УДК 517.94

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ $t \to +\infty$ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ»

С.М. Бородич
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В настоящей работе рассматривается система двух нелинейных параболических уравнений типа «реакция-диффузия», для которой соответствующая начально-краевая задача имеет единственное решение, определенное при всех $t \geq 0$.

Цель работы – исследовать поведение при $t \to +\infty$ *семейств решений, начальные значения которых образуют произвольное ограниченное множество в банаховом пространстве начальных данных системы.*

Материал и методы. *Материалом исследования является система двух уравнений типа «реакция-диффузия». Использованы методы теории нелинейных уравнений математической физики, а также теории бесконечномерных динамических систем.*

Результаты и их обсуждение. *При предположении о выполнении определенных условий стабилизации функций, входящих в правые части уравнений, доказано, что проекции траекторий ограниченных множеств на некоторое подпространство фазового пространства системы притягиваются к аттрактору некоторой вспомогательной системы уравнений.*

Заключение. *Изложенный подход к изучению поведения решений рассматриваемой системы уравнений применим к исследованию достаточно широкого класса систем химической кинетики, правые части которых содержат функции, обладающие аналогичным свойством стабилизации.*

Ключевые слова: *система типа «реакция-диффузия», полугруппа операторов, предельное множество, максимальный аттрактор.*

ON THE BEHAVIOR AS $t \to +\infty$ OF SOLUTIONS OF A REACTION-DIFFUSION TYPE SYSTEM

S.M. Borodich
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

In this paper, we consider a system of two nonlinear parabolic equations of reaction-diffusion type for which the corresponding initial-boundary value problem has a unique solution defined for all $t \geq 0$.

The research purpose is to investigate the behavior as $t \to +\infty$ *of families of solutions whose initial values form arbitrary bounded sets in the Banach space of the initial data of the system.*

Material and methods. *The material of the research is a system of two reaction-diffusion equations. The methods of the theory of nonlinear equations of mathematical physics as well as the methods of the theory of infinite-dimensional dynamical systems are used.*

Findings and their discussion. *Under the assumption that certain conditions for the stabilization of the functions included in the right-hand sides of the equations are satisfied, it is proved that the projections of the trajectories of bounded sets onto some subspace of the phase space of the system are attracted to the attractor of some auxiliary system of equations.*

Conclusion. *The described approach to the study of the behavior of solutions of the system considered here is applicable to the study of a fairly wide class of systems of chemical kinetics whose right-hand sides contain functions with a similar stabilization property.*

Key words: *reaction-diffusion type system, semigroup of operators, limit set, maximal attractor.*

В статье рассматривается система двух нелинейных параболических уравнений типа «реакция-диффузия», для которой соответствующая начально-краевая задача имеет единственное решение, определенное при всех $t \geq 0$. Такого рода системы часто встречаются при математическом моделировании в задачах химической кинетики. Поэтому важной задачей является изучение вопроса о том, как ведут себя решения таких систем при больших временах или когда время стремится к бесконечности. Данной теме посвящено немало работ различных авторов (см., например, [1–5]).

В настоящей публикации исследуется поведение при $t \to +\infty$ семейств решений рассматриваемой системы, начальные значения которых образуют произвольное ограниченное множество в банаховом пространстве начальных данных системы. Предполагается, что функции, входящие в правые части уравнений, удовлетворяют определенным условиям стабилизации при стремлении одного из аргументов к $+\infty$. При выполнении этих условий удается обнаружить, что проекции траекторий ограниченных множеств на некоторое подпространство фазового пространства системы притягиваются к аттрактору некоторой вспомогательной системы уравнений.

Материал и методы. Материалом исследования является система двух уравнений типа «реакция-диффузия». Использованы методы теории нелинейных уравнений математической физики, а также методы теории бесконечномерных динамических систем.

