx=2xydy$.

3.11. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

3.12. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

3.13. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.14. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

3.15. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

3.16. $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$.

3.17. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

3.18. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3.19. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

3.20. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

3.21. $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

3.22. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

3.23. $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

3.24. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

4. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К ОДНОРОДНЫМ

1. Основные теоретические сведения

1. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{4.1}$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение является однородным. Пусть хотя бы один из коэффициентов c_1, c_2 не равен нулю.

1 случай. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае сделаем замену переменных по формулам

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + z,$$

где x_0 и y_0 – некоторые пока что неизвестные числа, а t и z новые переменные. Возьмем в качестве x_0 и y_0 решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = 0, \end{cases}$$

и придем к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\right),$$

которое является однородным.

2 случай. Пусть $\Delta = 0$. Тогда строки в этом определителе пропорциональны и будет выполняться равенство $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$. Уравнение (4.1) имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Это уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если сделать подстановку $z = a_1x + b_1y$. Тогда получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right).$$

2. ***Обобщенное однородное уравнение.*** Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется обобщенным однородным, если существует такое число k, при котором левая часть этого уравнения становится однородной функцией от величин x, y, dx, dy, имеющих первое, k-ое, нулевое и $(k-1)$-е измерения. При $k = 1$ обобщенное однородное уравнение является обычным однородным уравнением.

Обобщенное однородное уравнение при помощи подстановки $y = zx^k$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти решение уравнения $y' = \frac{20x + 77y - 97}{76x + y - 77}$.

Решение. Система $\begin{cases} 20x + 77y - 97 = 0, \\ 76x + y - 77 = 0, \end{cases}$ имеет решение $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Сделаем подстановку $x = 1 + t$, $y = 1 + z$. Для новой неизвестной функции $z = z(t)$ получаем уравнение $z' = \frac{20t + 77z}{76t + z}$. Это однородное уравнение. Сделав подстановку $z = ut$, получим уравнение $u't + u = \frac{20 + 77u}{76 + u}$. Преобразовав это уравнение, приходим к уравнению с разделяющимися переменными $u't = \frac{20 + u - u^2}{76 + u}$. Разделим переменные $\frac{(76 + u)du}{20 + u - u^2} = \frac{dt}{t}$. Проинтегрировав это уравнение, получим $C(u + 4)^8 = t(u - 5)^9$. Вернувшись к первоначальным переменным, имеем $C(y + 4x - 5)^8 = (y - 5x + 4)^9$. При разделении переменных мы могли потерять решения $u=5$ и $u=-4$, т.е. решения $y+4x-5=0$ и $y-5x+4=0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти функции являются решениями уравнения.

***Пример* 2.** Найти решение уравнения $2x^4ydy=(4x^6-y^4)dx$.

Решение. Покажем, что это уравнение является обобщенным однородным. Предположим, что величины x, y, dx, dy имеют соответственно первое, k–е, нулевое и $(k-1)$-е измерения. Тогда выражения $2x^4ydy$, $4x^6dx$ и y^4dx имеют $(2k+3)$-е, шестое и $4k$-е измерения. Должно выполняться $2k+3=6=4k$. Отсюда получаем, что $k=3/2$.

Упражнение. Сделать подстановку $y=zx^{3/2}$ и найти решение уравнения. ***Ответ.*** $x^5(y^2-x^3)/(y^2+4x^3)=C$.

3. Задания для практических занятий

Решить уравнения.

4.1. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$;

4.2. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$;

4.3. $(x-y-1)dx+(-x+y+2)dy=0$;

4.4. $(x+4y)y'=2x+3y-5$;

4.5. $(x-5y+7)dx+(4x-2y+10)dy=0$;

4.6. $(x+2y+1)y'=2x+4y+3$;

4.7. $xydx+(y^4-3x^2)dy=0$;

4.8. $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$;

4.9. $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$;

4.10. $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$;

4.11. $(1+\sqrt{y^2/x-1})dx-2ydy=0$.

5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные теоретические сведения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \qquad (5.1)$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a,b) (возможно, что $a=-\infty$, $b=+\infty$).

Если при этом правая часть равна нулю, то уравнение называется *линейным однородным*, а если правая часть не равна нулю – то *линейным неоднородным*.

Решение однородного уравнения можем выписать в явном виде:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \qquad (5.2)$$

Есть два метода нахождения решения уравнения (5.1).

Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной.

Вначале решаем однородное уравнение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и его решение легко найти в виде (5.2).

Решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, как и решение соответствующего однородного, но постоянную представляем, как функцию от x: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Подставив в уравнение и выполнив все преобразования, получим общее решение:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Метод Бернулли.

Решение неоднородного уравнения ищут в виде произведения двух неизвестных функций: $y = u(x)\cdot v(x)$.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти решение дифференциального уравнения

$$x^2y' - y = x^2e^{x-\frac{1}{x}}.$$

Решение. Это линейное уравнение относительно y. Рассмотрим вначале однородное линейное уравнение $x^2y' - y = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив их, получим

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2} = 0; \qquad \int\frac{dy}{y} - \int\frac{dx}{x^2} = C_1;$$

$$\ln|y| + \frac{1}{x} = C_1; \qquad |y| = e^{C_1 - \frac{1}{x}} = e^{C_1}e^{-\frac{1}{x}};$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{x}} \ \left(C = \pm e^{C_1}; C \in R \setminus \{0\}\right).$$

Частное решение неоднородного линейного уравнения найдем методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), т.е. положим $y = C(x)e^{-\frac{1}{x}}$, тогда $y' = C'(x)e^{-\frac{1}{x}} + C(x)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

Подставим это в уравнение.

$$x^2\left(C'(x)e^{-\frac{1}{x}}+C(x)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)-C(x)e^{-\frac{1}{x}}=x^2e^{x-\frac{1}{x}}.$$

$$C'(x)=e^x; \qquad C(x)=\int e^x dx+C; \qquad C(x)=e^x+C.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y=\left(e^x+C\right)e^{-\frac{1}{x}}=Ce^{-\frac{1}{x}}+e^{x-\frac{1}{x}}.$$

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{y}{x}=2xe^x$ $(x\neq 0)$.

Решение. Делаем замену $y=u\cdot v$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Тогда

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{uv}{x}=2xe^x, \quad u'\cdot v+u(v'-\frac{v}{x})=2xe^x.$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю и из получившегося уравнения находим функцию $v(x)$:

$$v'-\frac{v}{x}=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\ln|v|=\ln(|x||C|), \quad v=Cx.$$

В качестве C берём любое число, например 1, т.е. нас устраивает решение $v=x$. Теперь для нахождения функции $u(x)$ мы имеем уравнение $u'\cdot x=2xe^x$. Решаем его

$$u'=2e^x, \quad u=2\int e^x dx, \quad u=2e^x+C.$$

***Ответ*:** $y=x(2e^x+C)$.

3. Задания для практических занятий

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

5.1. $\left(2xe^{x^2}+2xy\right)dx-dy=0; \quad y(0)=0.$

5.2. $(2x-y^2)y'=2y.$

5.3. $yx'+x\sin y=y^2$.

5.4. $(2e^y-x)y'=2y.$

5.5. $(2x+y)dy=ydx+4\ln y dy.$

5.6. $dy+\left(ytgx-\frac{1}{\cos x}\right)dx=0.$

5.7. $2\left(x^4+y\right)dx-xdy=0.$

5.8. $y' + 2xy = e^x$.

5.9. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

5.10. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$; $\quad y(1) = 1$.

5.11. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x} e^x$; $\quad y(1) = e$.

5.12. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$; $\quad y(1) = 1$.

5.13. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$; $\quad y(1) = 4$.

5.14. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$; $\quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

5.15. $y' + \dfrac{2}{x} y = x^3$; $\quad y(1) = \dfrac{-5}{6}$.

5.16. $y' + ytgx = \cos^2 x$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

5.17. $x(x-1)y' + y = x^2 + 2x - 1$; $\quad y(2) = 4$.

5.18. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$; $\quad y(0) = 0$.

5.19 $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; $\quad y(-1) = \dfrac{3}{2}$.

5.20. $y' - \dfrac{1}{x+1} = e^x (x+1)$; $\quad y(0) = 1$.

5.21. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

5.22. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$; $\quad y(1) = 1$.

5.23. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $\quad y(0) = \dfrac{2}{3}$.

5.24. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$; $\quad y(1) = 3$.

6. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. Основные теоретические сведения

Уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{6.1}$$

где n – любое действительное число, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Уравнение Бернулли (6.1) подстановкой $z = y^{1-n}$ сводится к решению линейного уравнения (для функции z).

При делении на y^n, если $n > 0$, может потеряться решение $y = 0$. Это решение будет частным, если $n > 1$ и может быть особым, если $0 < n < 1$.

Замечание. Уравнение Бернулли можно решить, не прибегая к делению на y^n и сведению уравнения к линейному, а применяя подстановку $y = u \cdot v$.

