(ознакомительный фрагмент)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

БРУЙ
Игорь Николаевич

МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Минск – 2005

Работа выполнена
в Гродненском государственном университете имени Янки Купалы

Научный консультант –
доктор физико-математических наук, профессор
РУСАК Валентин Николаевич,
Белорусский государственный университет, кафедра высшей математики и математической физики физического факультета

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
ПЕКАРСКИЙ Александр Антонович,
Белорусский государственный технологический университет, кафедра высшей математики

доктор физико-математических наук, профессор
СУЕТИН Павел Кондратьевич,
Московский технический университет связи и информатики, кафедра высшей математики

член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор
ЯНОВИЧ Леонид Александрович,
Институт математики НАН Беларуси, отдел нелинейного и стохастического анализа

Оппонирующая организация –
Институт математики НАН Украины,
г. Киев

Защита состоится 20 мая 2005 года в 10 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220050, г. Минск, просп. Ф.Скорины, 4, ауд. 334. Телефон учёного секретаря: 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “17” марта 2005 года

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физ.-мат. наук, профессор А.А.Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Теория суммируемости рядов берёт своё начало от исследований Л.Эйлера. В работах Э.Чезаро, Э.Бореля, Л.Фейера была выявлена связь теории суммируемости расходящихся рядов с другими математическими дисциплинами. Последующие результаты содержатся в трудах Г.Харди (1949 г., 1951 г.), Р.Кука (1950 г., 1960 г.), И.И.Волкова и П.Л.Ульянова (1960 г.), Г.Ф.Кангро (1974 г.), С.А.Барона (1977 г.), Т.Лейгера (1992 г.).

Согласно теореме Ф.Рисса – Э.Фишера (1907 г.) для того, чтобы ортогональный на отрезке ряд являлся рядом Фурье функции из пространства Гильберта L^2, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его коэффициентов принадлежала координатному пространству Гильберта l^2.

Если функциональное пространство негильбертово, то учитывают природу элементов ортонормированной системы и применяют методы суммирования.

Так У.Юнг и Дж. Юнг (1913 г.), В.Гросс и Г.Штейнгауз (1915 г.) в терминах метода $(C, 1)$ суммирования нашли условия, при которых тригонометрический ряд является рядом Фурье функции из соответственно пространств $L^p(\mathbf{T})$, $p\in(1, \infty]$, и $L^1(\mathbf{T})$.

В.Орлич и З.Ломницкий (1929 г.), З.Бирнбаум и В.Орлич (1931 г.) в терминах регулярных методов суммирования указали условия, при которых ортогональный на отрезке ряд является рядом Фурье функции из пространств измеримых функций соответственно L^p, $p\in[1, \infty]$, и Орлича L^ϕ (N-функция $\phi(u)$ удовлетворяла Δ_2-условию).

С.Качмаж и Г.Штейнгауз (1935 г., 1951 г., 1958 г.) установили, какие из предположений теорем Орлича – Ломницкого в случае пространств L^∞ и L^1 отражают сущность и какие из них в случае пространств Ф.Рисса L^p, $p\in(1, \infty)$, отражают способ доказательства. Тем самым стало актуальным получение адекватных результатов для пространств L^p при $p\in(1, \infty)$.

Введение Ф.Джоном и Л.Ниренбергом (1961 г.) в исследованиях по теории дифференциальных уравнений в частных производных класса функций ограниченной средней осцилляции BMO сделало актуальным нахождение условий, при которых ортогональный ряд является рядом Фурье функции из BMO.

Д.Алексич (1941 г.), Б.Сёкефальви-Надь (1948 г.) и С.Б.Стечкин (1953 г.) установили связь между ограниченностью $(R, 1)$-средних координатного ряда и скоростью сходимости $(R, 1)$-средних исходного ряда. Д.Кралик (1969 г.) распространил предыдущий результат на метод (R, r) М.Рисса порядка $r\in\mathbf{N}$. Актуальным стало выделение совокупностей регулярных методов суммирования, для которых подобная связь имеет место в функциональных пространствах.

