

Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»
(ВГУ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА)

УДК 517.956.4
Per № 20191823

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
профессор

_____ Е.Я. Аршанский
« ____ » _____ 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Системы нелинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия
(заключительный)

договор с БРФФИ № Ф19М-062 от 02.05.2019 г.

Руководитель НИР,
старший преподаватель

_____ А.И. Никитин
« ____ » _____ 2021 г.

Витебск 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР, старший
преподаватель кафедры прикладного
и системного программирования,
ВГУ имени П.М. Машерова

_____ А.И. Никитин
(раздел 2, 4, 5, 7, 8)

Исполнители:
старший преподаватель кафедры
геометрии и математического анализа,
ВГУ имени П.М. Машерова

_____ Т.В. Кавитова
(раздел 1, 3, 6)

Нормоконтроль

_____ Т.В. Харкевич

РЕФЕРАТ

Отчет 58 с., 1 кн., 39 источников

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ,
НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ЛОКАЛЬНОЕ
СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ,
НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

Объект исследования – поведение решений начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями.

Цель работы – исследование начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами.

Рассмотрены начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений типа реакция-диффузия с различными граничными условиями. Построен механизм доказательства локального существования решения для начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелокальным граничным условием с переменными коэффициентами. Построен принцип сравнения решений начально-краевых задач для систем полулинейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами и неотрицательными начальными данными. Построены механизмы доказательства достаточных условий единственности и неединственности решений для начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений типа реакция-диффузия. Изучен вопрос положительности решений для полулинейного параболического уравнения с нелокальным граничным условием с переменными коэффициентами. Построен механизм доказательства достаточных условий существования и отсутствия глобальных решений для начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений типа реакция-диффузия. Изучен вопрос построения множества

разрушения решений для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Полученные результаты могут использоваться у специалистов по общей теории дифференциальных уравнений или по дифференциальным уравнениям с частными производными, а также при чтении курсов по теории нелинейных параболических уравнений. Данные начально-краевые задачи описывают математические модели в различных отраслях науки (химия, гидродинамика, генетика и т.д.).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 Существования локального решения начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями	9
2 Принцип сравнений решений начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями	15
Рассмотрим начально-краевую задачу для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями:.....	15
3 Единственность и неединственность решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями	19
4 Единственность и неединственность решений начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием.....	22
5 Положительность решений начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями	27
6 Существование и отсутствие глобальных решений начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием.....	29
7 Существование и отсутствие глобальных решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с линейными нелокальными граничными условиями	35
8 Множество разрушения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.	44
9 Изучение перспектив дальнейшего развития исследований и практического использования полученных результатов	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	54

ВВЕДЕНИЕ

Начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями рассматривались многими авторами (см., например, [6, 8-12, 18-27] и имеющуюся в них библиографию). В работах [18], [19] рассматривалась начально-краевая задача с нелокальными граничными условиями Дирихле для полулинейного параболического уравнения с переменным коэффициентом

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x,t)u^p, x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega, \end{cases}$$

где p, l – положительные постоянные, функции $c(x,t)$, $k(x,y,t)$, $u_0(x)$ удовлетворяют условиям, аналогичным условиям исходной задачи. Получен ряд утверждений о единственности решения, существовании и отсутствии глобальных решений.

В работах [22], [23] рассмотрена начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p, v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q, x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_{\Omega} k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,t) = \int_{\Omega} k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

где p, q, m, n – положительные постоянные, Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, с гладкой границей $\partial\Omega$, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ – неотрицательные локально непрерывные по Гельдеру функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ – неотрицательные непрерывные функции, определенные при $x \in \partial\Omega, y \in \bar{\Omega}, t \geq 0$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции,

удовлетворяющие граничным условиям при $t=0$. Для данной задачи доказано существование локального классического решения, получены достаточные условия существования и отсутствия глобальных решений. Аналогичные результаты получены в работе [4] для схожей начально-краевой задачи с граничными условиями Неймана.

Как видно из работ, исследование начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами в отличие от постоянных коэффициентов вызывает сложность, ввиду отсутствия результатов даже для соответствующих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель исследовательской работы состоит в разработке некоторого математического аппарата, который позволит проводить исследование общего класса начально-краевых задач для параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами, а также даст общий подход и ряд новых методик для исследования свойств решений таких задач.