2. Примеры решения задач

Пример **1.** Найти общее решение уравнения $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Это уравнение Бернулли. Здесь $p(x) = -\frac{4}{x}$, $q(x) = x$, $n = \frac{1}{2}$. Преобразуем уравнение, разделив его на $\sqrt{y}$: $\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$.

Положим $z = \sqrt{y}$, тогда $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$. Следовательно, $2z' - \frac{4}{x}z = x$ или $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$. Отсюда

$$z = C e^{\int \frac{2}{x}dx} + e^{\int \frac{2}{x}dx}\int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx$$

или

$$z = C x^2 + x^2 \int \frac{dx}{2x} = C x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln|x|$$

$$y = z^2 = \left(C x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln|x|\right)^2,$$

$y = 0$ – особое решение.

Пример **2.** Найти общее решение уравнения

$$y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}.$$

Решение. Для данного уравнения $n = \frac{1}{2}$. Решим его методом Бернулли, с помощью подстановки: $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2e^x u \cdot v = 2e^x\sqrt{y}.$$

$$u' \cdot v + u(v' + 2e^x v) = 2e^x\sqrt{y}.$$

Приравниваем скобку к нулю и решаем получившееся уравнение:

$$\frac{dv}{dx} = -2\,e^x v, \qquad \frac{dv}{v} = -2\,e^x dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int e^x dx, \qquad \ln|v| = -2\,e^x.$$

Произвольную константу считаем равной 0, поскольку нас интересует только одно частное решение $v = e^{-2e^x}$.

Теперь получаем новое уравнение

$$u' \cdot e^{-2e^x} = 2e^x\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad u' = 2e^x e^{2e^x} \sqrt{ue^{-2e^x}} .$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = 2e^x e^{e^x}; \qquad 2\sqrt{u} = 2e^x e^{e^x} + C_1; \quad u = (e^x e^{e^x} + C)^2 .$$

Ответ: $y = u \cdot v = e^{-2e^x}(e^x e^{e^x} + C)^2$.

3. Задания для практических занятий

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

6.1. $y' + \dfrac{x}{1+x^2} y = x\sqrt{y}$.

6.2. $y' = x^3y^3 - xy$.

6.3. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

6.4. $xy' + y = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$.

6.5. $3y^2y' + y^3 + x = 0$.

6.6. $y' - y = xy^2; \quad y(0) = 0$.

6.7. $xy' - y = y^2; \quad y(0) = 0$.

6.8. $xy' + y = xy^2; \quad y(0) = 0$.

6.9. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}$.

6.10. $3(xy' + y) = y^2 \ln x; \quad y(1) = 3$.

6.11. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x; \quad y(1) = 1$.

6.12. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}; \quad y(0) = -1$.

6.13. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2; \quad y(0) = 2$.

6.14. $3(xy' + y) = xy^2; \quad y(1) = 3$.

6.15. $y' + 2xy = 2x^3y^3; \quad y(0) = \sqrt{2}$.

6.16. $y' - y = 2xy^2; \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$.

6.17. $xy' + y = xy^2 \ln x; \quad y(1) = 1$.

6.18. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}; \quad y(0) = 0$.

6.19. $2y' + 3\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}; \quad y(0) = 1$.

6.20. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x); \quad y(0) = 1$.

6.21. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3; \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6.22. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3)$; $y(0) = -1.$

6.23. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$; $y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

6.24. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2$; $y(0) = 1.$

7. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

1. Основные теоретические сведения

Пусть дано уравнение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$. Если левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных, то оно называется *уравнением в полных дифференциалах*. Это уравнение является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{7.1}$$

Условие (7.1) называют *условием полной дифференцируемости*.

Так как в этом случае уравнение принимает вид $dU(x,\ y) = 0$, то общим интегралом будет $U(x,\ y) = C$, где функция $U(x,\ y)$ удовлетворяет двум условиям: $\partial U/\partial x = P(x,\ y)$, $\partial U/\partial y = Q(x,\ y)$.

Функция $U(x,\ y)$ восстанавливается следующим образом. Из первого условия находим

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{7.2}$$

где $\varphi\ (y)$ – некоторая функция, которая предполагается дифференцируемой. Найдем теперь от обеих частей равенства (7.2) частную производную по y и заменим $\partial U/\partial y$ на Q:

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right) + \varphi'(y) \Leftrightarrow \varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right).$$

Находим функцию $\varphi(y)$ и подставляем в (7.2).

Замечание. Решение уравнения в полных дифференциалах можно найти, пользуясь криволинейными интегралами. Функция $U(x,y)$ будет равна

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C,$$

где (x_0,y_0) – произвольная фиксированная точка из области определения уравнения (в этой точке должно быть задано поле направлений).

Общий интеграл может быть записан записать в одном из следующих видов:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C, \qquad \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C\ .$$

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0\,.$$

Решение. $P(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1$; $Q(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого найдем $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{xy}{\sqrt{\left(x^2-y^2\right)^3}}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{xy}{\sqrt{\left(x^2-y^2\right)^3}}$ т.е. $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах и его общий интеграл можно найти по формуле

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C\,,$$

где (x_0,y_0) некоторая точка из области задания уравнения.

Возьмем $x_0 = 1$, $y_0=0$. Тогда общий интеграл

$$\int_1^x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\int_0^y\frac{ydy}{\sqrt{\left(1-y^2\right)}}=C;$$

$$\left(\sqrt{x^2-y^2}-x\right)\Big|_1^x+\sqrt{1-y^2}\ \Big|_0^y=C;$$

$$\sqrt{x^2-y^2}-x-\sqrt{1-y^2}+1+\sqrt{1-y^2}-1=C;$$

$\sqrt{x^2-y^2}-x=C$ – общий интеграл уравнения.

Общий интеграл можно найти и другим способом. Так как

$$dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,,$$

то, интегрируя по x коэффициент при dx, получим

$$U(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ некоторая функция, зависящая только от y.

$$U(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}-x+\varphi(y).$$

Дифференцируя по y и приравнивая коэффициент при dy, получим

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}+\varphi'(y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

откуда $\varphi'(y)=0$, а тогда $\varphi(y)=C_1$, $U(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}-x+C_1$. Полагая $U(x,y)=C$, найдем общий интеграл: $\sqrt{x^2-y^2}-x=C.$

3. Задания для практических занятий

Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения.

7.1. $x\left(2x^2+y^2\right)+y(x^2+2y^2)y'=0.$

7.2. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0;\quad y(1)=1.$

7.3. $\left(4y^2-6x^3\right)ydy+\left(2-9xy^2\right)xdx=0.$

7.4. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$

7.5. $\left(y^2+y\sec^2 x\right)dx+(2xy+tgx)dy=0.$

7.6. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0.$

7.7. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0.$

7.8. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+e^x\right)dx-\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=0.$

7.9. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0.$

7.10. $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0.$

7.11. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0.$

7.12. $\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{xy+1}{x}dy=0.$

7.13. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{1}{x}dy=0.$

7.14. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0.$

7. 15. $\left(10xy-\dfrac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\dfrac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0.$

7.16. $\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy+\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx=0.$

7.17. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\ dy=0; \qquad y(1)=1.$

7.18. $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x dy=0; \qquad y(0)=0.$

7.19. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

7.20. $(\sin xy+xy\cos x)dx+x^2\cos xy dy=0; \qquad y(0)=0.$

7.21. $(\sin 2x-2\cos(x+y))dx-2\cos(x+y)dy=0.$

7.22. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$

7.23. $(3x'y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0.$

7.24. $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx-\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+2y\right)dy=0.$

8. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1. Основные теоретические сведения

Предположим, что мы имеет уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (8.1)$$

которое не является уравнением в полных дифференциалах. Функция $\mu=\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения (8.1), если после умножения на нее, уравнение станет уравнением в полных дифференциалах

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0.$$

Можно показать, что функцию $\mu(x,y)$ можно найти из уравнения

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu. \qquad (8.2)$$

Уравнение (8.1) имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$, который зависит только от x, когда

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\psi(x).$$

В этом случае $\mu=Ce^{\int\psi(x)dx}$. Взяв $C=1$, получим $\mu=e^{\int\psi(x)dx}$.

Аналогично, если интегрирующий множитель зависит только от y, мы можем найти его по формуле

$$\mu = e^{\int \psi(y)dy}.$$

Для этого должно быть выполнено условие

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \psi(y).$$

В общем случае, если

$$\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q(\partial \omega/\partial x) - P(\partial \omega/\partial y)} \equiv \psi(\omega),$$

где ω– заданная функция от x и y, то неизвестную функцию $\mu = \mu(x,y)$, можно найти по формуле

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)d\omega}.$$

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения

$$(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0,$$

приведя его к уравнению в полных дифференциалах и зная, что оно имеет интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

Решение. Проверим, существует ли интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$. Найдем

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{7 - 3xy^2} \neq \psi(x).$$

Следовательно, данное уравнение интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x)$ не имеет. Попробуем найти интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(y)$.