Д.Алексич (1941 г.), С.М.Никольский (1945 г.), А.Зигмунд (1945 г.) и М.Заманский (1949 г.) структурно охарактеризовали класс насыщения метода $(C, 1)=(R, 1)$ суммирования тригонометрических рядов Фурье. Стало актуальным и важным, особенно с распространением вычислительной техники, структурно характеризовать классы насыщения совокупностей регулярных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье в интегральной и в равномерной метриках.

А.Н.Колмогоров (1935 г.) и С.М.Никольский (1945 г.) нашли на классах $W^rL^\infty(\mathbf{T}), r\in\mathbf{N}$, главные члены асимптотики верхних граней уклонений функций от соответственно частных сумм и $(C, 1)$-средних их тригонометрических рядов Фурье в равномерной метрике. Актуальным стало погружение ненасыщаемого метода частных сумм и насыщаемого метода $(C, 1)$ в регулярные методы и нахождение эффективной границы между ненасыщаемыми и насыщаемыми регулярными методами суммирования тригонометрических рядов Фурье в равномерной и в других метриках.

В.И.Смирнов и Н.А.Лебедев (1964 г.) нашли условия, при которых ряд, ортогональный по площади открытого ограниченного множества или по спрямляемому контуру жордановой области, является рядом Фурье функции из голоморфного телесного пространства Гильберта $Hol(O)\cap L^2(O)$ или из класса В.И.Смирнова $E^2(G)$, соответственно. Сделалось актуальным исследование случаев, когда $p\neq 2$, как для указанных выше рядов, так и для рядов по многочленам Фабера.

Д.Алексич (1941 г.) и А.Зигмунд (1945 г.) структурно охарактеризовали класс насыщения метода $(C, 1)$ суммирования рядов Тейлора, т. е. рядов Фабера относительно круга. Актуальным стало нахождение эффективных границ между ненасыщаемыми и насыщаемыми регулярными методами суммирования рядов Фабера относительно жордановых областей и структурных характеристик классов насыщения последних в контурно-интегральной и в телесно-равномерной метриках.

П.Л.Ульянов (1964 г.) установил, что при $\alpha\in[1, \infty)$ методы (C, α) суммирования тригонометрических рядов Фурье равносильны в пространствах Ф.Рисса $L^p(\mathbf{T}), p\in(1, \infty)$, хотя, как доказали К.Кнопп и С.Чэмпен, сила методов (C, α) суммирования числовых рядов возрастает вместе с $\alpha\in(-1, \infty)$.

Таким образом, при применении методов суммирования к функциональным рядам получаются результаты, которые не имеют аналогов для числовых рядов и доказательства которых требуют привлечения принципиально новых идей.

Вышеперечисленным направлениям исследований и посвящена настоящая диссертация.

Связь работы с крупными научными программами, темами.

Диссертация выполнена на кафедре теории функций, функционального анализа и прикладной математики математического факультета Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. В неё вошли исследования автора по следующим темам, входившим в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук:

1) Изучение скорости приближения функций рациональными функциями со свободными и предписанными полюсами (1981 – 1985 г.г., ГР № 81018606);

2) Исследование аддитивных, непрерывных и аналитических функций и их аппроксимаций (1986 – 1990 г.г., ГР № 01.86.0012778);

3) Аппроксимация аналитических функций посредством рациональных функций и краевая задача Римана (1991 – 1995 г.г., ГР № 0188.0014996);

4) Исследование алгебраических и дифференциальных особенностей математических структур (2001 – 2005 г.г., № А35-01).

Исследования автора дважды (29.04.1997 и 02.04.2001) поддерживала Германская служба академических обменов (DAAD).

Цель и задачи исследования.

Цель исследований настоящей работы – выявить условия, при которых ортогональные ряды суть ряды Фурье функций из заданных классов.

