

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный университет
имени П.М. Машерова»
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 512.54
Рег. № 20191854

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
профессор
_____ Е.Я. Аршанский
« ___ » _____ 2021 г.

ОТЧЕТ
о научно-исследовательской работе
Разрешимые группы и групповые свертки
(заключительный)

договор с БРФФИ № Ф19РМ-071 от 02.05.2019 г.

Руководитель НИР
кандидат физико-математических наук _____ А.В. Кухарев

Начальник НИСа
кандидат геолого-минералогических наук,
доцент _____ И.А. Красовская

Витебск 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР,
доцент кафедры ИТиУБ,
к. физ.-мат. наук

_____ А.В. Кухарев
(введение, раздел 4–6,8,9
заключение)

Исполнители:

доцент кафедры ИТиУБ,
к. физ.-мат. наук

_____ А.А. Царев
(раздел 7)

Учреждение образования
«Брестский государственный
университет имени
А.С. Пушкина», доцент

_____ А.А. Трофимук
(раздел 1–3)

Нормоконтролер

_____ Т.В. Харкевич

РЕФЕРАТ

Отчет 60 с., 1 кн., 53 источн.

КОНЕЧНАЯ ГРУППА, РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА, ГРУППОВОЕ КОЛЬЦО, ГРУППОВАЯ СВЕРТКА, ФОРМАЦИИ МОНОИДОВ

Объектом исследования являются разрешимые конечные группы, групповые кольца и групповые свертки, формации моноидов и формальных языков.

Цель работы – развитие теоретико-групповых и формационных методов исследования алгебраических систем с приложениями в машинном обучении и теории формальных языков.

В результате выполнения НИР разработаны новые и развиты существующие теоретико-групповые и формационные методы исследования алгебраических систем.

Получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины, ранга, p -длины) конечных разрешимых групп с заданным каноническим разложением порядков кофакторов фиттинговых подгрупп. Установлены признаки сверхразрешимости некоторых факторизуемых групп с ограничениями на обобщенно перестановочные сомножители. Получено описание конечных групп с графом простых чисел, диаметр которого равен 5. Получены ограничения на диаметр графа Брауэра p -блоков конечных p -разрешимых групп с абелевыми и циклическими силовскими p -погруппами. Описаны свойства групповой свертки в случае циклических и абелевых конечных групп. Разработан метод описания формальных языков, соответствующих τ -замкнутым насыщенным формациям конечных групп.

Полученные результаты могут использоваться в научных исследованиях при изучении классов и формаций конечных групп, групповых свертки и групповых колец конечных групп. Результаты могут найти применение также в теории формальных языков и в машинном обучении.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Инварианты разрешимых групп с ограничениями на порядки кофакторов их фиттинговых подгрупп	7
2 Признаки сверхразрешимости факторизуемых групп с ограничениями на обобщенно перестановочные сомножители	15
3 Формационное строение группы с двумя разрешимыми обобщенно перестановочными подгруппами	29
4 Конечные группы с графом простых чисел максимального диаметра	32
5 Групповые кольца разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами	34
6 Групповые свертки и их применение	38
7 Формации моноидов и формальных языков	42
8 Результаты международного сотрудничества	47
9 Перспективы дальнейшего развития исследований и практического использования полученных результатов	48
Заключение	47
Список использованных источников	52
Библиография	58
Приложение А. Акт о практическом использовании результатов исследования	59

ВВЕДЕНИЕ

Теория групп, возникшая в связи с вопросом о разрешимости алгебраических уравнений, в последующем нашла не мало практических приложений за пределами чистой математики: в теоретической физике и химии, в криптографии и теории кодирования. В последние время область возможного применения теории групп пополнилась такими новыми направлениями как квантовые вычисления, теория формальных языков и машинное обучение.

В задаче распознавания образов основной из проблем является сохранение точности классификации изображений при их трансляциях, поворотах, зеркальных отражениях и иных преобразованиях. Появление сверточных нейронных сетей в начале 1990-х обеспечило существенный прогресс в этом направлении, поскольку используемая в них операция свертки обладает инвариантностью к трансляционным симметриям. Использование групп симметрий позволяет учесть дополнительные симметрии, связанные с вращением входного изображения. Кроме того, в последнее время сверточные нейронные сети стали применяться в задачах обработки текстов на естественном языке. В связи с этим интерес представляет изучение возможности применения в таких сетях одномерных групповых сверток.

Понятие формации конечных групп появилось впервые в 1960-х годах на пути изучения некоторых структурных вопросов теории разрешимых групп. Однако дальнейшие исследования показали, что концепция формации применима для изучения не обязательно конечных групп, но и для алгебр Ли, унаров, универсальных алгебр и даже алгебраических систем в целом.

Целью работы является развитие теоретико-групповых и формационных методов исследования алгебраических систем с приложениями в теории формальных языков и машинном обучении.

В работе решались следующие основные задачи:

1) Установить инвариантные характеристики конечных разрешимых групп с ограничениями на их обобщенно перестановочные сомножители, а также с ограничениями на кофакторы подгрупп, вложенных в подгруппу Фиттинга.