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4xy - 6y^2}{-2xy^2 + 3y^2} = -\frac{2}{y} \equiv \psi(y).$$

$$\mu = e^{\int \psi(y)dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = Ce^{-2\ln|y|} = \frac{C}{y^2}.$$

В качестве C мы можем взять $C = 1$. Умножив уравнение на $\frac{1}{y^2}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(2x - 3y)\, dx + (7/y^2 - 3x)\, dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид $x^2 - 3xy - 7/y = C$.

При умножении на интегрирующий множитель мы могли потерять решение $y = 0$. Эта функция является решением уравнения, но это частное решение; оно содержится в общей формуле при $C = \infty$.

***Пример* 2.** Найти общее решение уравнения

$$(\mathrm{tg}(x + y) + x)\, dx + x\, dy = 0.$$

Решение. Так как под знаком тангенса присутствует выражение $x + y$, то попробуем найти интегрирующий множитель, зависящий от $x + y$. $\omega = \omega(x + y)$. $\quad \partial\omega/\partial x = 1, \quad \partial\omega/\partial y = 1.$

$$\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q(\partial\omega/\partial x) - P(\partial\omega/\partial y)} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x+y)} - 1}{-tg(x+y)} = -tg(x+y) = \psi(\omega).$$

Тогда $\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} = C|\cos(x+y)|$. Можно взять $\mu = \cos(x+y)$. Умножая исходное уравнение на μ, получим

$$(\sin(x + y) + x\cos(x+y))\, dx + x\cos(x+y)\, dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения $\quad x\sin(x + y) = C.$

3. Задания для практических занятий

Найти общее решение уравнения дифференциального уравнения, приведя его к уравнению в полных дифференциалах и зная, что оно имеет интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

8.1. $2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\, dy = 0.$

8.2. $(x^2 + y)\, dx - x\, dy = 0.$

8.3. $(2xy^2 - y)\, dx + (y^2 + x + y)\, dy = 0.$

8.4. $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} - 1\right)dy = 0.$

8.5. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$

8.6. $(xy^2 + y)\, dx - x\, dy = 0.$

Решить уравнения с помощью интегрирующих множителей одного из видов: $\mu = \mu(x + y)$, $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$, $\mu = \mu(x^2 - y^2)$.

8.7. $(x^2y^3 + y)\, dx + (x^3y^2 - x)\, dy = 0.$

8.8. $x\left(\dfrac{1}{x^2 - y^2} + 4\right)dx + y\left(\dfrac{1}{x^2 - y^2} - 4\right)dy = 0.$

8.9. $\left(\dfrac{1}{(x+y)^2}+2y\right)dx+\left(\dfrac{1}{(x+y)^2}+3y+x\right)dy=0$.

8.10. $(x^2 + y)\, dy + (x - xy)\, dx = 0$.

8.11. $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$.

8.12. $(x^2 - y^2 + 1)xdx + (x^2 - y^2)y\, dy = 0$.

9. ОДУ-1, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. Основные теоретические сведения

ОДУ-1 *не разрешенное относительно производной* имеет вид

$$F(x,y,y') = 0. \tag{9.1}$$

Уравнения вида (9.1) желательно разрешить относительно производной. Это часто удается для уравнения *n-ой* степени.

Уравнением *первого порядка n-ой степени* называется уравнение вида

$$y'^n + A_1(x,y)y'^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x,y)y' + A_{n-1}(x,y) = 0. \tag{9.2}$$

Если это уравнение получится разрешить в элементарных функциях относительно y', то мы можем получить несколько уравнений вида

$$y' = f_k(x,y),\ (k = 1,\ldots,m,\ m \le n). \tag{9.3}$$

Предположим, что для каждого из уравнений (9.3) найден общий интеграл

$$\psi_k(x,y) = C,$$

тогда общим интегралом уравнения (9.2) является

$$(\psi_1(x,y)-C)(\psi_2(x,y)-C)\ldots\ (\psi_k(x,y)-C) = 0.$$

Особым решением уравнения (9.2) может быть только его дискриминантная линия. Дискриминантная линия для уравнения (9.1) находится следующим образом. Запишем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0. \end{cases}$$

Исключая y', получим уравнение вида $\Phi(x,y)=0$. Оно задаёт *дискриминантную линию* уравнения (9.1). Дискриминантная кривая может оказаться одной точкой, а может оказаться особым решением или просто кривой.

Однако не всегда уравнение (9.1) разрешается относительно производной, а если и разрешается, то полученные уравнения не всегда легко интегрируются. Поэтому уравнение (9.1) часто решают методом введения параметра.

Предположим, что уравнение (9.1), не разрешенное относительно производной, допускает параметрическое представление

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ y'=\theta(u,v), \tag{9.4}$$

где u, v – параметры. Тогда его можно свести к уравнению, разрешенному относительно производной. Подставим (9.4) в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\theta(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right).$$

Теперь можем выразить из этого уравнения

$$\frac{dv}{du}=f(u,v). \tag{9.5}$$

Предположим теперь, что найдено общее решение в явном виде уравнения (9.5): $v=w(u,C)$. Тогда мы можем выписать общее решение уравнения (9.1) в параметрическом виде:

$$x=\varphi(u,w(u,C)),\ y=\psi(u,w(u,C)).$$

Если уравнение (9.5) имеет особое решение $v=w_1(u)$, то решение

$$x=\varphi(u,w_1(u)),\ y=\psi(u,w_1(u))$$

может оказаться особым решением уравнения (9.1).

Если уравнение (1) можно разрешить относительно x или y, то за параметры можно взять оставшиеся переменные.

I случай. Пусть удалось разрешить (9.1) относительно y:

$$y=\varphi(x,y').$$

Тогда за параметры берём x и y', причём введём обозначение $y'=p$.

$$y=\varphi(x,p),\ y'=p.$$

Подставляя это в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp=pdx. \tag{9.6}$$

Допустим, что мы нашли его общее решение $p=p(x,C)$. Тогда, подставив его в первое уравнение, получаем общее решение

$$y=\varphi(x,\ p(x,C)).$$

Если мы нашли общее решение уравнения (9.6) в виде $x = x(p, C)$, то, подставив его в первое уравнение, получаем общее решение в параметрической форме:

$$x = x(p, C), \quad y = \varphi(x(p, C), p).$$

Если уравнение (9.6) имеет особое решение $p = p(x)$, то $y = \varphi(x, p(x))$ может быть особым решением уравнения (9.1).

II случай. Пусть уравнение (9.1) удалось разрешить относительно x:

$$x = \varphi(y, y'). \tag{9.7}$$

Тогда параметрическое представление выглядит так:

$$x = \varphi(y, p),\ y' = p.$$

Подставляя это в основное соотношение, получаем:

$$dy = p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right). \tag{9.8}$$

Допустим, что мы нашли общее решение этого уравнения: $p = p(y, C)$. Тогда, подставив его в первое уравнение , получаем общее решение

$$x = \varphi(y, p(y, C)).$$

Если мы нашли общее решение уравнения (9.8) в виде $y = y(p, C)$, то, подставив его в первое уравнение, получаем общее решение в параметрической форме:

$$x = \varphi(y(p, C), p), \quad y = y(p, C).$$

Если уравнение (9.8) имеет особое решение $p = p(y)$, то $x = \varphi(y, p(y))$ может быть особым решением уравнения (9.7).

Частные случаи. 1. Рассмотрим уравнение вида

$$F(y') = 0. \tag{9.9}$$

Пусть $y' = a_k,\ k = 1, 2, \ldots$ есть действительные решения уравнения (9.9), тогда находим решения $y = a_k x + C \Rightarrow a_k = \dfrac{y - C}{x}$. Подставляем в (9.9) и получаем общий интеграл

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

2. Рассмотрим уравнение, ***не содержащее искомой функции***:

$$F(x, y') = 0. \tag{9.10}$$

Если оно оказывается разрешимым в элементарных функциях относительно y', т.е $y' = f_k(x)$, $k=1,2\ldots$, то мы можем выписать решения в явном виде:

$$y = \int f_k(x)dx + C, \ k=1,2\ldots.$$

Кроме этого, могут существовать решения вида $x=a$, которые могут оказаться особыми.

Если уравнение (9.10) неразрешимо относительно y', то можно попытаться подобрать такие функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, что $F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$x = \varphi(t), \ y' = \psi(t). \qquad (9.11)$$

(9.11) это параметрическое представление уравнения (9.10).

Допустим, что уравнение допускает параметрическое представление. Тогда мы можем найти $dx = \varphi'(t)dt$ и подставить это в основное дифференциальное тождество $dy = y'dx$:

$$dy = \psi(t)\,\varphi'(t)dt.$$

Отсюда получаем $y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C$. Теперь записываем уравнение интегральных кривых в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

3. Рассмотрим теперь уравнение, ***не содержащее независимой переменной:***

$$F(y,y') = 0. \qquad (9.12)$$

Предположим, что это уравнение разрешимо относительно y': $y' = f_k(y)$, $k=1,2\ldots$. Тогда оно имеет общий интеграл

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C, \ k=1,2\ldots.$$

Если имеет место равенство $F(a,0) = 0$, то уравнение имеет решение $y = a$, которое может оказаться особым.