Для этого необходимо

– ввести методы суммирования рядов, ортогональных на отрезке, по площади или по контуру, тригонометрических рядов, рядов Уолша – Пэли, рядов Виленкина и рядов по многочленам Фабера для исследования перечисленных рядов в соответствующих пространствах L^p, Орлича L^ϕ, $\phi\in N$, BMO, Смирнова E^p и H^∞;

– получить условия для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье функции, r-я ($r\in\mathbf{N}$) производная которой обладает определёнными структурными свойствами, в терминах координатного тригонометрического ряда;

– найти совокупности регулярных методов суммирования, для которых M-ограниченность координатного тригонометрического ряда равносильна M-суммируемости исходного тригонометрического ряда с определённой скоростью в пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T})$, $p\in(1, \infty)$, и в $C(\mathbf{T})$;

– указать эффективные границы между ненасыщаемыми и насыщаемыми регулярными методами суммирования тригонометрических рядов Фурье и структурно охарактеризовать классы насыщения последних в интегральной и в равномерной метриках;

– разработать теории насыщаемых регулярных методов суммирования рядов Фабера в контурно-интегральной и в телесно-равномерной метриках.

Объект и предмет исследования.

Объектом исследования являются функции действительной и комплексной переменных и их представления.

Предметом исследования являются ряды, ортогональные на отрезке, по площади и по контуру, тригонометрические ряды, ряды Уолша – Пэли, ряды Виленкина и ряды по многочленам Фабера; ряды Фурье по соответствующим системам и ряды Фабера; пространства L^p, Орлича L^ϕ, $\phi\in N$, BMO, Смирнова E^p и H^∞.

Методология и методы проведенного исследования.

В диссертации используются методы теории функций, функционального анализа и интегральных операторов: методы теорий рядов; методы теории аппроксимаций; методы суммирования.

Научная новизна и значимость полученных результатов.

1. Введены методы суммирования рядов, ортогональных на отрезке, по площади открытого ограниченного множества или по спрямляемому контуру жордановой области, тригонометрических рядов, рядов Уолша – Пэли, рядов Виленкина и рядов по многочленам Фабера для жордановых областей с границами соответствующих гладкостей. Получены в терминах введённых методов суммирования необходимые и достаточные условия для того, чтобы перечисленные ряды представляли функции соответствующих классов: ограниченной средней осцилляции BMO, Орлича L^ϕ, $\phi\in N$; голоморфных L^p по площади, Смирнова E^p, голоморфных ограниченных H^∞.

2. Получены в терминах координатного тригонометрического ряда необходимые и достаточные условия для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье функции f, r-я ($r\in\mathbf{N}$) производная которой обладает следующими структурными свойствами: $f^{(r)}\in L^p(\mathbf{T}), p\in(1,\infty)$, $(\tilde{f})^{(2k+1)}\in L^\infty(\mathbf{T})$, $f^{(2k)}\in L^\infty(\mathbf{T}), f^{(r)}\in BMO(\mathbf{T})$.

3. Найдены совокупности регулярных методов суммирования рядов, для которых M-ограниченность координатного тригонометрического ряда равносильна M-суммируемости исходного тригонометрического ряда со скоростью $O(n^{-r})$ при $n\to\infty$ ($r\in\mathbf{N}$) в пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T}), p\in(1,\infty)$, и в банаховом пространстве $C(\mathbf{T})$.

4. Указаны совокупности насыщаемых регулярных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье с порядком насыщения n^{-r} ($r\in\mathbf{N}$) и структурно охарактеризованы их классы насыщения в пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T}), p\in(1,\infty)$, и в банаховом пространстве $C(\mathbf{T})$. Проиллюстрирована эффективность построенной в $C(\mathbf{T})$ теории конструированием насыщаемых регулярных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье с порядком насыщения и классом насыщения как в канонической теореме М.Заманского.

5. Разработаны теории насыщаемых регулярных методов суммирования рядов Фабера относительно жордановых областей с границами соответствующих гладкостей с порядком насыщения n^{-r} ($r \in \mathbf{N}$) в контурных пространствах Рисса $L^p(\partial G)$, $p \in (1, \infty)$, и в банаховом пространстве $A(\overline{G})$.

Практическая значимость полученных результатов.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы в теоретических исследованиях по теории аппроксимаций. Результаты глав 4 и 7 могут быть использованы также в вычислительной математике для конструирования аппроксимационных процессов с заданными порядком насыщения и классом насыщения.

Результаты диссертации могут найти применение в научных коллективах, занимающихся исследованиями по теории ортогональных рядов или использующих ортогональные ряды при решении естественнонаучных задач, а также в теории численных методов.

Результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов и проведении научных исследований в Белорусском, Гродненском, Ольденбургском, Тартуском и Трирском университетах, в Белорусском технологическом госуниверситете и в Дармштадтском техническом университете.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы ортогональный на отрезке ряд являлся рядом Фурье функции из пространств Орлича L^ϕ, где N-функция $\phi(u)$ может не удовлетворять Δ_2-условию. Критерии принадлежности рядов Уолша – Пэли и рядов Виленкина пространствам Рисса L^p, $p \in (1, \infty)$.

2. Решение проблемы, когда действительный тригонометрический ряд является рядом Фурье функции ограниченной средней осцилляции.

3. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье функции, r-я ($r \in \mathbf{N}$) производная которой обладает определёнными структурными свойствами, в терминах координатного тригонометрического ряда.

4. Нахождение совокупностей регулярных методов суммирования, для которых M-ограниченность координатного тригонометрического ряда равносильна M-суммируемости исходного тригонометрического ряда с определённой скоростью в пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T})$, $p \in (1, \infty)$, и в банаховом пространстве $C(\mathbf{T})$.

5. Критерии принадлежности рядов, ортогональных по площади или по контуру, и рядов по многочленам Фабера пространству H^∞ и соответственно голоморфным телесным пространствам Рисса $Hol(O) \cap L^p(O)$ или классам Смирнова $E^p(G)$, где $p \in (1, \infty)$.

6. Теории насыщаемых регулярных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье и рядов Фабера относительно жордановых областей с порядком насыщения n^{-r} ($r \in \mathbf{N}$) в соответствующих пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T})$ и контурном $L^p(\partial G)$, $p \in (1, \infty)$, и в банаховых пространствах $C(\mathbf{T})$ и $A(\overline{G})$.

Личный вклад соискателя.

Все изложенные в диссертации результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации.

По мере получения результаты диссертации докладывались на всесоюзных зимних школах по теории функций и приближений (Саратов, 1986, 1988, 1990 и 1992 г.г.), на 10-м коллоквиуме (школе) по теории квазиконформных отображений, её обобщениям и приложениям (Донецк, 1987 г.), на всесоюзной школе “Теория приближения функций” (Луцк, 1989 г.), на международной конференции по теории аппроксимации (Кечкемет, 1990 г.), на республиканской конференции “Проблемы теоретической и прикладной математики” (Тарту, 1990 г.), на всесоюзной школе по теории функций (Одесса, 1991 г.), на международных школах “Ряды Фурье: теория и приложения” (Каменец-Подольский, 1992 и 1997 г.г.), на 6-й конференции математиков Беларуси (Гродно, 1992 г.), на международной математической конференции, посвящённой 25-летию Гомельского госуниверситета имени Ф.Скорины (Гомель, 1994 г.), на международной конференции “Теория приближений и гармонический анализ” (Тула, 1998 г.), на Украинском математическом конгрессе (Киев, 2001 г.).

По мере получения результаты диссертации докладывались также на постоянно действующих научных семинарах, на которых во время доклада автора председательствовали: в МГУ члены-корреспонденты АН СССР П.Л.Ульянов и Б.В.Шабат, профессора Е.П.Долженко и М.К.Потапов, доцент Н.С.Вячеславов, в БГУ профессора Э.И.Зверович и В.Н.Русак, в ИМ АН УССР профессор И.А.Шевчук, в Будапештском университете профессор Ф.Шипп, в Тартуском университете доцент Х.Тюрнпу и в Трирском университете профессор В.Лу.

Опубликованность результатов.

Результаты диссертации опубликованы в 21 статье в научных журналах, в 4 статьях в сборниках научных трудов и в 7 тезисах докладов на научных конференциях.

Общее количество страниц опубликованных материалов составляет 264.

Результаты диссертации вошли также в учебное пособие, изданное двумя частями[1].

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, общей характеристики работы, семи глав, заключения и списка использованных источников.

Полный объём диссертации: 176 страниц.

