

(ознакомительный фрагмент)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 539.3

БОСЯКОВ Сергей Михайлович

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела.

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Минск – 2002



Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор
Мартыненко Михаил Дмитриевич (Белорусский государственный университет, кафедра теоретической и прикладной механики).

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Куликов Иван Семенович
(РУП «Белинвестэнергоэкономия»);

доктор физико-математических наук, профессор
Шнип Александр Иванович
(Институт теплообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси, лаборатория энергооборота).

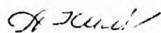
Опонирует из **Львовский национальный университет имени И. Я. Франко.**

Защита диссертации состоится «31» мая 2002 г. в 10 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02. 01. 07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4, ауд. 206, тел. 226-55-41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «29» апреля 2002 г.

Ученый секретарь совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор



А. А. Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Задачи механики деформируемого твердого тела, связанные с исследованием волновых полей в анизотропных средах, принадлежат к числу наиболее сложных и важных как в теоретическом отношении, так и с практической точки зрения. Их актуальность вызвана постоянно растущей необходимостью использования результатов новых научных исследований в современных отраслях науки и техники, а также формированием наглядных физических представлений о поведении упругих, термоупругих, пьезоактивных волн в анизотропных средах. В то же время, до настоящего времени было известно не так много случаев применения аналитических подходов к решению динамических задач механики сплошных сред, что связано с желанием исследователей освободиться от излишней громоздкости вычислений и результатов. Это привело к значительному отставанию в развитии традиционных методов, каким является метод характеристик (метод слабых разрывов) и метод сильных разрывов. Однако возможности и средства современной вычислительной техники делают доступным решение динамических задач высокой степени сложности и позволяют математически моделировать волновые процессы в сплошных средах на основе метода характеристик. Это тем более важно, поскольку распространение поверхностей разрыва поля перемещений, температур и других полей в математическом формализме теории упругости соответствуют большинству разрывных воздействий на тела, имеющих практическое значение. Настоящая работа посвящена применению метода характеристик и теории разрывных решений к исследованию закономерностей волновых процессов в классических и микрополярных упругих средах с учетом тепловых и пьезоэлектрических эффектов.

Связь работы с крупными научными программами, темами.

Диссертационная работа выполнялась в процессе научных исследований кафедры теоретической механики и робототехники Белорусского государственного университета «Разработка новых и развитие аналитических методов и подходов к исследованию динамических процессов и решения задач механики сплошной среды» (№ 915/21), «Базовые системы дифференциальных уравнений механики деформируемого твердого тела. Их анализ и решение» (№ 516/21), а также по плану научно-исследовательской работы кафедры сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета в рамках заданий «Исследование процессов теплообмена между плазмой дуги, газом и электродом, воздействие плазменных источников на твердое тело» (ГР №20012560), ГНПП «Алмазы».

Цель и задачи исследования.

Целью настоящей работы является разработка и применение метода характеристик, теории разрывных решений для исследования динамических

процессов в термоупругих изотропных и кубически анизотропных средах. Для достижения этой цели необходимо:

- получить уравнение характеристик и уравнение сильных разрывов для кубически анизотропных сред, характеризующихся симметричным и несимметричным тензором напряжений;
- вывести уравнения характеристик для изотропных и кубически анизотропных сред при наличии тепловых и пьезоэлектрических эффектов;
- провести анализ полученных уравнений на основании математического аппарата метода характеристик и установить закономерности распространения волн в сплошных средах.

Объект и предмет исследования.

Объектом исследования в диссертации являются твердые деформируемые тела, упругие свойства которых характеризуются наличием трех упругих постоянных, а тензор напряжения симметричен (классическая упругость) или асимметричен (моментная теория упругости). В частном случае эти тела могут соответствовать классической или моментной теории упругости изотропных тел.

Предметом исследования являются волновые процессы в кубически анизотропных телах и в микрополярных средах с учетом тепловых полей, а также взаимосвязи упругих и электрических свойств.

Методология и методы проведенного исследования.

Принятая в диссертации методология основана на использовании дифференциальных уравнений движения, записанных применительно к анизотропным средам с учетом тепловых и электромагнитных полей и направлена на изучение волновых процессов в таких средах, а также на определение величин, характеризующих распространение упругих, термоупругих (тепловых) и пьезоактивных волн. Основными методами, использованными в работе, являются:

- метод характеристик для дифференциальных уравнений с частными производными;
- метод сильных разрывов;

В работе также использованы современные возможности и средства вычислительной техники для визуализации волновых движений в сплошных средах.