Если не удаётся разрешить (9.12) относительно y', то можно попытаться найти параметрическое представление $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$.

Подставим это в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$:

$$\varphi'(t)dt = \psi(t)dx \ \Leftrightarrow \ \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}.$$

Отсюда получаем общий интеграл в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общий интеграл уравнения

$$y'^2 - \left(2x + \frac{1}{y}\right)y' + \frac{2x}{y} = 0.$$

Решение. Это уравнение вида (9.2). Разрешив его относительно y', получаем:

$$y' = 2x \text{ или } y' = \frac{1}{y}.$$

Отсюда находим два общих интеграла

$$y - x^2 = C,\ x - \frac{y^2}{2} = C.$$

Их можно записать вместе с помощью одного уравнения:

$$(y - x^2 - C)\left(x - \frac{y^2}{2} - C\right) = 0.$$

Область определения уравнения: $\left(2x - \frac{1}{y}\right)^2 \geq 0, y \neq 0$. Первое неравенство выполнено всегда. Дискриминантная кривая (гипербола) имеет уравнение

$$2x - \frac{1}{y} = 0 \iff y = \frac{1}{2x}.$$

На рисунке 2 изображены два семейства решений. Выделены точки дискриминантной линии.

В этих точках уравнение определяет только одно направление, но через них проходит по два решения. Дискриминантная кривая не является решением уравнения.

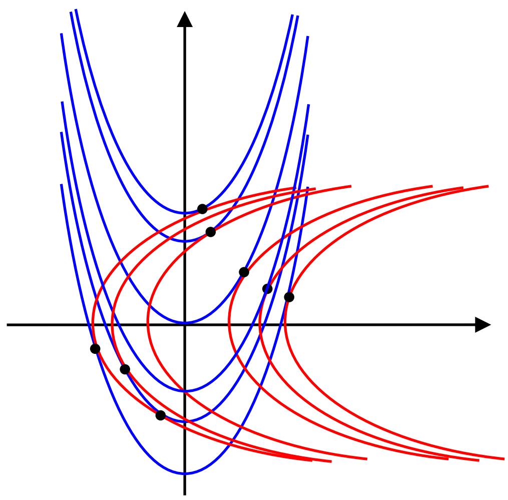

рис. 2.

***Пример* 2.** Найти общий интеграл уравнения

$$y'^2 - 2y' + 1 - y + x = 0.$$

Решение. Поскольку уравнение можно переписать как

$$(y' - 1)^2 = y - x,$$

то область определения уравнения задается неравенством $y - x \geq 0$. Эта область изображена на рисунке 3. Разрешив данное уравнение относительно y', получаем:

$$y' = 1 + \sqrt{y-x} \quad \text{или} \quad y' = 1 - \sqrt{y-x}\,.$$

Подстановкой можно убедиться, что имеем два семейства интегральных кривых:

$$y = x + \frac{(x+C)^2}{4} \ (x \geq -C), \quad y = x + \frac{(x+C)^2}{4} \ (x \leq -C).$$

Каждое из решений представляет собой ветвь параболы. По одной кривой из каждого семейства сливаются вместе в одну кривую. Дискриминантная кривая $y = x$ является особым решением (рисунок 4). Действительно, подстановка в уравнение даёт тождество, и уравнения при $y = x$ определяют только одно направление $y' = 1$.

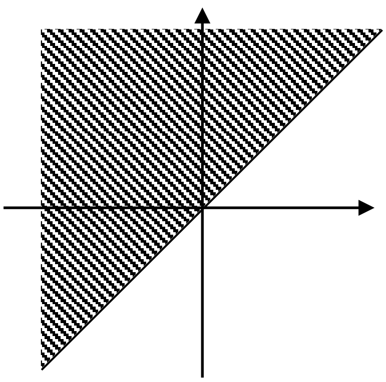

рис. 3

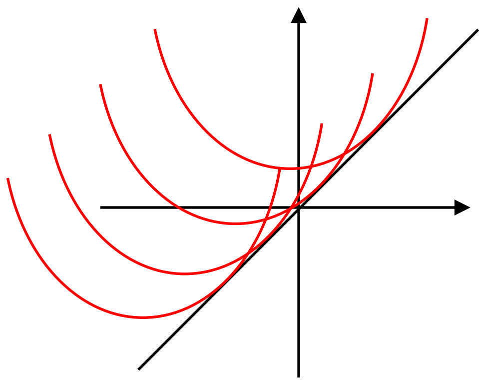

рис. 4

***Пример* 3.** Найти общий интеграл уравнения

$$y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0\,.$$

Это уравнение вида (9.9). Мы сразу можем выписать общий интеграл:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 - \frac{y-C}{x} + 1 = 0\,.$$

***Пример* 4.** Найти решение уравнения

$$y'^2 + x^2 - 4 = 0\,.$$

Решение. Очевидно, подстановка $x = 2\cos t$, $y' = 2\sin t$ обращает данное уравнение в тождество. По основному дифференциальному тождеству

$$dy = -4\sin^2 t\, dt,$$

$$y = -4\int \sin^2 t\, dt = -4\int \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = -2t + \sin 2t + C.$$

Общее решение: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = -2t + \sin 2t + C. \end{cases}$

Пример **5.** Найти решение уравнения

$$y = \sqrt{y'^2 + 1}\ .$$

Решение. Очевидно, подстановка $y = \operatorname{ch} t$, $y' = \operatorname{sh} t$ обращает данное уравнение в тождество. Тогда $\operatorname{sh} t\, dt = \operatorname{sh} t\, dx \Rightarrow dx/dt = 1$. Получаем общее решение

$$\begin{cases} x = t + C, \\ y = \operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Выразим t из первого уравнения и подставим во второе: $y = \operatorname{ch}(x - C)$. Получаем семейство равных друг другу интегральных кривых, получающихся из одной $y = \operatorname{ch} x$ сдвигом (рисунок 5). Напомним, что график гиперболического косинуса является цепной линией. Кроме этого, уравнению удовлетворяет $y' = 0$, $y = 1$. Это есть особое решение.

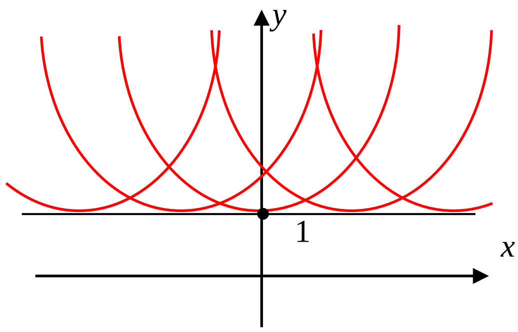

рис. 5

3. Задания для практических занятий

Разрешив уравнения относительно y', построить полные решения.

9.1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.

9.2. $y'^3 + (x+2)e^y = 0$.

9.3. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.

9.4. $y'^3 - \dfrac{1}{4x} y' = 0$

9.5. $y'^2 - 4y = 0$.

9.6. $y'^2 - x^2 y^2 = 0$.

9.7. $y'^2 - \dfrac{xy}{a^2} = 0$.

9.8. $y'^4 - 2y^2 y'^2 = -y^4$.

Путем введения параметра построить полное решение следующих уравнений.

9.9. $y = y'^2 e^{y'}$.

9.10. $y'^2 + (x+a)y' - y = 0$.

9.11. $y' \sin y' + \cos y' - y = 0$.

9.12. $y'^4 - 5y'^2 + 2y' = 0$.

9.13. $\ln y' + \sin y' - x = 0$.

9.14. $y' \sin y' + \cos y' - 5 = 0$.

9.15. $y' - \sin y' = 0$.

9.16. $xy'^2 = 1 + y'$.

9.17. $y' \ln y' - x = 0$.

9. 18. $y = y'^2 + 2y'^3 = 0$.

9.19. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$.

9.20. $y = xy'/2 + y'^2 / x^2$.

9.21. $y'^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

9.22. $x = (y / y')\ln y - y'^2 / y^2$.

10. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

1. Основные теоретические сведения

Уравнение вида

$$y = \varphi(y')\, x + \psi(y') \qquad (10.1)$$

называется *уравнением Лагранжа*. Рассматриваем случай, когда $\varphi(y')$ не равно тождественно y'. Параметрическое представление уравнения имеет вид:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p), \quad y' = p.$$

Подставив это в основное дифференциальное тождество $dy = y'dx$, получим линейное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$.

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Решив его, найдем общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде.

Если уравнение $\varphi(p) - p = 0$ имеет действительные корни $p_1, \ldots, p_k$, то подставляя их в первое из записанных уравнений и принимая во внимание, что $\varphi(p) - p = 0$, получаем уравнения прямых

$$y = p_i x + \psi(p_i),\ i = 1, \ldots, k.$$

Эти прямые всегда являются решениями уравнения Лагранжа. Также они могут быть особыми решениями.

Уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y'). \qquad (10.2)$$

называется *уравнением Клеро*.

Его интегрируют по той же схеме, что и уравнение Лагранжа:

$$y = xp + \psi(p), \quad y' = p.$$

В результате общее решение получаем в виде

$$y = xC + \psi(C). \qquad (10.3)$$

Особое решение найдем как дискриминантную кривую для семейства прямых (10.3):

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ 0 = x + \psi'(C). \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x = -\psi'(C)$, и подставляя в первое получаем $y = -\psi'(C)C + \psi(C)$.

Итак, общее решение уравнения Клеро получается заменой в последнем y' на C, а особое решение ищется как огибающая семейства прямых, составляющих общее решение.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение и особые решения уравнения

$$y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3.$$

Решение. Параметризация уравнения:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3, \quad y' = p. \tag{10.4}$$

Подставляем её в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$:

$$dx + \left(-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2\right)dp = p\,dx \iff -\frac{8}{9}p(1-p)\,dp = (p-1)\,dx \iff$$

$$(1-p)dx - \frac{8}{9}p(1-p)\,dp = 0 \iff (1-p)\left(dx - \frac{8}{9}p\,dp\right).$$

Уравнение распадается на два уравнения:

$$dx - \frac{8}{9}pdp = 0 \text{ или } 1 - p = 0. \tag{10.5}$$

Из первого уравнения находим $x = \frac{4}{9}p^2 + C$. Подставляем это в первое из уравнений (10.4) и получаем общее решение в параметрической форме: $x = \frac{4}{9}p^2 + C$, $y = \frac{8}{27}p^3 + C$.

Исключая параметр p, получаем общий интеграл

$$(y-C)^2 = (x-C)^3.$$

Второе из уравнений (10.5) даёт $p = 1$, $y = x - \frac{4}{27}$. Это будет особое решение.

***Пример* 2.** Найти общее решение и особые решения уравнения

$$y'^2 - xy' + y = 0.$$

Решение. Это уравнение является квадратным относительно y', и одновременно это есть уравнение Клеро. Перепишем его так:

$$y = xy' - y'^2.$$

Общее решение:

$$y = Cx - C^2. \tag{10.6}$$

Найдём дискриминантную кривую для семейства прямых (10.6):

$$\begin{cases} y = Cx - C^2, \\ 0 = x - 2C. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2C$, $y = C^2$. Исключая C, получаем уравнение в явном виде: $y = \frac{1}{4}x^2$. Для исходного уравнения $\psi(p) = -p^2$, $\psi''(p) = -2$ не меняет знак. Поэтому дискриминантная кривая является огибающей.

3. Задания для практических занятий

Проинтегрировать следующие уравнения.

10.1. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

10.2. $y = x(y' - tgy') + \dfrac{1}{\cos y'}$.

10.3. $y = xy'(1 - \ln y') + \ln\ln y'$.

10.4. $y = x(y' - e^{-y'}) + y'^2 e^{e^{y'}}$.

10.5. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

10.6. $x = y / y' + 1 / y'^2$.

10.7. $y = 2xy' + \sin y'$.

10.8. $y = xy' + y'^2$.

10.9. $y = xy'^2 + y'^2$.

10.10. $y = xy' + a / y'^2$.

10.11. $y = xy' + y' - y'^2$.

10.12. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

10.13. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

10.14. $y = x(1 + y') + y'^2$.

10.15. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, составляющие в сумме $2a$.

10.16. Найти кривую, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Основные теоретические сведения

I. Простейшие дифференциальные уравнения

Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} = f(x).$$

Его общее решение можно найти последовательным интегрированием

$$y = \underbrace{\int\Bigl(\int\Bigl(\int \ldots \Bigl(\int f(x)dx\Bigr) \ldots dx\Bigr) dx\Bigr) dx}_{n} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, x + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-1)!} + \ldots + C_n.$$

II. Дифференциальные уравнения, которые не содержат в явном виде искомую функцию и ее производные до порядка $k-1$ включительно.

Такие уравнения имеют вид

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Обозначим $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Мы получаем дифференциальное уравнение $(n-k)$-го порядка

$$F(x, z, \ldots, z^{(n-k)}) = 0\,.$$

Если уравнение первоначальное уравнение было уравнением 2-ого порядка, то сделав указанную замену, мы придем к уравнению первого порядка.

III. Дифференциальные уравнения, которые не содержат в явном виде переменную x.

Такие уравнения имеют вид $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. В этом случае порядок уравнения можно понизить на единицу подстановкой $y' = z(y)$. Получается, что z – это сложная функция и по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = (y')' = z'_x = z'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z\,,$$

$$y''' = (y'')' = (z'_y \cdot z)'_x = (z'_y \cdot z)'_y \cdot y'_x = z''_{yy} \cdot z^2 + (z'_y)^2 \cdot z\,.$$

Аналогичные выражения получаем для производных более высокого порядка.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Решение. $y' = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_1,$

$$y = \int (-\cos x + C_1)\, dx = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Мы нашли общее решение. Подставляем теперь в него начальные данные.

$$0 = -\sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \qquad 1 = -\cos 0 + C_1.$$

Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2, из неё находим $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Подставляем эти значения в общее решение, получим частное решение $y = -\sin x + 2x$.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{y'}{x+4}.$$

Решение. Это уравнение в явном виде не содержит искомую функцию $y=y(x)$. Обозначаем $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение

$$z' = \frac{z}{x+4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x+4}.$$

Решаем его:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x+4}, \qquad \ln|z| = \ln|x+4| + C_0.$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\ln|x+4| + C_0}, \qquad |z| = |x+4| \cdot e^{C_0}, \qquad z = \pm e^{C_0}(x+4).$$

Мы можем обозначить $\pm e^{C_0}$, как новую постоянную C_1 ($C_1 \neq 0$). Итак,

$$z = C_1(x+4).$$

Теперь решаем уравнение

$$y' = C_1(x+4).$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x+4), \qquad dy = C_1(x+4)dx, \qquad y = C_1\int (x+4)dx,$$

$$y = C_1 \frac{(x+4)^2}{2} + C_2.$$

Величина $C_1/2$ – это тоже постоянная величина, которую снова можно обозначить как C_1. Заметим, что при делении на z мы теряем решение $y=C$, которое можно включить в формулу общего решения при $C_1=0$.

Общее решение имеет вид $y = C_1(x+4)^2 + C_2$.

***Пример* 3.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Решение. Это уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной. Порядок уравнения можно понизить, сделав замену $p = y'$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'p$ и получим уравнение

$$2yp'p + p^2 + p^4 = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его

$$\frac{2pdp}{p^2 + p^4} + \frac{dy}{y} = 0. \ (y{=}0;\ p{=}0?).$$

$$\int \frac{2pdp}{p^2 + p^4} + \int \frac{dy}{y} = C; \qquad \ln \frac{p^2}{p^2 + 2} + \ln|y| = C;$$

$$\frac{p^{2|}|y|}{p^2 + 1} = e^c; \qquad \frac{p^2}{p^2 + 1} = C_2 y; \qquad (C_1 = \pm\frac{1}{e^c}); \qquad p = \pm\frac{1}{\sqrt{c_1 y - 1}}.$$

Согласно произведенной замене

$$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{c_1 y - 1}}; \qquad \pm\sqrt{c_1 y - 1}\ dy = dx; \qquad -\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 y - 1)^3} = x + C_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем C_1 и C_2. Так как $y(0) = 1$, то $\pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 - 1)^3} = C_2$. Далее, $y'(0) = 2,$ тогда $2 = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}}$, $C_1 = \frac{5}{4}$.

Подставляя $C_1 = \frac{5}{4}$, имеем $C_2 = \frac{1}{15}$. Поэтому $y = \frac{1}{15}(15x + 1)^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{5}$ – искомое решение.

Потерянные решения $y = 0$, а также $p = 0$ или $y = C$ не удовлетворяют начальным условиям.

3. Задания для практических занятий

Проинтегрировать уравнения или найти частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям или граничным условиям.

11.1. $y'' = x + 2$.

11.2. $y'' = \sin x$.

11.3. $y'' = 2;\ y(-1) = 0;\ y(1) = 0.$

11.4. $y'' = -6x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0.$

11.5. $y''' = e^{-x};\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 0.$

11.6. $y'' = 1;\ y(1) = 0;\ y(2) = 1.$

11.7. $xy^V - y^{IV} = 0$.

11.8. $y^{IV} = \frac{y'''}{x}$.

11.9. $(1 + x)y'' + y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

11.10. $y'' = 8y^3$.

11.11. $(x^2 y'' = (y')^2$.

11.12. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

11.13. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

11.14. $y''' = (y'')^2$.

11.15. $(y'')^3 + xy'' = 2y'$.