Количество использованных источников: 226 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В обзоре в разделе 1.2 диссертации приводятся краткие исторические и библиографические сведения о предмете исследования, кратко характеризуется тема работы, её цели, задачи. Дано общее описание изучаемой проблемы, основные направления и методы её исследования. Характеризуются полученные в диссертации результаты; даётся их сравнение с результатами предшественников.

В **главе 1** диссертации введена совокупность методов суммирования ортогональных на отрезке $[0, 1]\subset\mathbb{R}$ рядов

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l\, \varphi_l(x), \tag{1}$$

в терминах которой указано необходимое и достаточное условие, при котором эти ряды являются рядами Фурье функций из пространств Орлича $L^{\phi}[0, 1]$, где N-функция $\phi(u)$ может не удовлетворять Δ_2-условию. Всюду ниже “почти все” означает ”все, за исключением, быть может, конечного числа”. Предположение о том, что почти все постолбцовые пределы ρ_l элементов описываемых ниже матриц M отделены от нуля, согласно теореме Нигама отсекает порождающие сходимость методы суммирования числовых рядов.

Теорема об ортогональных на отрезке L^{ϕ}-рядах, $\phi\in N$.

П р е д п о л о ж е н и я :

1) все функции $\varphi_l(x)$ ортонормированной на отрезке $[0, 1]$ *системы принадлежат комплексному пространству* $L^{\infty}[0, 1]$*;*

2) элементы бесконечной нижней треугольной действительной матрицы $M:=[\mu_l^{(n)}]$, $(n, l)\in\mathbf{Z}_0^{\,2}$, *имеют по всем столбцам конечные пределы:*

$$\forall l\in\mathbf{Z}_0\ \exists\lim_{n\to\infty}\mu_l^{(n)}=:\rho_l. \tag{2}$$

---

[1] *Бруй И.Н.* Ряды Фабера. – Гомель: ГГУ, 1983. – 66 с.

Бруй И.Н. Ряды Фабера. Суммирование. – Гомель: ГГУ, 1988. – 100 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие результаты.

1. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы ортогональный на отрезке ряд являлся рядом Фурье функции из пространств Орлича L^{ϕ}, где N-функция $\phi(u)$ может не удовлетворять Δ_2-условию. Критерии принадлежности рядов Уолша – Пэли и рядов Виленкина пространствам Рисса L^p, $p\in(1, \infty)$.[7] – [9], [12] – [15], [29] – [32].

2. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы действительный тригонометрический ряд являлся рядом Фурье функции ограниченной средней осцилляции. В решаемой проблеме пространство $BMO(\mathbf{T})$ ближе к пространству $L^{\infty}(\mathbf{T})$, чем к пространствам Рисса $\cap_{1<p<\infty}L^p(\mathbf{T})$. [10], [15].

3. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы тригонометрический ряд являлся рядом Фурье функции f, r-я ($r\in\mathbf{N}$) производная которой обладает следующими структурными свойствами: $f^{(r)}\in L^p(\mathbf{T}), p\in(1, \infty)$, $(f^{\sim})^{(2k+1)}\in L^{\infty}(\mathbf{T})$, $f^{(2k)}\in L^{\infty}(\mathbf{T})$, $f^{(r)}\in BMO(\mathbf{T})$, в терминах координатного тригонометрического ряда. [3], [11], [21].

4. Найдены совокупности регулярных методов суммирования, для которых M-ограниченность координатного тригонометрического ряда равносильна M-суммируемости исходного тригонометрического ряда со скоростью $O(n^{-r})$ при $n\to\infty$ ($r\in\mathbf{N}$) в пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T}), p\in(1, \infty)$, и в банаховом пространстве $C(\mathbf{T})$. [3], [11], [20].

