

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
(ВГУ имени П.М. Машерова)

УДК 512.643.4: 512.622
Рег.№ 20200658



ТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе

Е.Я. Аршанский

"4" января 2021 г.

О Т Ч Е Т
о научно-исследовательской работе
**Разработка точных и приближенных методов нахождения решений
нелинейных матричных уравнений**
(заключительный)
Грант аспирантов, докторантов и студентов
Министерства образования Республики Беларусь

Ответственный исполнитель,
аспирант

М.М. Чернявский 4.01.2021 М.М. Чернявский

Нормоконтроль

Т.В. Харкевич 4.01.2021 Т.В. Харкевич

Реферат

Отчет 54 с., 1 кн., 25 источников, 2 прилож.

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, АЛГОРИТМ БЕРНУЛЛИ, ФОРМУЛЫ ЭЙТКЕНА, КОММУТАТИВНЫЕ МАТРИЦЫ, СИМВОЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Объект исследования – алгоритмы точного и приближенного решения алгебраических уравнений, допускающие адаптацию на матричный случай.

Методы исследования – методы математического анализа с использованием систем компьютерной математики.

Цель работы – разработать новые удобные в применении алгоритмы численного и аналитического нахождения решений нелинейных матричных уравнений.

Работа выполнена на базе кафедр инженерной физики и геометрии и математического анализа Витебского государственного университета имени П.М. Машерова.

Научная значимость полученных результатов – разработаны новые аналитические алгоритмы приближенного решения для некоторых типов матричных нелинейных уравнений, а также методы символьного решения алгебраических уравнений шестой степени специального вида.

Основные результаты работы:

1. Разработан новый эффективный метод локализации и определения числа действительных решений у трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами;
2. Полученные результаты применены при исследовании некоторых типов трёхчленных матричных уравнений с матрицами второго, третьего и четвёртого порядков;
3. Осуществлена модификация формул Эйткена для приближенного нахождения простых корней алгебраического уравнения произвольной степени;
4. Проведена адаптация полученных на основе модификации формул Эйткена аналитических выражений на случай полиномиального матричного уравнения с перестановочными коэффициентами и на конкретных числовых примерах проверена их эффективность;

Практическая значимость научно-исследовательской работы заключается в разработке новых аналитических алгоритмов решения некоторых типов матричных и алгебраических уравнений. Результаты работы представляют интерес для специалистов в области нелинейного функционального и матричного анализа, а также могут быть

использованы при проведении последующих исследований по изучению и разработке новых методов решения матричных нелинейных уравнений.

Результаты исследования могут быть применены специалистами, занимающимися решением матричных нелинейных уравнений, возникающих в различных областях естествознания.

Социальная и экономическая значимость выполненной работы заключается в том, что ее результаты могут быть использованы специалистами, занимающимися решением матричных нелинейных уравнений и алгебраических уравнений высоких степеней, возникающих в различных областях естествознания и экономики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1 Результаты использования новых методов анализа трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами и их применение при исследовании некоторых типов трехчленных матричных уравнений	8
1.1 Применение новых методов анализа трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами на примерах уравнений пятой степени	8
1.2 Исследование некоторых типов трехчленных матричных уравнений	12
2 Модификация формул Бернулли–Эйткена и их применение для приближенного нахождения корней матричных полиномиальных уравнений с перестановочными коэффициентами	20
2.1 О методе Д. Бернулли и его обобщении Эйткеном	20
2.2 Краткое описание модификации формул Бернулли–Эйткена	22
2.3 Применение модифицированных формул Эйткена для приближенного нахождения корней матричных уравнений с коммутативными коэффициентами	26
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	29
ПРИЛОЖЕНИЕ А	32
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	34

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные матричные уравнения в настоящее время достаточно широко встречаются в различных приложениях, например, в теории управления, при исследовании дифференциальных уравнений в теории колебаний, а также при изучении марковских процессов [1–4]. Несмотря на это, активное изучение подобных уравнений и разработка методов их решения начались лишь в конце XX – начале XXI века, чему поспособствовали развитие функционального анализа и быстрый рост вычислительных возможностей компьютерной техники. Поэтому в последних полтора десятилетия развитие методов решения матричных нелинейных уравнений является одним из ключевых направлений современного функционального анализа и численных методов математики в целом.