11.16. $x^2 y'' + xy' = 1$

11.17. $y'' = 32y^3;\ y(4) = 1;\ y'(4) = 4$

11.18. $y''' ctg 2x + 2y'' = 0$.

11.19. $y''y^3 + 64 = 0$; $y(0) = 4; y'(0) = 2$.

11.20. $\mathrm{tg}x \cdot y''' = 2y''$.

11.21. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.

11.22. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x.$

11.23. $y'' = 32y^3;\ y(1) = 1;\ y'(1) = 4.$

11.24. $x^3 y'' + x^2 y'' = 1$.

11.25. $4y^2 y'' = y^4 - 1;\quad y(0) = \sqrt{2};\ \ y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

11.26. $y'' = 128y^3;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 2.$

11.27. $y'' = 32\sin^3 y \cos y;\quad y(1) = \dfrac{\pi}{2};\quad y'(1) = 4.$

11.28. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1;\ y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

11.29. $y''y^3 + 49 = 0;\ y(3) = -7; y(1) = 1;\quad y'(3) = -1.$

12. УРАВНЕНИЕ $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$, ЛЕВАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО $y, y',\dots,y^{(n)}$. УРАВНЕНИЕ, ЛЕВАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ ТОЧНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Основные теоретические сведения

1. Если дано уравнение, левая часть которого является однородной функцией относительно $y, y',\dots,y^{(n)}$, то в этом случае левая часть уравнения удовлетворяет условию

$$F(x,ty,ty',\dots,ty^{(n)}) = t^m F(x,y,y',\dots,y^{(n)}).$$

Уравнение допускает понижение порядка на единицу при применении подстановки $y' = yz$, где $z = z(x)$ есть новая неизвестная функция. Тогда получаем

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = y'(z^2+z') + y(2zz'+z'') = yz(z^2+z') + y(2zz'+z'') = y(z''+3zz'+z^3)$$

и т.д. Подставляя в уравнение и вынося за счет однородности за скобки множитель y^m, получаем уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения.

2. Пусть дано уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Если окажется, что

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

то в этом случае каждое решение этого уравнения является решением уравнения

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C$$

и, наоборот. Тем самым порядок уравнения понижается на единицу.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения $yy'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Проверим уравнение на однородность. Подставим вместо y, y', y'' соответственно ty, ty', ty''. Получаем $tyty'' - (ty')^2 = 0$ или $t^2(yy'' - (y')^2) = 0$. Значит, левая часть является однородной функцией. Совершаем подстановку $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$:

$$y^2(z^2+z') - y^2z^2 = 0.$$

Отсюда $y = 0$ или $z' = 0$.

Второй случай даёт $z = C_1 \Rightarrow y' = C_1 y \Rightarrow y = C_2e^{C_1x}$. Это решение включает в себя также и случай $y = 0$.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_2e^{C_1x}$.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$.

Решение. Очевидно, что $yy'' + (y')^2 = (yy')'$. Тогда $yy' = C_1$ и это уравнение можно записать в виде $ydy = C_1dx$. Общим интегралом является $y^2 = C_1x + C_2$.

Замечание. Иногда левая часть уравнения становится точной производной некоторого дифференциального выражения только после умножения на некоторый множитель $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. При этом могут как появиться лишние решения, обращающие этот множитель в ноль, так и возможна потеря решений, если этот множитель разрывен.

***Пример* 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения $yy'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Умножим обе части на $\mu = \frac{1}{y^2}$. Получим

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0.$$

Следовательно, $\frac{y'}{y} = C_1$ или $\frac{dy}{y} = C_1 dx$. После интегрирования имеем

$$\ln|y| = C_1 x + C_2,\ C_2 \neq 0.$$

Выражаем y: $y = C_2 e^{C_1 x}$, $C_2 \neq 0$.

При умножении на $\mu = \frac{1}{y^2}$ было потеряно решение $y = 0$. Его можно включить в полученное решение, если считать, что может быть $C_2 = 0$. Таким образом, общее решение уравнения: $y = C_2 e^{C_1 x}$.

3. Задания для практических занятий

Понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения.

12.1. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

12.2. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.

12.3. $x^2 yy'' + y'^2 = 0$.

12.4. $4(x + \sqrt[4]{x^3})(yy'' - y'^2) = yy'$.

12.5. $(x^2 + 1)(yy'' - y'^2) + 2xyy' = 0$.

12.6. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

12.7. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

12.8. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

12.9. $\sin x \cos x (yy'' - y'^2) = 2yy'$.

12.10. $yy'' = y'^2 + yy' + y^2 e^x$.

Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

12.11. $y'' = \frac{y}{\sin^2 x} - y' ctgx + \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$.

12.12. $y'y''' = 2y''^2$.

12.13. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = e^x(1 + x)$.

12.14. $xy'' = 2yy' - y'$.

12.15. $y'' = 2(\frac{y}{\sin^2 x} - y'\text{ctg}x) + \cos x$.

12.16. $yy'' + y'^2 = 1$.

12.17. $y'' = \frac{2(y - xy')}{x^2} + shx$

12.18. $yy''' + 3y'y'' = 0$

13. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИЮ

1. Основные теоретические сведения

Иногда бывает удобно перейти к параметрическому представлению уравнения и найти решение в параметрическом виде.

Случай **1.** Пусть уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{13.1}$$

неразрешимо относительно $y^{(n)}$. Предположим, что оно допускает *параметрическое представление* $x=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ таковы, что $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Так как

$$d\,y^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Поступая аналогично, находим $y^{(n-2)},\ldots,y'$ и $y = \psi_1(t, C_1,\ldots,C_n)$. *Общее решение* уравнения (13.1) в параметрической форме имеет вид

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi_1(t, C_1,\ldots,C_n).$$

Параметрическое представление уравнения (13.1) легко получить в случае, когда уравнение разрешимо относительно x, т.е. представимо в виде $x=\varphi(y^{(n)})$. В этом случае можно за параметр t взять $y^{(n)}$. Получаем представление $x=\varphi(t)$, $y^{(n)}=t$.

Случай **2.** Уравнение вида $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$. Если данное уравнение неразрешимо относительно $y^{(n)}$, то оно может допускать параметрическое представление $y^{(n)}= \varphi(t)$, $y^{(n-1)}= \psi(t)$, при этом $F(\varphi(t), \psi(t))\equiv 0$. Используем соотношение $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$. Тогда $dx=\dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$ и $x=\displaystyle\int\frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}+C_1$.

Далее находим последовательно:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)}, \quad y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx, \ldots, \; dy = y'dx,$$

$$y = \int y'dx + C_n.$$

Случай **3.** Уравнение вида $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$. Если данное уравнение неразрешимо относительно $y^{(n)}$, то оно может допускать параметрическое представление $y^{(n)}= \varphi(t)$, $y^{(n-2)}= \psi(t)$, при этом $F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$. Используем соотношения $d\,y^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, $d\,y^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx$. Исключая dx, получаем уравнение $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$, или, в силу параметрического представления, $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt$. Отсюда интегрированием находим $y^{(n-1)}$. Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к случаю 2.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения $\sin y'' + y'' = x$.

Решение. Положим $y'' = t$, тогда получим $\sin t + t = x$. Выразим y через параметр t. Имеем $dy' = y''dx = t(\cos t + 1)dt$. Отсюда

$$y' = \int t(\cos t + 1)dt + C_1 = t\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1,$$

$$y = \int\left(t\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} + C_1\right)dt + C_2 = -t\cos t + 2\sin t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$x = \sin t + t,\ y = -t\cos t + 2\sin t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2.$$

3. Задания для практических занятий

Проинтегрировать уравнения.

13.1. $x - \sin y'' + 2y'' = 0$.

13.2. $y'''y'' = \sqrt{1 + y''^2}$.

13.3. $x = e^{-y''} + y''$.

13.4. $x = \sqrt{y''} + y''^5$.

13.5. $x = \dfrac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}}$.

13.6. $x = y''\cos y'' - \sin y''$.

13.7. $y''^2 - 2y'' - x = 0$.

13.8. $x = e^{y''}(y'' - 1)$.

13.9. $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$.

13.10. $x = y''^3 + \ln y''$.

14. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Основные теоретические сведения

Линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = 0, \qquad (14.1)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – заданные действительные числа.

Решение этого уравнения будем искать в виде $y=e^{\lambda x}$, где λ – произвольное постоянное число (может быть, комплексное). Тогда $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x},\ldots,\quad y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$. Сделаем подстановку в (14.1) и вынесем общий множитель $e^{\lambda x}$ за скобки:

$$L(e^{\lambda x})=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\lambda x}P(\lambda)=0,$$

где $P(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n$.

Поскольку $e^{\lambda x}>0$, то должно выполняться

$$P(\lambda)=0. \qquad (14.2)$$

Таким образом, функция $y=e^{\lambda x}$ будет решением уравнения (14.1), тогда и только тогда, когда число λ является корнем алгебраического уравнения (14.2). Оно называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (14.1), а его корни называются *характеристическими числами*.