Поставленная цель предполагает решение следующих задач:

1) доказать существования локального решения начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями;

2) построить принцип сравнений решений начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями;

3) исследовать вопросы единственности и неединственности решений начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями;

4) исследовать вопросы существования и отсутствия глобальных решений начально-краевой задачи для полулинейного параболического

уравнения и систем уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями;

5) рассмотреть множество разрушения решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями.

Новизна результатов исследования проекта заключается в построении общих механизмов доказательства существования локального решений, доказательства принципа сравнения решений, а также в установлении достаточных условий единственности и неединственности решений общего класса начально-краевых задач для нелинейных параболических уравнений и систем уравнений с нелокальными граничными условиями с переменными коэффициентами.

Полученные результаты исследования носят теоретический характер и могут использоваться у специалистов по общей теории дифференциальных уравнений или по дифференциальным уравнениям с частными производными, а также при чтении курсов по теории нелинейных параболических уравнений. Теоретические положения работы в дальнейшем могут быть использованы при написании научных работ, публикации монографий и статей, разработке учебной литературы и в учебном процессе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Квиникадзе, Г.Г. О строго возрастающих решениях систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.Г. Квиникадзе // Труды Института прикладной математики им. И.Н. Векуа Тбилисского государственного университета. – 1990. – Т. 37. – С. 41–49.
2. Коньков, А.А. О некоторых априорных оценках для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера / А.А. Коньков // Математические заметки. – 2003. – Т. 73, вып. 5. – С. 792–796.
3. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / А.О. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967. – 746 с.
4. Никитин, А. И. Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями / А. И. Никитин // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2015. – №5(89). – С. 14–19.
5. Рабцевич, В.А. О быстрорастущих решениях систем Эмдена-Фаулера произвольного порядка / В.А. Рабцевич // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 222–227.
6. Bedjaoui, N. Critical blowup exponents for a system of reaction-diffusion equations with absorption / N. Bedjaoui, P. Souplet // Z. angew. Math. Phys. – 2002. – Vol. 53. – P. 197-210.
7. Cortazar, C. On the short-time behavior of the free boundary of a porous medium equation / C. Cortazar, M. del Pino, M. Elgueta // Duke Mathematical Journal. – 1997. – Vol. 87. – P. 133–149.
8. Cui, Z. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition / Z. Cui, Z. Yang // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 342, № 1. – P. 559–570.

9. Cui, Z. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition / Z. Cui, Z. Yang, R. Zhang // *Applied Mathematics and Computation*. – 2013. – Vol. 224. – P. 1–8.
10. Deng, K. Comparison principle for some nonlocal problems / K. Deng // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1993. – Vol. 50, № 3. – P. 517–522.
11. Deng, K. Blow-up for a parabolic system coupled in an equation and a boundary condition / K. Deng, C.L. Zhao // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*. – 2001. – Vol. 131. – P. 1345–1355.
12. Deng, K. Blow-up for the equation with a general memory boundary condition / K. Deng, Z. Dong // *Communications on Pure and Applied Analysis*. – 2012. – Vol. 11. – P. 2147–2156.
13. Fang, Z. B. Roles of weight functions to a nonlocal porous medium equation with inner absorption and nonlocal boundary condition / Z. B. Fang, J. Zhang, S.-C. Yi // *Abstr. Appl. Anal.* – 2012. – Vol. 2012. – P. 1–16.
14. Fang, Z. B. Influence of weight functions to a nonlocal p -Laplacian evolution equation with inner absorption and nonlocal boundary condition / Z. B. Fang, J. Zhang // *J. Inequal. Appl.* – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–10.
15. Fang, Z. B. Global and blow-up solutions for the nonlocal p -Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition / Z. B. Fang, J. Zhang // *J. Integral Equations Appl.* – 2014. – Vol. 26, № 2. – P. 171–196.
16. Fang, Z. B. Global existence and blow-up of solutions for p -Laplacian evolution equation with nonlinear memory term and nonlocal boundary condition / Z. B. Fang, J. Zhang // *Bound. Value Probl.* – 2014. – Vol. 8. – 17 p.
17. Gao, Y. Existence and blow-up of solutions for a porous medium equation with nonlocal boundary condition / Y. Gao, W. Gao // *Applicable Analysis*. – 2011. – Vol. 90. – P. 799–809.
18. Gladkov A.L. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2008. – Vol. 338, no. 1. – P. 264–273.