Тем не менее, важно отметить, что большинство попыток обобщения формул решения обычных скалярных уравнений на случай матричных уравнений провалилось вследствие свойства некоммутативности матричного умножения, поэтому прямых методов решения таких уравнений существует достаточно мало, причем значительная часть из них требуют, чтобы матрицы, входящие в уравнения, обладали некими заданными свойствами [5, 6]. Даже в относительно простых случаях, когда все матричные коэффициенты перестановочны между собой и для них существует возможность обобщения некоторых алгоритмов решения обычных скалярных алгебраических уравнений, применение этих алгоритмов в большинстве случаев не позволяет отыскать все корни уравнения.

Существующие же в настоящее время численные алгоритмы решения матричных нелинейных уравнений не сочетают в себе одновременно свойства универсальности и простоты применения на конкретных числовых примерах. Среди недостатков известных численных методов стоит отметить следующие: применимость к ограниченным классам уравнений, неудобство в программировании, в отдельных случаях излишняя громоздкость и частая невозможность нахождения всех решения уравнения. Так например, итерационный метод мажорантных уравнений Канторовича для нахождения приближенного решения операторных уравнений в банаховых пространствах достаточно эффективно можно применять для решения матричных полиномиальных уравнений, в том числе, и в случаях матриц большого размера [7]. Однако этим методом можно найти только один корень уравнения. Отдельной открытой проблемой при использовании численных методов является локализация корней матричного уравнения и выбор начального приближения для уточнения необходимого корня итерационными методами [8–12].

Всё вышеперечисленное подтверждает, что разработка новых более удобных методов решения матричных нелинейных уравнений и их модификаций остается актуальной.

Цель работы – разработать новые удобные в применении алгоритмы численного и аналитического нахождения решений нелинейных матричных уравнений.

За наиболее перспективный путь достижения поставленной цели была выбрана разработка новых алгоритмов приближенного решения для некоторых типов алгебраических уравнений с возможностью их полной или частичной адаптации на аналогичный матричный случай. В связи с этим, был сформулирован ряд соответствующих задач.

Задачи исследования:

- разработать новый эффективный метод локализации и определения числа действительных решений у трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами;
- осуществить попытку адаптации результатов предыдущей задачи в разработке методов решения для некоторых типов трёхчленных матричных уравнений с матрицами второго, третьего и четвёртого порядков;
- осуществить модификацию формул Эйткена для приближенного нахождения простых корней алгебраического уравнения произвольной степени;
- провести адаптацию полученных на основе модификации формул Эйткена аналитических выражений на случай полиномиального матричного уравнения с перестановочными коэффициентами и на конкретных числовых примерах проверить их эффективность;

Методы исследования – методы математического анализа с использованием систем компьютерной математики.

Результаты исследования могут быть применены специалистами, занимающимися решением матричных нелинейных уравнений, возникающих в различных областях естествознания. Результаты вносят вклад в развитие фундаментальной математики и также представляют интерес для всех, кто сталкивается с решением трехчленных алгебраических уравнений. Об эффективности разработанных в ходе выполнения задания НИР алгоритмов можно судить после применения их на конкретных числовых примерах, что также является значимой составляющей проводимого исследования.

Отчет состоит из двух разделов.

В первом разделе приведено краткое описание новых методов анализа трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами и их применение при

исследовании некоторых типов трехчленных матричных уравнений. Подробное описание результатов работы в данном направлении представлено в статье [13] и приложении Б.