I ***случай***. Пусть все корни уравнения (14.2) действительные и различные: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$. Тогда мы имеем n решений уравнения (14.1)

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n=e^{\lambda_n x}.$$

Эти решения определены на всей числовой прямой и линейно независимы. Поэтому эти решения образуют *фундаментальную систему решений* для уравнения (14.1). Их сумма с произвольными постоянными коэффициентами даёт общее решение:

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\ldots+C_ne^{\lambda_n x}.$$

II ***случай***. Пусть все корни уравнения (14.2) различны, но среди них есть комплексные. Напомним, что если коэффициенты уравнения действительные числа, то в этом случае все комплексные корни являются парными: если $\lambda_1=\alpha+\beta i$ является решением, то и $\lambda_2=\alpha-\beta i$ тоже является решением уравнения. В формуле общего решения каждой паре сопряженных комплексных корней будет соответствовать слагаемое вида

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

III ***случай***. Пусть среди корней уравнения (14.2) есть кратные и пусть корень λ_1 действительный и имеет кратность k. Можно доказать, что в этом случае функции

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=xe^{\lambda_1 x},\ y_3=x^2e^{\lambda_1 x},\ldots,\ y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$$

являются решениями уравнения и эти функции линейно независимы. Поэтому корню λ_1 в формуле общего решения соответствует их линейная комбинация, т.е. группа слагаемых вида:

$$C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 x\, e^{\lambda_2 x}+C_3 x^2 e^{\lambda_2 x}+\ldots+C_k x^{k-1}e^{\lambda_1 x}=$$
$$=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1}).$$

IV *случай.* Если корень $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ комплексный кратности k, то корнем уравнения с действительными коэффициентами будет и число $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, причем его кратность тоже будет равна k. Этой паре комплексно сопряжённых корней кратности k будут соответствовать $2k$ действительных частных решения, которые получаются, как и в **случае II**, разделением действительных и мнимых частей:

$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\cdot\cos\beta x, \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\ , \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$$

В формуле общего решения будет группа слагаемых вида:

$$e^{\alpha x}((C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})\ \cos\beta x + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{2k} x^{k-1})\sin\beta x).$$

После того, как мы нашли решения, которые соответствуют различным (не кратным) действительным и комплексным корням, кратным действительным и комплексным корням, мы берём сумму всех этих решений с произвольными коэффициентами и получаем общее решение однородного линейного уравнения (14.1).

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{\mathrm{IV}} - 16y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\lambda^4 - 16 = 0;\quad (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda^2+4) = 0;$$
$$\lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = -2\,,\ \lambda_3 = 2i\,,\ \lambda_4 = -2i\,.$$

Корни характеристического уравнения простые. Значит, фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{-2x},\ y_3 = e^{0\cdot x}\cos 2x = \cos 2x,\ \ y_4 = e^{0\cdot x}\sin 2x = \sin 2x$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y_{00} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\,.$$

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$. Дискриминант $D = 2^2 - 4\cdot 5 = -16$, $\sqrt{D} = \pm 4i$, корни: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Общее решение уравнения: $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

***Пример* 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-6y'+9y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2-6\lambda+9=0$. Дискриминант $D=0$, корни: $\lambda_1=\lambda_2=3$.

Общее решение уравнения: $y=e^{3x}(C_1x+C_2)$.

3. Задания для практических занятий

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

14.1. $y''-4y'+5y=0$.

14.2. $y'''-5y''+8y'-4y=0$.

14.3. $y^{V}-2y^{IV}+2y'''-4y''+y'-2y=0$.

14.4. $y''-2y'+3y=0$.

14.5. $y'''+2y''+y'=0$.

14.6. $y'''+6y''+9y'=0$.

14.7. $y''+3y'+5y=0$.

14.8. $y'''-2y''-3y'=0$.

14.9. $y'''-2y''-3y'=0$.

14.10. $y'''+5y''+7y'+3y=0$.

14.11. $y'''+y''-6y'=0$.

14.12. $y^{IV}-6y'''+9y''=0$.

14.13. $y^{IV}+2y'''-2y'-y=0$.

14.14. $y'''+3y''+2y'=0$.

14.15. $y^{IV}-6y'''+9y''=0$.

14.16. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=0$.

14.17. $y'''+4y''+3y'=0$.

14.18. $y^{IV}+2y'''+y''=0$.

14.19. $y^{IV}+2y'''+y''=0$.

14. 20. $y'''-13y''-12y'=0$.

14.21. $y^{V}+y^{IV}=0$.

14. 22. $y^{V}+2y'''+y''=0$.

14.23. $3y^{IV}+y'''=0.14$.

14.24. $y''-6y'+18y=0$.

15. МЕТОД ЛАГРАНЖА (ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ) НАХОЖДЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Основные теоретические сведения

Неоднородное линейное уравнение имеет вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x). \quad (15.1)$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения используют метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). В общем решении однородного уравнения заменяют произвольные постоянные на функции зависящие от x, и ищут решение уравнения (15.1) в виде

$$\overline{y}(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x),$$

где y_1, $y_2, \ldots$, y_n есть фундаментальная система решений однородного уравнения.

Для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ записываем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \ldots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots, \ C_n'(x) = \varphi_n(x).$$

Отсюда находим

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1^*, C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + C_2^*, \ldots, C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + C_n^*.$$

Если подставить эти функции в формулу общего решения, то мы получим общее решение $\overline{y}(x)$ уравнения (15.1).

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$; $\quad y(0) = 1$; $\ y'(0) = 2$.

Решение. Вначале найдем общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Соответствующее ему характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет один корень $\lambda = 1$ кратности 2. Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$y_{00} = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа):

$$y_{чн} = (C_1(x) + C_1(x)x)e^x.$$

Составляем систему для нахождения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} \end{cases}$$

Сократив уравнения на e^x, получаем

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)=0; \\ C_1'(x)+C_2'(x)(1+x)=\dfrac{1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Определитель (вронскиан) последней системы: $W=\begin{vmatrix}1 & x \\ 1 & 1+x\end{vmatrix}=1.$

По формулам Крамера находим

$$C_1'(x)=\frac{1}{W}\begin{vmatrix}0 & x \\ \dfrac{1}{x^2+1} & 1+x\end{vmatrix}=-\frac{x}{x^2+1}\quad;$$

$$C_2'(x)=\frac{1}{W}\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{x^2+1}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^2+1}\quad.$$

Проинтегрируем полученные уравнения:

$$C_1'(x)=-\int\frac{xdx}{x^2+1}=\text{-}\ln\sqrt{x^2+1}+\mathrm{C}_1;$$

$$C_2'(x)=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+\mathrm{C}_2.$$

Следовательно, $y_{чн}=(x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{x^2+1})e^x$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}=e^x(C_1+C_2x+x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{x^2+1}).$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1;\ y'(0)=2$. Вычислим $y'_{он}$:

$$y'_{он}(0)=e^x(C_1+C_2x+C_2+x\cdot\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{x^2+1}).$$

Подставляя значение $x=0$ в выражения для $y_{он}$ и $y'_{он}$, с учетом начальных условий получаем:

$$y_{он}(0)=1=C_1;\ \ y'_{он}(0)=2=C_1+C_2;\quad C_1=1;\quad C_2=1.$$

Следовательно, искомое частное решение:

$$y=e^x(1+x+x\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{x^2+1}).$$

3. Задания для практических занятий

Найти частное решение дифференциального уравнения.

15.1. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$; $\qquad y(0)=1;\ y'(0)=1.$

15.2. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

15.3. $y'' - y' = e^{3x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.

15.4. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.

15.5. $y'' + y = \dfrac{1}{2tgx}$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y'(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.

15.6. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$.

15.7. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; $y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$; $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 1$.

15.8. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+2}$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$.

15.9. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^2 x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

15.10. $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^x}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 3$.

15.11. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$; $y(0) = 4\ln 4$; $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

15.12. $y'' + y = 4ctgx$; $y(\dfrac{\pi}{2}) = 4$; $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 4$.

15.13. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2-e^{-2x}}$; $y(0) = 1 + 3\ln 3$; $y(0) = 10\ln 3$.

15.14. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

15.15. $y'' + 9 = \dfrac{9}{\sin 3x}$; $y(\dfrac{\pi}{6}) = 4$; $y'(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{3\pi}{2}$.

15.16. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

15.17. $y'' + 4y = 4ctg2x$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = 3$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = 32$.

15.18. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$; $y(0) = \ln 27$; $y'(0) = \ln 9 - 1$.

15.19. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

15.20. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$; $y(\dfrac{\pi}{8}) = 3$; $y'(\dfrac{\pi}{8}) = 2\pi$.

15.21. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}ctg\dfrac{x}{2}$; $y(\pi) = 2$; $y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$.

15.22. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 0$.

15.23. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$; $y(0) = \ln 4$; $y'(0) = \ln 4 - 2$.