Научная новизна и значимость полученных результатов.

В работе впервые применены методы характеристик и сильных разрывов к обобщенному уравнению теплопроводности, системам уравнений движения упругих, термоупругих и пьезоэлектрических кубически анизотропных сред; выведены соответствующие уравнения поверхностей разрыва и получены системы бихарактеристик. С их помощью проведен расчет лучевых скоростей распространения упругих, термоупругих и пьезоактивных волн и впервые построены трехмерные поверхности обратных скоростей и волновые поверхности квазипродольной и квазипоперечных волн в кубически анизотропных средах. Впервые выведены уравнения движения микрополярной изотропной термоупругой среды в напряжениях, микрополярной ку-

бически анизотропной среды и для них получены уравнения распространения поверхностей разрыва.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Диссертация имеет характер теоретического исследования динамических задач классической и микрополярной теории упругости изотропных и анизотропных сред с учетом тепловых и электромагнитных воздействий. Полученные результаты могут быть использованы для качественного и количественного анализа закономерностей распространения волн в анизотропных средах. Результаты численных расчетов могут быть применены на практике для определения времени релаксации теплового потока, упругих и термоупругих констант, а также в различных отраслях техники (точном машиностроении, приборостроении и т. д.). Они также могут служить основой при разработке новых методов неразрушающего контроля.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Новыми результатами, выносимыми на защиту диссертации, являются:

- уравнение распространения поверхностей разрыва, кинематические и динамические условия совместности для поля температур в обобщенной теории теплопроводности;

- уравнение характеристик (уравнение сильных разрывов) для кубически анизотропного тела и исследование с его помощью закономерностей распространения упругих волн, а также построение поверхностей волновых фронтов квазипродольных и квазипоперечных волн;

- эволюционные уравнения движения кубически анизотропной термоупругой среды в напряжениях с учетом времени релаксации теплового потока, а также уравнение распространения поверхностей разрыва в такой среде и анализ различных подходов к его решению;

- уравнение распространения характеристик для пьезоэлектрической кубически анизотропной среды и анализ процессов распространения поверхностей разрыва;

- анализ результатов численных расчетов фазовых и лучевых скоростей распространения квазипродольных и квазипоперечных волн в деформированных твердых телах по полученным в диссертации формулам;

- эволюционные системы уравнений для термоупругой микрополярной изотропной среды в напряжениях, микрополярной кубически анизотропной среды, а также уравнение характеристик и уравнение сильных разрывов;

Личный вклад соискателя.

В работе приведены результаты, полученные лично соискателем. Постановка задач принадлежит научным руководителям профессору М. Д. Мартыненко и доценту О. Н. Складу.

Апробация результатов диссертации.

По материалам диссертации были сделаны доклады на 57 и 58-ой научных конференциях аспирантов и студентов Белгосуниверситета (г. Минск, 2000, 2001 гг.), на VIII Белорусской математической конференции (г. Минск, 2000 г.), на международной научно-технической конференции посвященной

80-летию БГПА (г. Минск, 2000 г.), на республиканском научно-методическом семинаре преподавателей кафедр теоретической механики, теории машин и механизмов, сопротивления материалов вузов Беларуси (г. Минск, 2001 г.), на 2-ой Европейской конференции по вычислительной механике (г. Краков, 2001 г.), на международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической механике» (г. Минск, 2001 г.), на научно-методическом семинаре кафедры сопротивления материалов и теоретической механики БГТУ (г. Брест, 2001 г.).

Опубликованность результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах, в том числе 10 статьях в научных журналах и 3 тезисах вышеупомянутых конференций. Общее количество страниц опубликованных материалов составляет 48.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, пяти глав основного текста, заключения и списка использованных источников. Она изложена на 128 страницах, содержит 43 иллюстрации на 18 стр., 16 таблиц на 9 стр., список использованных источников, включающий 136 наименований и изложенный на 9 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе проведен краткий обзор исследований, посвященных применению метода характеристик и теории сильных разрывов к решению динамических задач механики деформируемого твердого тела, а также приведены основные положения метода характеристик применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=0}^3 a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots = 0, \quad x_0 \equiv t. \quad (1)$$

В общем случае начальные данные к (1) зададим на поверхности

$$Z(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2)$$

и введем замену переменных

$$Z_k = Z_k(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad Z_0 \equiv Z, \quad k = \overline{0,3}. \quad (3)$$