Результаты и их обсуждение. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается следующая система класса «реакция-диффузия»:

$$\partial_t u = \Delta u - f(u,T), \quad \partial_t T = \Delta T + g(u,T), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\partial u / \partial \nu |_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial T / \partial \nu |_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

В (1), (2) $u = u(x,t)$, $T = T(x,t)$, $\nu = \nu(x)$ – нормаль к $\partial\Omega$. Предполагается, что функции $f(u,T)$, $g(u,T) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ и выполнены следующие условия:

$$\lim_{T\to+\infty} f(u,T) = \tilde f(u), \quad \lim_{T\to+\infty} g(u,T) = \tilde g(u), \quad \tilde f(u), \tilde g(u) \in C^1(\mathbf{R}), \tag{3}$$

$$c_0 |u|^p - C \le f(u,T)u \le C(|u|^p + 1), \tag{4}$$

$$0 < \varepsilon \le g(u,T) \le C\left(\frac{|u|^q}{1+|T|^\alpha} + |u|^r + 1 \right), \tag{5}$$

$$f'_u \xi_1^2 + (f'_T - g'_u)\xi_1\xi_2 - g'_T \xi_2^2 \ \ge -C|\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2, \tag{6}$$

$$\tilde f'(u) \ge c_0 |\tilde g'(u)|^2 - C, \quad |\tilde g'(u)| \le C(|u|^{r-1} + 1), \tag{7}$$

$$\left| f(u,T) - \tilde f(u) \right| \le h(T)(|u|^{p-1} + 1), \tag{8}$$

$$\left| g(u,T) - \tilde g(u) \right| \le h(T)(|u|^q + 1), \tag{9}$$

где $C, c_0 > 0$, $p > 2$, $0 < \alpha < 1$, $1 \le q \le \dfrac{p(1+\alpha)}{2}$, $q < \dfrac{p}{2} + \dfrac{4}{n-2}$ при $n \ge 3$, $1 \le r \le \dfrac{p}{2}$, $h(T) \in C(\mathbf{R})$, $h(T)$ ограничена и монотонно убывает на **R**, $h(T) \to 0$ при $T \to +\infty$.

Заметим, что в силу условий (3), (4) и (5) функции $\tilde f(u)$ и $\tilde g(u)$ удовлетворяют также условиям

$$c_0 |u|^p - C \le \tilde f(u)u \le C(|u|^p + 1), \quad 0 < \varepsilon \le \tilde g(u) \le C(|u|^r + 1). \tag{10}$$

В качестве пространства начальных данных задачи (1), (2) рассматривается пространство $E = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Пусть $(u_0, T_0) \in E$, $\tau > 0$. Стандартными методами (см. [6], [7]) устанавливается, что задача (1), (2) с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad T\big|_{t=0} = T_0 \tag{11}$$

имеет единственное решение (u,T) такое, что

$$u \in L_\infty([0,\tau]; L_2(\Omega)) \cap L_2([0,\tau]; H^1(\Omega)) \cap L_p([0,\tau]; L_p(\Omega)), \quad T \in L_\infty([0,\tau]; L_2(\Omega)) \cap L_2([0,\tau]; H^1(\Omega)).$$

Следовательно, задача (1), (2) порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t, t \ge 0\}$:

$$S_t : (u_0, T_0) \to (u(t), T(t)).$$

В дальнейшем для произвольной интегрируемой по Лебегу на Ω функции φ через $<\phi>$ будем обозначать ее среднее значение в этой области:

$$<\phi>=|\Omega|^{-1}\int_{\Omega}\phi(x)dx \qquad (|\Omega|=\int_{\Omega}dx).$$

Через V обозначим подпространство пространства $L_2(\Omega)$, состоящее из функций φ, для которых $<\phi>=0$.

Пусть (u,T) – решение задачи (1), (2) с начальными условиями (11), определенное при $t\geq 0$. Представим компоненту T в виде суммы $T=T_1+T_2$, где $T_2=<T>$ (очевидно, что $T_1(t)\in V \quad \forall t\geq 0$). Из (1), (2) получаем

$$\partial_t u=\Delta u-f(u,T_1+T_2), \qquad \partial u/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega}=0, \tag{12}$$

$$\partial_t T_1=\Delta T_1+G_1(u,T_1+T_2), \qquad \partial T_1/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega}=0, \tag{13}$$

$$\partial_t T_2=G_2(u,T_1+T_2), \tag{14}$$

где $G_1(u,T_1+T_2)=g(u,T_1+T_2)-<g(u,T_1+T_2)>$, $G_2(u,T_1+T_2)=<g(u,T_1+T_2)>$. Начальные условия (11) при рассматриваемом представлении T перепишутся в следующем виде:

$$u\big|_{t=0}=u_0, \quad T_1\big|_{t=0}=T_{10}, \quad T_2\big|_{t=0}=T_{20},$$

где $T_{10}=T_0-<T_0>$, $T_{20}=<T_0>$.

Через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{L_s}$ и $\|\cdot\|_E$ ниже обозначаем нормы в пространствах $L_2(\Omega)$, $L_s(\Omega)$ $(s\geq 1)$ и E соответственно.