15.24. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2+e^{-x}}$; $y(0) = 1 + 3\ln 3$; $y'(0) = 5\ln 3$.

16. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НАХОЖДЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \qquad (16.1)$$

и совместно с ним однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (16.2)$$

При решении линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях легко можно подобрать частное решение и задача сводится к интегрированию однородного уравнения. Это всегда можно сделать, когда правая часть представляет из себя квазиполином вида

$$e^{ax}[R_m(x)\cos bx + R_s(x)\sin bx],$$

где $R_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0$ – многочлен m-ой степени, а $R_s(x)$ − многочлен s-ой степени. Рассмотрим различные частные случаи квазиполинома.

1 *случай*. Пусть правая часть уравнения (16.1) есть многочлен m−ой степени: $f(x) = R_m(x)$.

1 *а*) Пусть число $\nu = 0$ не является корнем характеристического многочлена. Тогда ищем частное решение $y_{чн}$ в виде

$$y_{чн} = Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами: $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$. Для того, чтобы найти его коэффициенты, мы подставляем это решение в уравнение (16.1) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получившегося равенства.

1 *б*) Пусть число $\nu = 0$ является корнем характеристического многочлена кратности k. Тогда ищем частное решение $y_{чн}$ в виде

$$y_{чн} = x^k Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

2 *случай*. Пусть правая часть уравнения (16.1) есть произведение многочлена на показательную функцию: $f(x)=R_m(x)e^{ax}$, где степень многочлена $R_m(x)$ равна m.

2 *а*) Пусть число $\nu=a$ не является корнем характеристического многочлена. Тогда ищем частное решение $y_{чн}$ в виде

$$y_{чн}=Q_m(x)e^{ax},$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

2 *б*) Пусть число $\nu=a$ является корнем характеристического многочлена кратности k. Тогда ищем частное решение $y_{чн}$ в виде

$$y_{чн}=x^k Q_m(x)e^{ax},$$

где $Q_m(x)$ есть многочлен степени m с неопределенными коэффициентами.

3 *случай*. Пусть правая часть уравнения (16.1) имеет вид:

$$f(x)=e^{ax}R_m(x)\cos bx \quad \text{или} \quad f(x)=e^{ax}R_m(x)\sin bx,$$

где $R_m(x)$ – многочлен, старшая степень которого равна m, а a и b – действительные числа.

3 *а*) Если число $\nu=a+bi$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y_{чн}=e^{ax}[Q_m(x)\cos bx+P_m(x)\sin bx],$$

где $Q_m(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами. Для того чтобы найти коэффициенты, мы подставляем решение в уравнение (16.1) и приравниваем коэффициенты при $\cos bx$ и при $\sin bx$. Получим равенство двух многочленов, а затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x.

3 *б*) Если число $\nu=a+bi$ является корнем характеристического многочлена кратности k, то частное решение ищем в виде

$$y_{чн}=x^k e^{ax}[Q_m(x)\cos bx+P_m(x)\sin bx],$$

где $Q_m(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами.

4 *случай*. Пусть правая часть уравнения (16.1) имеет вид:

$$f(x)=e^{ax}[R_m(x)\cos bx+T_p(x)\sin bx],$$

где $R_m(x)$ и $T_p(x)$ – многочлены, старшая степень которых равна m и p соответственно, а a и b – действительные числа.

4 а). Если число $\nu=a+bi$ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение ищем в виде

$$y_{чн}=e^{ax}[Q_s(x)\cos bx+P_s(x)\sin bx],$$

где $Q_s(x)$ и $P_s(x)$– многочлены степени $s=max\{m, p\}$ с неопределенными коэффициентами.

4 *б*) Если число $\nu = a+bi$ является корнем характеристического многочлена кратности k, то частное решение ищем в виде

$$y_{чн} = x^k e^{ax}[Q_s(x)\cos bx + P_s(x)\sin bx],$$

где $Q_s(x)$ и $P_s(x)$ – многочлены степени $s = \max\{m, p\}$ с неопределенными коэффициентами.

Таким образом, чтобы решить неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома, нужно:

1. Выписать однородное уравнение, составить по нему характеристическое и найти корни характеристического уравнения с учетом их кратностей.

2. Выписать правую часть уравнения (1) и выбрать один из 4-х случаев, который имеет правая часть.

3. По правой части уравнения составить число ν.

4. Проверить является ли число ν корнем характеристического уравнения и если является, то какова его кратность. Соответственно этому выбрать подслучай *а*) или *б*).

5. Записать вид частного решения.

6. Подставить частное решение в неоднородное уравнение и найти неопределенные коэффициенты.

7. Записать общее решение неоднородного уравнения.

2. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x. \qquad (16.3)$$

Решение. Найдем общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ и находим его корни: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{00} = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

В уравнении (I6.3) правая часть имеет вид

$$e^{ax} P_r(x) \cos bx$$

где $P_r(x)$ – многочлен степени r, a,b – некоторые числа. В нашем случае $a = 1$, $b = 1$, $r = 0$. Проверим являются ли числа $\lambda = a \pm bi$ корнями характеристического уравнения. Так как $\lambda = 1 \pm i$ корни кратности I, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{чн} = xe^x(A\cos x + B\sin x)$.

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = e^x(A\cos x + B\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x + Bx\cos x - Ax\sin x);$$

$$y'_{чн} = 2e^x(A\cos x + B\sin x + B\cos x - A\sin x + Bx\cos x - Ax\sin x);$$

и подставим в уравнение (I6.3);

$$2e^x(B\cos x - A\sin x) = 4e^x\cos x;$$

$$\begin{cases} 2B = 4; \\ -2A = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2\ ; \\ A = 0\ . \end{cases}$$

Следовательно, $y_{чн} = 2xe^x\sin x.$

***Пример* 2.** Найти частное решение линейного уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}.$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$. Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda x}$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Выпишем правую часть уравнения: $f(x) = 4x^2e^{2x}$. Правая часть соответствует случаю 2.

Запишем по правой части число $\nu = 2$. Оно не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения. Имеем случай 2 а). Поэтому ищем частное решение в виде

$$y_{чн} = (ax^2 + bx + c)e^{2x}.$$

Тогда

$$y_{чн}' = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c)e^{2x};$$

$$y_{чн}'' = (4ax + 2b + 2a)e^{2x} + 2(2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c)e^{2x} =$$
$$= (4ax^2 + (4b + 8a)x + 2a + 4b + 4c)e^{2x}.$$

Подставляем в уравнение и сразу сокращаем обе части на e^{2x}, поскольку эта величина строго положительна:

$$4ax^2 + (4b + 8a)x + 2a + 4b + 4c - 5(2ax^2 +$$
$$+ (2b + 2a)x + b + 2c) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2.$$

Собираем в левой части равенства коэффициенты при одинаковых степенях x, и приравниваем коэффициент при x^2 к 4, а остальные – к 0. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2a = 4, \\ -2b - 2a = 0, \\ 2a - b - 2c = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = -2$, $b = 2$, $c = -3$. Тогда $y_{чн} = (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x}$.

3. Задания для практических занятий

Найти общее решение дифференциального уравнения.

16.1. $y'' - 4y' = -18x$.

16.2. $y''' + y'' - y' - y = (8x+4)e^x$.

16.3. $y'' - 7y' + 12y = x^2 + 2.$

16.4. $y'' + 9y' = 6\cos 3x.$

16.5. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x).$

16.6. $y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}.$

16.7. $y'' + 3y' + 2y = x.$

16.8. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$.

16.9. $y'' - 5y' + 4y = 3x.$

16.10. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}.$

16.11. $y'' + 4y' = -8x.$

16.12. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$

16.13. $y'' - 6y' + 8y = -x^2 - 3.$

16.14. $y'' + 2y' + 5y = -2e^x(\sin x + \cos x).$

16.15. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$.

16.16. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x.$

16.17. $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1.$

16.18. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

16.19. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$.

16.20. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x.$

16.21. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$

16.22. $y''' - y' = 2e^x + \cos x.$

16.23. $y^{IV} + y''' = 12x + 6.$

16.24. $y''' - y' = 2e^x + \cos x.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.

2. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений. – Минск: Універсітэцкае, 1996. – 287 с.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 2003. – 272 с.

4. Тихонов А.Н., Васильев А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2002. – 254 с.

5. Шилин А.П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры: учеб. пособие. – Минск: РИВШ, 2008. – 368 с.

6. Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. – Минск: Выш. шк., 1990. – 318 с.

7. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск: Выш. шк., 1974.

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1970. – 127 с.

9. Подоксёнов М.Н., Сурин Т.Л. Дифференциальные уравнения первого порядка. − Витебск, 2020. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26091.

10. Дифференциальные уравнения высших порядков / М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 50 с. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/29741.

11. Подоксёнов М.Н. Аналитическая геометрия и преобразования плоскости: учеб. пособие. – Витебск: Изд-во ВГУ им. П.М. Машерова. – 2016.– 287 с. URL: https://rep.vsu.by/ handle/123456789/7304.