Производные по старым переменным примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_n} = \sum_{l,m=0}^3 \frac{\partial^2 y_j}{\partial Z_l \partial Z_m} \frac{\partial Z_l}{\partial x_k} \frac{\partial Z_m}{\partial x_n} + \sum_{i=0}^3 \frac{\partial y_j}{\partial Z_i} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_n \partial x_k}, \quad Z \equiv Z_0, t \equiv x_0. \quad (4)$$

Подставим (4) в систему (1) и выпишем только те члены, которые содержат производные второго порядка по Z :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k,l=0}^3 a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2 y_j}{\partial Z^2} \frac{\partial Z}{\partial x_k} \frac{\partial Z}{\partial x_l} + \dots = 0. \quad (5)$$

В новых переменных данные Коши задаются на поверхности (2). Эта поверхность будет характеристической, если из системы (5) нельзя определить значений производных $\frac{\partial^2 y_j}{\partial Z^2}$, $j = \overline{1, m}$, то есть, если определитель, составленный из коэффициентов при этих производных, равен нулю. Поэтому уравнение, которому должна удовлетворять всякая характеристическая поверхность системы (1), в силу вышесказанного, примет вид:

$$\det \|\omega_{ij}\| = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } \omega_{ij} = \sum_{k,l=0}^3 a_{ij}^{kl} p_k p_l, \quad p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, \quad k = \overline{0, 3}.$$

Теория характеристик позволяет исследовать закономерности распространения поверхностей сильных разрывов, когда на поверхности (2) функции y_j , $j = \overline{1, m}$, как решения системы (1), остаются непрерывными, а разрыв первого рода претерпевают частные производные первого порядка $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$, $k = \overline{0, 3}$ (непрерывные с каждой из сторон поверхности (2)). Это обстоятельство, наряду с непрерывностью y_j , $j = \overline{1, m}$, позволяет доказать, что при переходе через поверхность (1.3) остаются непрерывными выражения вида

$$p_k \frac{\partial y_j}{\partial t} - p_0 \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = M_{kj} \equiv \text{непр.}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

которые называются кинематическими условиями совместности для функций y_j , $j = \overline{1, m}$ с сильными разрывами на поверхности (2). Помимо (7), для функций y_j , $j = \overline{1, m}$ с сильными разрывами должны выполняться m динамических условий совместности, которые являются следствиями законов сохранения, и поэтому в общем виде записать такие условия не представляется возможным. Кинематические и динамические условия совместности можно рассматривать как $4m$ линейных алгебраических уравнений для такого же количества частных производных $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, 3}$, которые могут иметь

разрывы непрерывности на поверхности (2) в случае, если эта система уравнений неразрешима относительно частных производных первого порядка.

В качестве примера применения методов характеристик и сильных разрывов рассмотрено обобщенное уравнение теплопроводности:

Основные положения диссертации изложены в работах

1. Скляр О. Н., Босяков С. М. Характеристические поверхности для связных термоупругих полей в кубически анизотропных средах // Строительство. – 2000. – № 1. – С. 117—125.
2. Босяков С. М., Скляр О. Н. Характеристики для кубически анизотропных термоэлектропроводных тел // Вестні НАН Беларусі. Сер. фіз. – тэх. навук. – 2000. — № 3. – С. 108—110.
3. Мартышенко М. Д., Босяков С. М. Поверхности сильного разрыва в теории термоупругости кубически анизотропных тел // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2000. — № 3. — С. 78—81.
4. Босяков С. М. Волновые процессы и бихарактеристики в микрополярных изотропных телах // Вестник БПИ. – 2000. — № 4. – С. 6—8.
5. Босяков С. М., Скляр О. Н. Поверхности слабого разрыва для кубически анизотропных твердых тел // ИФЖ. – 2000. – Т. 73, № 3. – С. 662—664.
6. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Поверхности разрыва для кубически анизотропного тела в микрополярной теории термоупругости // ИФЖ. – 2000. – Т. 73, № 5. – С. 1027—1032.
7. Скляр О. Н., Босяков С. М. Сильные разрывы в динамической теории упругости кубически анизотропных тел // Материалы, технологии, инструменты. – 2000. – Т. 5, № 4. – С. 26—28.
8. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Микрополярная теория термоупругости кубически анизотропного тела // Материалы, технологии, инструменты. – 2001. – Т. 6, № 3. – С. 3 – 5.
9. Босяков С. М. Распространение поверхностей разрыва в термоупругом изотропном теле с учетом времени релаксации теплового потока // Вестник БГТУ. – 2001. — № 4. – С. 45—48.
10. Босяков С. М., Скляр О. Н. Распространение характеристических поверхностей в упругом теле с тремя материальными постоянными // Вестник БГТУ. – 2001. — № 4. – С. 39—44.
11. Босяков С. М. Распространение поверхностей разрыва в анизотропных термоупругих телах // VIII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. конф. Минск, 19—24 июня. 2000 г. В 4 частях / БГУ. – Минск. 2000. – Ч. 3 – С. 107.
12. Босяков С. М. Разрешающая система уравнений кубически анизотропных термоупругих сред с учетом локальных вращений // Международная научно-техническая конференция, посвященная 80-летию Белорусской госу-