Лемма 1. *Пусть $(u_0,T_0)\in E$, $||(u_0,T_{10})||_E\leq R$, $T_{20}\geq -R$ для некоторого $R>0$. Пусть (u,T) – решение задачи (1), (2) с начальными условиями (11), определенное при $t\geq 0$. Тогда при $t\geq 0$ справедливы оценки*

$$||(u(t),T_1(t))||_E\leq C_1(R), \tag{15}$$

$$T_2(t)\geq \varepsilon t-R, \tag{16}$$

$$\int_0^t(||\nabla u(t)||^2+||u(t)||_{L_p}^p)\,dt\leq C_2t+C_3(R), \tag{17}$$

$$\int_0^t||\nabla T_1(t)||^2\,dt\leq C_4(R)t+C_5(R) \tag{18}$$

(константы $C_1(R)$, $C_3(R)$, $C_4(R)$ и $C_5(R)$ зависят от R, но не зависят от (u_0,T_0)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (14) с учетом условия (5) получаем

$$T_2(t)\geq\varepsilon t+T_{20} \qquad \forall t\geq 0.$$

Отсюда и из условия леммы вытекает оценка (16).

Умножим (12) скалярно в $L_2(\Omega)$ на *u*. После несложных преобразований с использованием оценки (4) получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t||u||^2+||\nabla u||^2+c_0\int_{\Omega}|u|^p\,dx\leq C|\Omega|. \tag{19}$$

Интегрируя это неравенство по *t* от 0 до *t*, выводим оценку (17).

Умножив (13) скалярно в $L_2(\Omega)$ на T_1, получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t||T_1||^2+||\nabla T_1||^2=\int_{\Omega}G_1(u,T_1+T_2)T_1dx=\int_{\Omega}g(u,T)T_1dx. \tag{20}$$

Для каждого $t\geq 0$ определим множество

$$\Omega_t=\{x\in\Omega: T_1(x,t)\geq 0\}.$$

Ввиду условия (5) из (20) имеем

$$\frac{1}{2}\partial_t\,||T_1||^2+||\nabla T_1||^2 \;\le\; C\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{|u|^q}{1+|T|^\alpha}+|u|^r+1\right)T_1dx\,.$$

Складывая это неравенство с неравенством (19), умноженным на произвольную положительную константу *M*, получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t(M||u||^2+||T_1||^2)+M(||\nabla u||^2+c_0||u||^p_{L_p})+||\nabla T_1||^2 \;\le$$

$$\le\; C\int\limits_{\Omega_t}\frac{|u|^q\,T_1}{1+|T|^\alpha}dx+C\int\limits_{\Omega_t}(|u|^r+1)T_1dx+MC\,|\Omega|. \qquad (21)$$

Так как $T_2(t)\ge -R$ (в силу оценки (16)), то для всех $x\in\Omega_t$ имеем

$$\frac{T_1}{1+|T|^\alpha}\;\le\;\frac{T_1-R}{1+|(T_1-R)+(T_2+R)|^\alpha}+R\;\le\;T_1^{1-\alpha}+R.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega_t}\frac{|u|^q\,T_1}{1+|T|^\alpha}dx\;\le\;\int\limits_{\Omega}|u|^q|T_1|^{1-\alpha}\,dx\;+\;C_6(R)||u||^q_{L_q}\,.$$

Используя это неравенство, из (21) выводим

$$\frac{1}{2}\partial_t(M||u||^2+||T_1||^2)\;+\;M(||\nabla u||^2\;+\;c_0||u||^p_{L_p})+||\nabla T_1||^2\;\le$$

$$\le\;C\int\limits_{\Omega}|u|^q|T_1|^{1-\alpha}\,dx\;+\;C\int\limits_{\Omega}|u|^r|T_1|\,dx\;+\;C_7(R)||u||^q_{L_q}+\eta||T_1||^2\;+\;C_8(R,M,\eta) \qquad (22)$$

(здесь было применено также неравенство Юнга; $\eta>0$ не зависит от *R* и может быть выбрано сколь угодно малым).