2) Описать решеточные свойства формаций алгебраических систем, таких как моноиды, регулярные языки, конечные группы и алгебры Ли.

3) Описать строение групповых колец и свойства групповых сверток разрешимых групп с абелевой силовской подгруппой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
- 2 Huppert, B. Endliche Gruppen / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967.
- 3 Guo, W. On indices of subnormal subgroups of finite soluble groups / W. Guo, B. Hu, V.S. Monakhov // Commun. Algebra. – 2004. – Vol. 33, № 3. – P. 855–863.
- 4 Monakhov, V.S. On cofactors of subnormal subgroups / V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 9. – P. 1650169-1–1650169-9.
- 5 Евтухова, С.М. О конечных разрешимых группах с малыми порядками кофакторов подгрупп / С.М. Евтухова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2004. – № 6(27). – С. 57–61.
- 6 Евтухова, С.М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С.М. Евтухова, В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 26–29.
- 7 Евтухова, С.М. О порядках кофакторов подгрупп конечной разрешимой группы / С.М. Евтухова, В.С. Монахов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 15–18.
- 8 Yufeng, L. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / L. Yufeng, Y. Xiaolan // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2011. – Vol. 34, № 2. – P. 337–344.
- 9 Трофимук, А.А. Конечные разрешимые группы с бициклическими кофакторами примарных подгрупп / А.А. Трофимук, Д.Д. Даудов // НАН Беларуси. Труды Института математики. – 2016. – Т. 24, №1. – С. 95–99.
- 10 Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B.Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Bd. 60. – S. 409–434.

- 11 Беркович, Я.Г. О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Матем. сб. – 1967. – Т. 74(116), № 1. – С. 75–92.
- 12 Gashutz, W. Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflösbaren Gruppen durch gewisse Indexschränken definiert sind / W.Gashutz // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53, № 2. – S. 389–394.
- 13 Монахов, В.С. К теореме Хупперта-Шеметкова / В.С.Монахов // Труды института математики. – 2008. – Т. 16, № 1. – С. 64–66.
- 14 Трофимук, А.А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А.А. Трофимук // Математические заметки. – 2010. – №2 (87). – С. 287–293.
- 15 Трофимук, А.А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3(19). – С. 304– 307.
- 16 Trofimuk, A.A. Solvable groups with restrictions on Sylow subgroups of the Fitting subgroup / A.A. Trofimuk // Asian-European Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 9, No. 2. – P. 1650037 (6 pages).
- 17 Трофимук, А.А. О Фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы / А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – № 3(18). – С. 242– 246.
- 18 Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
- 19 Dixon, J.D. The solvable length of a solvable linear groups / J.D.Dixon // Math. Z. – 1968. – Bd. 12. – S. 151–158.
- 20 Newman, M.F. The solvable length of a solvable linear groups / M.F.Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – P. 59–70.
- 21 Супруненко, Д.А. Группы матриц / Д.А. Супруненко. – М. : Наука, 1972.
- 22 Flannery, D.L. Linear Groups of small degree over finite fields / D.L. Flannery, E.A. O'Brien // Internat. J. Algebra Comput. – 2005. – Vol. 15(3). – P. 467–502.

- 23 Huppert, B. Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1982.
- 24 Huppert, B. Monomiale darstellung endlicher gruppen / B. Huppert // Nagoya Math. J. – 1953. – Vol. 3. – P. 93–94.
- 25 Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
- 26 Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
- 27 Maier, R. A completeness property of certain formations / R. Maier // Bull. Lond. Math. Soc. – 1992. – Vol. 24. – P. 540–544.
- 28 Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido J. Math. – 1992. – Vol. 21. – P. 395–403.
- 29 Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68 (3-4). – P. 433–449.
- 30 Arroyo-Jorda, M. On finite products of groups and supersolubility / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 2010. – Vol. 323. – P. 2922–2934.
- 31 Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.
- 32 The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.9.2 released on 4 July 2018. <http://www.gap-system.org>.
- 33 Wielandt, H. Subnormalitat in faktorisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.
- 34 Arroyo-Jorda, M. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda, A. Martinez-Pastor and M.D. Perez-Ramos // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.

- 35 Monakhov, V.S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V.S. Monakhov, I.K. Chirik // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58:2. – P. 271–280.
- 36 Monakhov, V.S. Finite groups with two supersoluble subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22. – P. 297–312.
- 37 Friesen, D. Products of normal supersolvable subgroups / D. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, № 1. – P. 46–48.
- 38 Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Матем. – 1997. – Vol. 11(426). – С. 10–14.
- 39 Su, X. On semi-normal subgroups of finite group / X. Su // J.Math. (Wuhan). – 1988. – Vol. 8:1. – P. 7–9.
- 40 Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
41. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. – 1981. – № 69. – P. 487–513.
42. Kondrat'ev A. S. Prime graph components of finite simple groups // Mat. Sb. – 1989. – Vol. 180. – P. 787–797.
43. Lucido M.S. The diameter of the prime graph of a finite group // J. Group Theory. – 1999. – Vol. 2, № 2. – P. 157–172.
- 44 Gruber A., Keller T.M., Lewis M.L., Naughton K., Strasser B. A characterization of the prime graphs of solvable groups // J. Algebra. – 2015. – Vol. 442. – P. 397–422.
- 45 Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian Rings and Related Topics. – World Scient. Publ., 2009.
- 46 Alperin J.L. Local representation theory. – Cambridge : Cambridge University Press, 1986.
- 47 LeCun, Y. Gradient-based learning applied to document recognition / Y. LeCun [et al.] // Proc. of the IEEE. – 1998. – Vol. 86, № 11. – P. 1-46.