дарственной политехнической академии: Тез. докл. конф. Минск, 8—11 ноября. 2000 г. В 10 частях / БГПА. — Минск, 2000. — Ч. 5 — С. 49.

13. Bosiakov S. M. Method of characteristics for a dynamic problem of cubic anisotropic bodies in classic and micropolar theory of elasticity // 2nd European Conference on Computational Mechanics: Abstracts, Cracow, Poland, June 26—29, 2001 / Cracow University of Technology. — Cracow, 2001. — P. 588—589.



РЭЗЮМЕ

Басякоў Сяргей Міхайлавіч

Метад характарыстык у дынамічных задачах
механікі дэфарміруемага цвёрдага цела

Ключавыя словы: метады характарыстык, метады моцных разрываў, кінематычныя і дынамічныя ўмовы сумеснасці, паверхні характарыстык, паверхні моцнага разрыву, біхарактарыстыкі, паверхні канцоў вектароў рэфракцыі, хвалявыя фронты, лакуны, прамянёвыя і фазавыя хуткасці.

Аб'екты даследавання: кубічна анізатропныя тэрмапругкія і п'езаэлектрычныя асяроддзі, мікрапалярныя кубічна анізатропныя пругкія і ізатропныя тэрмапругкія асяроддзі.

Мэта работы заключаецца ў знаходжанні ўраўненняў распаўсюджвання паверхняў разрыву для пругкіх, тэрмапругкіх і п'езаэлектрычных кубічна анізатропных і мікрапалярных целаў, іх колькасным і графічным аналізе, усталяванні заканамернасцяў хвалявых рухаў у гэтых целах.

Дадзена прымяненне метадаў характарыстык і моцных разрываў агульнай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў з прыватнымі вытворнымі дараўнення дынамічных задач тэорыі абагульненай тэрмапругкасці анізатропных і мікрапалярных целаў. Выведзены ўраўненні распаўсюджвання паверхняў разрыву ў такіх асяроддзях і з іх дапамогай вызначаны хуткасці распаўсюджвання пругкіх, тэрмапругкіх і п'езаэлектрычных хваляў. Атрыманы ўраўненні біхарактарыстык і на іх аснове праведзена пабудова хвалявых франтоў у некаторых плоскасцях сіметрыі кубічна анізатропных целаў і знойдзены плоскія вуглы лакун для шэрагу кубічна анізатропных матэрыялаў. Для рашэння ўраўненняў характарыстык у агульным выпадку прыменены трыганаметрычныя формулы для каранёў прыведзенага ўраўнення трэцяй ступені. Пабудаваны паверхні канцоў вектароў рэфракцыі і трохмерныя хвалявыя фронты пругкіх і п'езаактыўных хваляў у некаторых кубічна анізатропных матэрыялах. Праведзена якаснае і колькаснае апісанне лакун, якія ўзнікаюць пры распаўсюджванні квазіпалярных хваляў. Праведзены аналіз распаўсюджвання тэрмапругкіх хваляў з улікам канчатковай хуткасці распаўсюджвання цягла для дынамічнай задачы кубічна анізатропнага, мікрапалярнага целаў у напружаннях і ўстаноўлены дзве канстанты, якія характарызуюць узасмасувязь механічнага і цяплага палёў. Разгледжаны ўплыў часу рэлаксацыі цяплага патоку на змяненні хуткасці распаўсюджвання тэрмапругкіх хваляў.

Вынікі, атрыманыя ў даннай працы, могуць быць прыменены ў дакладным машынабудаванні і прыборабудаванні, пры вызначэнні канстант анізатропных асяроддзяў.

РЕЗЮМЕ

Босяков Сергей Михайлович

Метод характеристик в динамических задачах механики деформируемого твердого тела

Ключевые слова: метод характеристик, метод сильных разрывов, кинематические и динамические условия совместности, поверхности характеристик, поверхности сильного разрыва, бихарактеристики, поверхности концов векторов рефракции, волновые фронты, лакуны, лучевые и фазовые скорости.