Второй раздел посвящен описанию модификаций формул Бернулли–Эйткена и их применению для нахождения приближенных решений полиномиальных матричных уравнений с перестановочными коэффициентами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory / A. Hisham [et al.]. – Basel: Birkhäuser Verlag, 2003. – 584 p.
- 2 Juang, J. Global Existence and Stability of Solutions of Matrix Riccati Equations / J. Juang // J. of Math. Anal. and Appl. – 2001. – Vol. 258. – P. 1–12.
- 3 Bini, D.A. Numerical Methods for Structured Markov Chains / D.A. Bini, G. Latouche, B. Meini. – King's Lynn: Oxford University Press, 2005. – 327 p.
- 4 A quadratically convergent Bernoulli-like algorithm for solving matrix polynomial equations in Markov chains / C. He [et al.] // Electr. Transactions on Numer. Anal. – 2004. – Vol. 17. – P. 151–167.
- 5 Horn, R. Topics in matrix analysis / R. Horn, C. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 607 p.
- 6 Higham, N.J. Functions of Matrices: Theory and Computation / N.J. Higham. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.
- 7 Чернявский, М.М. Метод мажорантных уравнений Л.В. Канторовича для решения матричных нелинейных уравнений / М.М. Чернявский // XI Машеровские чтения: матер. междунар. науч.-практ. конф. студ. аспирант. и молод. учёных, Витебск, 18 октября 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск, 2017. – С. 38–39.
- 8 Ramadan, M.A. Iterative positive definite solutions of the two nonlinear matrix equations / M.A. Ramadan, T.S. El-Danaf, N.M. El-Shazly // Applied Math. and Comput. – 2005. – Vol. 164. – P. 189–200.
- 9 Bai, Z.-Z. On two Iteration Methods for the Quadratic Matrix Equations / Z.-Z. Bai, X.-X. Guo, J.-F. Yin // Intern. J. Numer. Anal. Model. – 2005. – Vol. 2, № 1. – P. 114–122.
- 10 Guo, C.-H. On a quadratic matrix equation associated with an M-matrix / C.-H. Guo // IMA J. Numer. Anal. – 2003. – Vol. 23, № 1. – P. 11–27.
- 11 Bai, Z.-Z. Modified Bernoulli iteration method for quadratic matrix equation / Z.-Z. Bai, Y.-H. Gao // Journal of Computational Mathematics. – 2007. – Vol. 25, № 5. – P. 498–511.
- 12 A quadratically convergent Bernoulli-like algorithm for solving matrix polynomial equations in Markov chains / C. He [et al.] // Electr. Transactions on Numer. Anal. – 2004. – Vol. 17. – P. 151–167.
- 13 Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трёхчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.

14 Кравченко, В.Ф. Аналитический метод решения трехчленных алгебраических уравнений с помощью элементарных функций K_{ml} / В.Ф. Кравченко // Ученые записки ЦАГИ. – 1988. – Т. 19, № 4. – С. 135–144.

15 Кутищев, Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени / Г.П. Кутищев. – М.: Издательство ЛКИ, 2019. – 232 с.

16 Трубников, Ю.В. О распределении корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 1(106). – С. 21–33.

17 Трубников, Ю.В. О связи между корнями алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 2(107). – С. 11–17.

18 Чернявский, М.М. О новом методе определения числа действительных корней у трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами / М.М. Чернявский // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях : тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції для студентів та молодих вчених, Харків, 13–14 березня 2020 р. – Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2020. – С. 10–11.

19 Трубников, Ю.В. Локализация и приближенные аналитические формулы для корней алгебраического уравнения пятой степени / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике : материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – С. 30–33.

20 Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2014. – 336 с.

21 Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ -алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.

22 Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных: в 2 т. : пер. с лат. Е.Л. Пацановского / Л. Эйлер. 2-е изд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. Т. 1. – 315 с.

23 Aitken, A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations / A.C. Aitken // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1927. – Vol. 46. – P. 289–305.

24 Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2017. – № 4(97). – С. 29–33.

25 Трубников, Ю.В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 5–17.