Оценим первый интеграл в правой части неравенства (22). С помощью неравенства Гельдера получаем

$$\int\limits_{\Omega}|u|^q|T_1|^{1-\alpha}\,dx\;\le\;||\,|u|^q\,||_{L_{2/(1+\alpha)}}\,||\,|T_1|^{1-\alpha}\,||_{L_{2/(1-\alpha)}}\;=\;||u||^q_{L_{2q/(1+\alpha)}}||T_1||^{1-\alpha}\,.$$

Используя неравенство Юнга (с показателями $2/(1+\alpha)$ и $2/(1+\alpha)$), отсюда выводим

$$\int\limits_{\Omega}|u|^q|T_1|^{1-\alpha}\,dx\;\le\;C_9(\eta)||u||^{2q/(1+\alpha)}_{L_{2q/(1+\alpha)}}\;+\;\eta||T_1||^2\qquad\forall t\ge 0$$

(η – то же, что и в (22)).

Аналогично предыдущей оценке выводится оценка для второго интеграла в правой части неравенства (22):

$$\int\limits_{\Omega}|u|^r|T_1|\,dx\;\le\;C_9(\eta)||u||^{2r}_{L_{2r}}\;+\;\eta||T_1||^2\qquad\forall t\ge 0\,.$$

В силу полученных оценок для интегралов из (22) следует

$$\frac{1}{2}\partial_t(M||u||^2+||T_1||^2)\;+\;Mc_0||u||^p_{L_p}\;+\;||\nabla T_1||^2\;\le$$

$$\le\;C_{10}(R,\eta)||u||^p_{L_p}\;+\;C_{11}\eta||T_1||^2\;+\;C_{12}(R,M,\eta)\qquad\forall t\ge 0 \qquad (23)$$

(было учтено также, что $q<p,\;2q/(1+\alpha)\le p$ и $2r\le p$). Поскольку $T_1(t)\in V\;\;\forall t\ge 0$, то, согласно неравенству Пуанкаре,

$$||T_1||^2\le C_\Omega||\nabla T_1||^2\,.$$

Применяя эту оценку и выбирая сначала достаточно малое η, а затем достаточно большое *M* (зависящее от η и *R*), из (23) имеем

$$\partial_t(M||u||^2+||T_1||^2)\;+\;Mc_0||u||^p_{L_p}\;+\;||\nabla T_1||^2\;\le\;C_{13}(R)\qquad\forall t\ge 0\,. \qquad (24)$$

Отсюда, учитывая непрерывное вложение $L_p(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ и используя снова неравенство Пуанкаре, выводим

$$\partial_t(M||u||^2+||T_1||^2)\ +\ \gamma(M||u||^2\ +\ ||T_1||^2)\ \le\ C_{13}(R)\quad \forall t\ge 0$$

$(\gamma>0)$. Из этого дифференциального неравенства следует оценка (15).

Проинтегрировав (24) по *t* от 0 до *t*, получаем оценку (18). Лемма 1 доказана.

Ниже через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаем скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда при* $t>0$

$$||\nabla u(t)||^2+||\nabla T_1(t)||^2\ \le\ C_{14}(R)(t+t^{-1})+C_{15}(R).$$

Доказательство. Умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ уравнения (12) и (13) на $-t^2\Delta u(t)$ и $-t^2\Delta T_1(t)$ соответственно и сложим получившиеся равенства. После несложных преобразований с применением условия (6) имеем

$$\frac{1}{2}\partial_t(t^2||\nabla u||^2+t^2||\nabla T_1||^2)-t(||\nabla u||^2+||\nabla T_1||^2)\ =$$

$$=\ -t^2(||\Delta u||^2+||\Delta T_1||^2)+t^2\langle f(u,T)),\ \Delta u\rangle-t^2\langle G_1(u,T),\ \Delta T_1\rangle\ \le$$

$$\le\ -t^2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left[f_u'\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+(f_T'-g_u')\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial T_1}{\partial x_i}-g_T'\cdot\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_i}\right)^2\right]dx\ \le\ Ct^2(||\nabla u||^2+||\nabla T_1||^2).$$

Проинтегрировав это неравенство по *t* от 0 до *t* и воспользовавшись оценками (17) и (18), получаем

$$t^2(||\nabla u(t)||^2+||\nabla T_1(t)||^2)\ \le\ \int_0^t(Ct^2+t)(||\nabla u(t||^2+||\nabla T_1(t)||^2)dt\ \le\ (Ct^2+t)(C_{16}(R)t+C_{17}(R)),$$

откуда вытекает утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $(u_0,T_0)\in H^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$, (u,T) *– решение задачи (1), (2) с начальными условиями* $u\big|_{t=0}=u_0$, $T\big|_{t=0}=T_0$, *определенное при* $t\ge 0$. *Тогда при* $t\ge 0$ *имеет место оценка*

$$\int_0^t||u(t)||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}\,dt\ \le\ C_{18}t+C_{19}||u_0||_1^{2+\beta},$$

где $||\cdot||_1$ *– норма в пространстве* $H^1(\Omega)$, $\beta=4/(n-2)$ *при* $n\ge 3$ *и* $\beta>0$ *произвольно при* $n<3$.