48 Cohen, T. Group Equivariant Convolutional Networks / T. Cohen, M. Welling // Proceedings of The 33rd International Conference on Machine Learning. – 2016. – PMLR 48:2990-2999.

49 Вишневецкий, А.Л. Быстрое теоретико-групповое преобразование / А.Л. Вишневецкий // Пробл. передачи информ. – 1990. – Т. 26, №1. – С. 104-107.

50 Ballester-Bolinches, A. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's variety theorem revisited / A. Ballester-Bolinches, J.E. Pin, X. Soler-Escriva // Forum Math. – 2014. – Vol. 26, no. 6. – P. 1737–1761.

51 Ballester-Bolinches, A. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, J.E. Pin, X. Soler-Escriva // Forum Math. – 2015. – Vol. 27, no. 3. – P. 1471–1505.

52 Скиба, А.Н. Алгебра формаций : монография / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

53 Ведерников, В.А. Ω -расслоенные формации мультиоператорных Т-групп / В.А. Ведерников, Е.Н. Демина // Сиб. матем. Журн. – 2010. – Т. 51, № 5. – С. 990–1009.

БИБЛИОГРАФИЯ

1 Gorshkov, I.V. The prime graph of finite groups of diameter 5 / I.V.Gorshkov, A.V. Kukharev // Communications in Mathematics. – 2020. – Vol. 28, № 3. – P. 307-312.

2 Кухарев, А.В. Сверточные и рекуррентные нейронные сети для классификаций инструкций веб-драйвера / А.В. Кухарев // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 73-ей Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2021. (в печати)

3 Трофимук, А.А. Конечные разрешимые группы с ограничениями на кофакторы фиттинговых подгрупп / А.А. Трофимук // НАН Беларуси. Труды Института математики. – 2020. – Т. 28, №1-2.– С. 91–97.

4 Trofimuk, A.A. A note on the supersolubility of a group with ms-supersoluble factors / A.A. Trofimuk // Ricerche di Matematica. – 2020. – DOI: 10.1007/s11587-020-00493-w

5 Trofimuk, A.A. On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // Journal of Algebra and Its Applications. – 2021. – 2150020 (18 pages).

6 Trofimuk, A.A. On a product of two formational tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2020. – Vol. 30, № 2. – p. 282 – 289.

7 Трофимук, А.А. Замечание о произведении двух tcc-подгрупп / А.А. Трофимук // Чебышевский сборник. – 2020. – Т. 22, № 1. – С. 493–499.

8 Трофимук, А.А. О сверхразрешимости факторизуемой группы с добавляемо-перестановочными сомножителями / А.А. Трофимук // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVII Междунар. конф., посвященной девяностолетию со дня рождения профессоров А.И. Виноградова, А.В.

Мальшева и Б.Ф. Скубенко, 23-28 сентября. – Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2019. – С. 50-52.

9 Трофимук, А.А. О конечных разрешимых группах с ограничениями на кофакторы фиттинговых подгрупп / А.А. Трофимук // Мальцевские чтения: тезисы докладов Международной конференции, 19-23 августа 2019 г. – Новосибирск, 2019. – С. 134.

10 Трофимук, А.А. О сверхразрешимости группы, у которой некоторые подгруппы являются тсс-подгруппами / А.А. Трофимук // Формирование готовности будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : сб. материалов международной научн.-практ. конф., Брест, 8-9 апр. 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; редкол.: Е.П. Гринько [и др.] ; под общей ред. Е.П. Гринько. – Брест : БрГУ, 2020. – С.273-276.

11 Трофимук, А.А. О группе, факторизуемой формационными тсс-подгруппами / А.А. Трофимук // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2020. – С. 92-94.

12 Tsarev, A. Frattini subformations of foliated formations of T-groups / A. Tsarev // Boll Unione Mat Ital. – 2020. – Vol. 13. – P. 103-111.

13 Tsarev, A. Formations of finite monoids and their applications: formations of languages and τ -closed saturated formations of finite groups / A. Tsarev // Ann. Univ. Ferrara. – 2019. – Vol. 65, № 2. – P. 369–374.

14 Tsarev, A. Laws of the lattices of σ -local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean J. Math. – 2020. – Vol. 17, no. 3. – P. 75-1–75-13.

15 Tsarev, A. On classes of finite rings / A. Tsarev // Rev. Un. Mat. Argentina. – 2020. – Vol. 61, no. 1. – P. 103–111.