5. Указаны совокупности насыщаемых регулярных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье с порядком насыщения n^{-r} ($r\in\mathbf{N}$) и структурно охарактеризованы их классы насыщения в пространствах Рисса $L^p(\mathbf{T}), p\in(1, \infty)$, и в банаховом пространстве $C(\mathbf{T})$. Проиллюстрирована эффективность построенной в $C(\mathbf{T})$ теории конструированием насыщаемых регулярных методов суммирования тригонометрических рядов Фурье с порядком насыщения и классом насыщения как в канонической теореме М.Заманского. Показана существенность налагаемых условий выводом асимптотических формул типа С.Н.Бернштейна – Е.В.Вороновской – А.К.Покало для классов $W^rL^p(\mathbf{T}), r\in\mathbf{N}, p\in(1, \infty)$, $\widetilde{W}^{2k+1}L^{\infty}(\mathbf{T})$, $W^{2k}L^{\infty}(\mathbf{T})$ (и их голоморфных аналогов $F^rH^{\alpha}(\overline{G})$, $\alpha\in(0, 1]$). [3], [11].

6. Критерии принадлежности рядов, ортогональных по площади открытого ограниченного множества или по спрямляемому контуру жордановой области, и рядов по многочленам Фабера для жордановых областей с границами соответствующих гладкостей пространству H^{∞} и голоморфным телесным пространствам Рисса $Hol(O)\cap L^{p}(O)$ или классам Смирнова $E^{p}(G)$, $p\in(1, \infty)$.[16] – [19].

7. Разработаны теории насыщаемых регулярных методов суммирования рядов Фабера относительно жордановых областей с границами соответствующих гладкостей с порядком насыщения n^{-r} ($r\in\mathbf{N}$) в контурных пространствах Рисса $L^{p}(\partial G)$, $p\in(1, \infty)$, и в банаховом пространстве $A(\overline{G})$. [1] – [6], [22] – [28][2].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах:

1. *Bruj I.N., Joó I.* On a theorem of L.Leindler // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös. Sect. Math. – 1988. – T. 31. – P. 55 – 57.
2. *Бруй И.Н.* О сильной конструктивной характеристике аналитических функций классов Гельдера // Вестн. МГУ. Сер. 1. – 1989. – № 5. – С. 67.
3. *Бруй И.Н.* О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / Ред. ж. "Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н." – Минск, 1989. – 60 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.08.89. – № 5514-В89 // Весці Акадэміі навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 3. – С. 115.
4. *Бруй И.Н.* Конструктивные описания аналитических функций классов Гёльдера // Матем. заметки. – 1990. – Т. 47, № 5. – С. 14 – 20.
5. *Bruj I.N., Joó I.* On Faber expansions // Publ. Math. (Debrecen). – 1991. – T. 38, № 3 – 4. – P. 287 – 295.
6. *Бруй И.Н.* О классах насыщения некоторых методов суммирования рядов Фабера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1993. – № 1. – С. 69 – 70.
7. *Бруй И.Н.* Тригонометрические ряды классов $L^{p}(\mathbf{T})$ и их регулярные средние // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 1. – С. 24 – 30.

[2] См. также учебное пособие, указанное в сноске 1 на стр. 7.

8. *Бруй И.Н.* Тригонометрические ряды класса $L^{\infty}(\mathbf{T})$ и их консервативные средние // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 2. – С. 48 – 52.
9. *Бруй И.Н.* Тригонометрические ряды классов $L^{p}(\mathbf{T}), p\in]1;\infty[$, и их консервативные средние // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62, № 5. – С. 677 – 686.
10. *Bruj I., Schmieder G.* Real trigonometric series of class *BMO* and $(C, 1)$-means // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1998. – Vol. 64. – P. 483 – 488.
11. *Bruj I., Schmieder G.* Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation // Journal of Approximation Theory. – 1999. – Vol. 100, № 1. – P. 157 – 182.
12. *Бруй И.Н.* Тригонометрические ряды классов $L^{p}(\mathbf{T})$ и их матричные средние // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2000. – № 1. – С. 46 – 49.
13. *Бруй І.М.* Матрычныя сярэднія артаганальных шэрагаў і прастора $C[0;1]$ // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. – 2001. – № 2. – С. 156 – 158.
14. *Бруй И.Н.* Матричные средние тригонометрических рядов и пространства Орлича // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2001. – № 2 (6). – С. 23 – 28.
15. *Бруй И.Н.* Методы суммирования тригонометрических рядов и пространства функций // Матем. сб. – 2002. – Т. 193, № 4. – С. 17 – 36.
16. *Бруй И.Н.* Матричные средние рядов Фабера и классы В.И.Смирнова $E^{p}(G), p\in(1,\infty)$ // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2002. – № 1 (9). – С. 38 – 48.
17. *Bruj I., Schmieder G.* Matrix Mean Series in Terms of Boundary Orthogonal Systems and Functions in the Classes H^{∞} and E^{p} // Journal of Approximation Theory. – 2002. – Vol. 118, № 2. – P. 246 – 256.
18. *Бруй И.Н.* Методы суммирования ортогональных по контуру рядов и классы В.И.Смирнова $E^{p}(G), p\in(1,\infty)$, и $H^{\infty}(G)$ // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2004. – № 1 (25). – С. 16 – 29.
19. *Бруй І.М.* Метады сумавання артаганальных па плошчы шэрагаў і класы галаморфных функцый // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. Серыя 3. – 2004. – № 1 (39). – С. 14 – 17.
20. *Бруй І.М.* Пашырэнне тэарэмы Алексіча – Краліка на рэгулярныя метады сумавання // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. Серыя 3. – 2004. – № 1 (39). – С. 18 – 21.
21. *Бруй И.Н.* Регулярные методы суммирования тригонометрических рядов и классы дифференцируемых функций // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2004. – № 2 (28). – С. 28 – 42.