Доказательство. Умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ уравнение (12) на $u|u|^\beta$ и проинтегрируем получившееся равенство по Ω:

$$\int_\Omega u|u|^\beta\,\partial_t u dx\ =\ -\int_\Omega\nabla(u|u|^\beta)\nabla u dx-\int_\Omega f(u,T)u|u|^\beta\,dx. \qquad (25)$$

В силу равенств $u|u|^\beta\partial_t u=\dfrac{1}{2+\beta}\partial_t\,|u|^{2+\beta}$, $\nabla(u|u|^\beta)=(1+\beta)|u|^\beta\nabla u$ и оценки (4) из (25) следует

$$\frac{1}{2+\beta}\partial_t\,||u||_{L_{2+\beta}}^{2+\beta}+(1+\beta)\int_\Omega|u|^\beta|\nabla u|^2dx\ \le\ \int_\Omega(-c_0|u|^{p+\beta}+C|u|^\beta)dx\,,$$

откуда получаем

$$\frac{1}{2+\beta}\partial_t\,||u||_{L_{2+\beta}}^{2+\beta}+\frac{c_0}{2}||u||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}\ \le\ C_{20}.$$

Интегрируя это неравенство по *t* от 0 до *t*, выводим

$$\frac{1}{2+\beta}||u(t)||_{L_{2+\beta}}^{2+\beta}+\frac{c_0}{2}\int_0^t||u(t)||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}\,dt\ \le\ C_{20}t+\frac{1}{2+\beta}||u(0)||_{L_{2+\beta}}^{2+\beta}.$$

Учитывая непрерывное вложение $H^1(\Omega)\subset L_{2+\beta}(\Omega)$, отсюда имеем утверждение леммы 3.

Из (16) следует, что для любого решения (u,T) задачи (1), (2) $T_2(t)\ \to\ +\infty$ при $t\to+\infty$.

Рассмотрим задачу, в некотором смысле предельную при $T_2 \to +\infty$ для задачи (12), (13):

$$\partial_t \tilde{u} = \Delta\tilde{u} - \tilde{f}(\tilde{u}), \quad \partial_t \tilde{T}_1 = \Delta \tilde{T}_1 + \tilde{G}_1(\tilde{u}), \tag{26}$$

$$\partial\tilde{u}/\partial\nu\,|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial\tilde{T}_1/\partial\nu\,|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{27}$$

где $\tilde{G}_1(\tilde{u}) = \tilde{g}(\tilde{u}) - <\tilde{g}(\tilde{u})>$. Начальные данные этой задачи берутся в пространстве $E_1 = L_2(\Omega)\times V \subset E$.

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим

$$dist_E(X,Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} ||x-y||_E .$$

Обычными методами (см. [6], [7]) устанавливается, что при выполнении условий (7) и (10) задача (26), (27) порождает в пространстве E_1 полугруппу операторов $\{\tilde{S}_t, t\ge 0\}$, которая обладает максимальным аттрактором $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset E_1$. (Следуя [7], *максимальным аттрактором* полугруппы операторов $\{\tilde{S}_t\}$ называем такое компактное в E_1 и инвариантное относительно операторов полугруппы множество $\mathcal{A}$, что для любого ограниченного в *E* множества $B \subset E_1$ $dist_E(\tilde{S}_t B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$.)

Определим отображения $\Pi_1 : E \to E_1$ и $\Pi_2 : E \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$\Pi_1 : (u,T) \to (u,T_1), \quad \Pi_2 : (u,T) \to T_2$$

для любых $(u,T)\in E$, где $T = T_1 + T_2$, $T_2 = <T>$.

Теорема. *Для любого ограниченного в E множества B*

$$dist_E(\Pi_1 S_t B, \mathcal{A}) \to 0 \quad \text{и} \quad \inf \Pi_2 S_t B \to +\infty \quad \text{при } t\to+\infty$$

($\{S_t\}$ – полугруппа, порожденная в пространстве E задачей (1), (2)).