Объекты исследования: кубически анизотропные термоупругие и пьезоэлектрические среды, микрополярные кубически анизотропные упругие и изотропные термоупругие среды.

Цель работы заключается в нахождении уравнений распространения поверхностей разрыва для упругих, термоупругих и пьезоэлектрических кубически анизотропных и микрополярных тел, их численном и графическом анализе, установлении закономерностей волновых движений в этих телах.

Дано применение методов характеристик и сильных разрывов общей теории дифференциальных уравнений с частными производными к решению динамических задач теории обобщенной термоупругости анизотропных и микрополярных тел. Выведены уравнения распространения поверхностей разрыва в таких средах и с их помощью определены скорости распространения упругих, термоупругих и пьезоэлектрических волн. Получены уравнения бихарактеристик и на их основе проведено построение волновых фронтов в некоторых плоскостях симметрии кубически анизотропных тел и найдены плоские углы лакуп для ряда кубически анизотропных материалов. Для решения уравнений характеристик применены тригонометрические формулы для корней приведенного уравнения третьей степени. Построены поверхности концов векторов рефракции и трехмерные волновые фронты упругих и пьезоактивных волн в некоторых кубически анизотропных материалах. Проведено качественное и количественное описание лакуп, возникающих при распространении квазипоперечных волн. Проведен анализ распространения термоупругих волн с учетом конечной скорости распространения тепла для динамической задачи кубически анизотропного, микрополярного тел в напряжениях и установлены две константы, характеризующие взаимосвязь механического и теплового полей. Рассмотрено влияние времени релаксации теплового потока на изменение скорости распространения термоупругих волн.

Результаты, полученные в данной работе, могут найти применение в точном машиностроении и приборостроении, при определении термоупругих констант анизотропных сред.

ABSTRACT

Bosiakov S. M.

Method of the characteristics in dynamic problems
mechanics of a deformable solid body

Key words: a method of the characteristics, method of strong discontinuities, kinematic and dynamic conditions of compatibility, surface of the characteristics, surface of a strong discontinuities, bicharacteristic, surfaces of the extremities of vectors of a refraction, wavefronts, lakunas, ray and phase velocities.

Plants of research: cubic anisotropic thermoelastic and piezoelectric mediums, micropolar cubic anisotropic elastic and isotropic thermoelastic mediums.

The purpose of dissertation consists in a finding of the equations of distribution of discontinuity surfaces for elastic, thermoelastic both piezoelectric cubic of anisotropic and micropolar bodies, and also in their numerical and grafical analysis.

The application of methods of the characteristics and strong disruptures of the blanket theory of the differential equations with partial differential derivatives to the solution of dynamic problems of the theory of a generalized thermoelasticity of anisotropic and micropolar bodies. The equations of propagation of surfaces of discontinuity in such mediums are obtained and with their help the velocities of propagation elastic, thermoelastic and piezoelectric waves are determined. The systems of bicharacteristics are obtained and on their basis the build-up of wavefronts in some planes of symmetry cubic of anisotropic bodies is carried out and the plane angle of lacunas for a series cubic of anisotropic materials are found. The trigonometric formulas for roots of a reduced equation of the third degree are generally applied for the solution of the equations of the characteristics. The surfaces of the extremities of vectors of a refraction and three-dimensional wavefronts elastic and piezoelectric of waves in some cubic anisotropic materials are constructed and the qualitative and quantitative description of lacunas incipient at propagation of quasitransversal waves is carried out. The analysis of propagation thermoelastic of waves is carried out in view of terminating velocity of propagation of heat for a dynamic problem cubic of anisotropic, micropolar bodies in stresses and two constants describing interrelation of mechanical and thermal fields set. The influence of a relaxation's time of a thermal stream on change of velocity of propagation of thermoelastic waves are considered.

The results obtained in the given dissertation, can find application in a precise machine industry and instrument making, at definition of thermoelastic constants of anisotropics mediums.

Босяков Сергей Михайлович

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Подписано в печать 8.04.02 г. Формат 60×84₁₆. Бумага "Чайка". Уч. изд. л. 1,5.
Усл. печ. л. 1,4. Заказ № 241. Тираж 120 экз. Отпечатано на ризографе
Учреждения образования "Брестский государственный технический
университет".

Адрес редакции: 224017, г. Брест, ул. Московская, 267, тел. 42 04 63.