19. Gladkov A.L. Uniqueness and nonuniqueness for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary condition / A.L. Gladkov, K.I. Kim // *Advances in Mathematical Sciences and Applications*. – 2009. – Vol. 19, no. 1. – P. 39–49.
20. Gladkov, A. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A. Gladkov, M. Guedda // *Nonlinear Analysis*. – 2011. – Vol. 74. – P. 4573–4580.
21. Gladkov, A. Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A. Gladkov, M. Guedda // *Applicable Analysis*. – 2012. – Vol. 91, № 12. – P. 2267–2276.
22. Gladkov A.L. A reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // *International Journal Partial Differential Equations*. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–10.
23. Gladkov A.L. On the existence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with nonlinear nonlocal boundary conditions / A.L. Gladkov, A.I. Nikitin // *Differential Equations*. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 467–482.
24. Gladkov, A. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov, T. Kavitova // *Applicable Analysis*. – 2016. – Vol. 95. – P. 1974–1988.
25. Gladkov, A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions / A. Gladkov, T. Kavitova // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2016. – Vol. 68, № 2. – P. 162–174.
26. Hu, B. The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition / B. Hu, H.-M. Yin // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1994. – Vol. 346, № 1. – P. 117–135.
27. Hu, B. Critical exponents for a system of heat equations coupled in a non-linear boundary conditions / B. Hu, H.-M. Yin // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 1996. – Vol. 19, № 14. – P. 1099–1120.
28. Kahane, C.S. On the asymptotic behavior of solutions of parabolic equations / C.S. Kahane // *Czechoslovak Mathematical Journal*. – 1983. – Vol. 33.

– P. 262–285.

29. Lin, Z. Uniform blowup profiles for diffusion equations with nonlocal source and nonlocal boundary / Z. Lin, Y. Liu // *Acta Math. Sci.* – 2004. – Vol. 24, № 3. – P. 443–450.

30. Mu, C. Properties of positive solutions for a nonlocal reaction–diffusion equation with nonlocal nonlinear boundary condition / C. Mu, D. Liu, S. Zhou // *J. Korean Math. Soc.* – 2010. – Vol. 47, № 6. – P. 1317–1328.

31. Pao, C.V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations* / C.V. Pao. – New York: Plenum Press, 1992. – 785 p.

32. Pao, C.V. Asimptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions / C.V. Pao // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 1998. – Vol. 88. – P. 225–238.

33. Wang, Y. Properties of positive solution for nonlocal reaction–diffusion equation with nonlocal boundary / Y. Wang, C. Mu, Z. Xiang // *Boundary Value Problem.* – 2007. – Vol. 2007. – P. 1–12.

34. Wang, Y. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition / Y. Wang, C. Mu, Z. Xiang // *Appl. Math. Comput.* – 2007. – Vol. 192. – P. 579–585.

35. Yang, L. Global existence and blow-up of solutions to a degenerate parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundaries / L. Yang, C. Fan // *Monatshefte für Mathematik.* – 2014. – Vol. 174, № 3. – P.493–510.

36. Ye, Z. Global existence and blow-up for a porous medium system with nonlocal boundary conditions and nonlocal sources / Z. Ye, X. Xu // *Nonlinear Analysis.* – 2013. – Vol. 82. – P. 115–126.

37. Yin, H.M. On a class of parabolic equations with nonlocal boundary conditions / H.M. Yin // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2004. – Vol. 294, № 2. – P. 712–728.

38. Zheng, S. Roles of weight functions in a nonlinear nonlocal parabolic system / S. Zheng, I. Kong // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.* – 2008. – Vol. 68, № 8. – P. 2406–2416.

39. Zhong, G. Blow up problems for a degenerate parabolic equation with nonlocal source and nonlocal nonlinear boundary condition / G. Zhong , L. Tian // Boundary Value Problem. – 2012. – Vol. 2012. – P. 1–14.