Статьи в сборниках научных трудов:

22. *Бруй И.Н.* О сильной суммируемости рядов Фабера // Теория функций и приближ.: Тр. 3-й Сарат. зим. шк., 27 янв. – 7 февр., 1986: В 3 ч. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. – Ч. 2. – С. 11 – 14.
23. *Бруй И.Н.* О сильной конструктивной характеристике аналитических функций классов Гельдера // Экстремальные задачи, функциональный анализ и их приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – С. 35 – 37.
24. *Бруй И.Н.* О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера // Теория функций и приближ.: Тр. 4-й Саратов. зим. шк., 25 янв. – 5 февр., 1988: В 3 ч. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – Ч. 2. – С. 54 – 56.
25. *Бруй И.Н.* Сильные суммы Валле-Пуссена рядов Фабера и классы аналитических функций // Теория функций и приближ.: Тр. 5-й Саратов. зим. шк., 25 янв. – 4 февр., 1990: В 3 ч. – Саратов: Изд-во Гос. ун-та, 1996. – Ч. 2. – С. 9 – 11.

Тезисы докладов на научных конференциях:

26. *Бруй И.Н.* Ряды Фабера и классы аналитических функций // Всесоюзная школа "Теория приближения функций": Тезисы докладов. Луцк, 31 августа – 8 сентября 1989 г. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 29.
27. *Bruj I.N., Joó I.* On a characterization by strong de la Vallée-Poisson means of Zygmund-continuous functions // Conference on Approximation Theory, Kecskemét, August 6 – 11, 1990: Abstracts. – J.Bolyai Mathematical Society, 1990. – P. 10.
28. *Бруй И.Н., Йо И.* Конструктивные описания некоторых классов функций на замкнутых жордановых областях с гладкой границей // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тезисы докладов конференции: 21 – 22.IX 1990. – Tartu: Tartu Ülikool, 1990. – С. 152 – 155.
29. *Бруй И.Н.* Периодические измеримые существенно ограниченные функции и регулярные средние их рядов Фурье // Проблемы математики и информатики: В 2 ч. – Гомель, 1994. – Ч. 1: Фундаментальные проблемы математики: (Материалы международной математической конференции, посвящённой 25-летию Гомельского госуниверситета имени Ф.Скорины). – С. 134.

30. *Бруй И.Н.* Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbf{T})$ и их матричные средние // II школа "Ряди Фур'є: теорія і застосування": (Кам'янець-Подільський, 30 червня – 6 липня 1997 р.): Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 25 – 26.
31. *Бруй И.Н.* Матричные средние ортогональных рядов и классы функций // Международная конференция "Теория приближений и гармонический анализ": (Россия, Тула, 26 – 29 мая 1998 г.): Тезисы докладов. – Тула, 1998. – С. 58 – 59.
32. *Бруй И.Н.* Методы суммирования ортогональных рядов и пространства функций // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Тези доповідей. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 10 – 11.

РЭЗЮМЭ

БРУЙ Ігар Мікалаевіч

Метады сумавання шэрагаў і класы функцый

Ключавыя словы: *метады сумавання, артаганальныя шэрагі, шэрагі Фур'е, шэрагі Фабэра, прасторы Орліча, абмежаваная сярэдняя асцыляцыя, класы Смірнова.*

Аб'ектам даследавання з'яўляюцца функцыі і іхнія ўяўленні, а прадметам – артаганальныя шэрагі, шэрагі Фур'е і класы функцый. Мэта працы – выявіць умовы, пры якіх артаганальныя шэрагі – гэта шэрагі Фур'е функцый з зададзеных класаў. Ужываюцца метады "цвёрдага" аналіза.

У дысертацыі з дапамогаю метадаў сумавання вызначаны ўмовы для таго, каб шэраг, артаганальны на адрэзку, па плошчы ці па контуру, трыганаметрычны шэраг, шэраг Уолша – Пэлі, шэраг Віленкіна ці шэраг па мнагаскладам Фабэра з'яўляўся шэрагам Фур'е функцыі аднаго з класаў L^p, Орліча L^ϕ, $\phi\in N$, BMO, Смірнова E^p, H^∞, а таксама выяўлена сувязь паміж хуткасцю сумавання метадам M трыганаметрычнага шэрага і абмежаванасцю M-сярэдніх "каардынатнага" трыганаметрычнага шэрага.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны могуць знайсці ўжыванне ў навуковых калектывах, якія праводзяць даследаванні па тэорыі артаганальных шэрагаў ці скарыстоўваюць артаганальныя шэрагі пры рашэнні прыродазнаўча-навуковых задач, у лікавых метадах.

РЕЗЮМЕ

БРУЙ Игорь Николаевич

Методы суммирования рядов и классы функций

Ключевые слова: *методы суммирования, ортогональные ряды, ряды Фурье, ряды Фабера, пространства Орлича, ограниченная средняя осцилляция, классы Смирнова.*

Объектом исследования являются функции и их представления, а предметом – ортогональные ряды, ряды Фурье и классы функций. Цель работы – выявить условия, при которых ортогональные ряды суть ряды Фурье функций из заданных классов. Применяются методы "жёсткого" анализа.

В диссертации с помощью методов суммирования указаны условия для того, чтобы ряд, ортогональный на отрезке, по площади или по контуру, тригонометрический ряд, ряд Уолша – Пэли, ряд Виленкина или ряд по многочленам Фабера являлся рядом Фурье функции одного из классов L^p, Орлича L^ϕ, $\phi\in N$, BMO, Смирнова E^p, H^∞, а также установлена связь между скоростью суммируемости методом M тригонометрического ряда и ограниченностью M-средних "координатного" тригонометрического ряда.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут найти применение в научных коллективах, занимающихся исследованиями по теории ортогональных рядов или использующих ортогональные ряды при решении естественнонаучных задач, в численных методах.

SUMMARY

BRUJ [Brui, Bruĭ] Igor [Nikolaevich]

Methods of summation of series and the classes of functions

Key words: *summation methods, orthogonal series, Fourier series, Faber series, Orlicz spaces, bounded mean oscillation, Smirnov classes.*

The object of research is functions and their representations. The subject of research is orthogonal series, Fourier series and function classes. The purpose of work is to find the conditions for orthogonal series to be the Fourier series of a given function classes. Methods of research are based on the "hard" analysis.

In the dissertation we give conditions for a functional series such as orthogonal on the segment, trigonometric, Walsh – Paley, Vilenkin, orthogonal on the domain, orthogonal on the curve, Faber polynomials to be the Fourier series of a function of one of the spaces L^p, Orlicz L^ϕ, $\phi\in N$, BMO, Smirnov classes E^p, H^∞. We establish the connection between the rapidity of approximation by the M-means of trigonometric series and by the boundedness of the M-means of "coordinated" trigonometric series.

All main results of the dissertation are new. They can be used in the theory of orthogonal series, in applied problems and in the numerical analysis.