Доказательство. Пусть *B* – ограниченное в *E* множество. Тогда существует такое $R>0$, что $\forall (u_0, T_0)\in B$ выполнены условия леммы 1:

$$||(u_0, T_{10})||_E \le R, \quad T_{20} \ge -R .$$

В силу оценки (16) имеем

$$\inf \Pi_2 S_t B \to +\infty \text{ при } t\to+\infty.$$

Положим $R_1 = \max\{C_1(R), R\}$, где $C_1(R)$ – константа из оценки (15). Пусть

$$D = \{(u,T)\in E : ||(u,T_1)||_E \le R_1,\ T_2 \ge -R_1\},$$

где $T_1 = T - <T>$, $T_2 = <T>$. Тогда, согласно лемме 1,

$$S_t B \subset D \quad \forall t \ge 0. \tag{28}$$

Пусть $(u_0, T_0)\in D$. Легко устанавливается, что для (u_0, T_0) выполнены условия лемм 1 и 2, где в качестве *R* рассматривается R_1. Если $(u(t), T(t))$ – решение задачи (1), (2) с начальными условиями (11), определенное при $t\ge 0$, то из лемм 1 и 2 следует, что

$$||u(1)||_1 + ||T_1(1)||_1 \le C_{21}(R_1). \tag{29}$$

Пусть

$$K = \{(u,T)\in (H_1(\Omega))^2 : ||u||_1 + ||T||_1 \le C_{21}(R_1)\}.$$

Из (29) и произвольности выбора $(u_0, T_0)\in D$ вытекает, что

$$\Pi_1 S_1 D \subset K. \tag{30}$$

Пусть $t \ge 1$. Применяя полугрупповое свойство операторов S_t и включения (28) и (30), получаем

$$\Pi_1 S_t B = \Pi_1 S_1 S_{t-1} B \subset K. \tag{31}$$

Заметим, что *K* – замкнутое ограниченное в $(H_1(\Omega))^2$ множество. Таким образом, ввиду компактности вложения $(H_1(\Omega))^2 \subset (L_2(\Omega))^2$ множество *K* компактно в *E*. Отсюда и из (31) следует предкомпактность в *E* множества $B_1 = \bigcup_{t\ge1} \Pi_1 S_t B$.

Введем в рассмотрение ω-предельное множество траектории $\{\Pi_1 S_t B, t \geq 0\}$:

$$\omega_1(B) = \{y \in E : \Pi_1 S_{t_k} z_k \to y \text{ в } E \text{ для некоторых } z_k \in B \text{ и } t_k \to +\infty\}.$$

Из предкомпактности в E множества B_1 легко следует, что

$$dist_E(\Pi_1 S_t B, \omega_1(B)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \quad (32)$$

Докажем, что $\omega_1(B) \subset \mathcal{A}$. Отметим, что в силу замкнутости в E подпространства E_1 $\omega_1(B) \subset E_1$. Пусть $(u^*, T_1^*) \in \omega_1(B)$. Тогда существуют такая последовательность $\{(u^{(k)}(t), T^{(k)}(t))\}$ решений задачи (1), (2) с начальными условиями $(u^{(k)}(0), T^{(k)}(0)) \in B$ и такая последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to +\infty$, что

$$(u^{(k)}(t_k), T_1^{(k)}(t_k)) \to (u^*, T_1^*) \text{ в } E \text{ при } k \to \infty, \quad (33)$$

где $(u^{(k)}(t_k), T_1^{(k)}(t_k)) = \Pi_1(u^{(k)}(t_k), T^{(k)}(t_k))$.

Пусть $\theta > 0$. Ввиду предкомпактности в E множества $B_1 = \bigcup_{t \geq 1} \Pi_1 S_t B$ существует такая подпоследовательность $\{m\} \subset \{k\}$, что последовательность $\{(u^{(m)}(t_m - \theta), T_1^{(m)}(t_m - \theta))\}$ сходится в E. Пусть

$$(u^{(m)}(t_m - \theta), T_1^{(m)}(t_m - \theta)) \to (\tilde{u}_0, \tilde{T}_{10}).$$

Очевидно, что $(\tilde{u}_0, \tilde{T}_{10}) \in \omega_1(B)$. Пусть $(\tilde{u}(t), \tilde{T}_1(t))$ – решение задачи (26), (27) с начальным условием $(\tilde{u}(0), \tilde{T}_1(0)) = (\tilde{u}_0, \tilde{T}_{10})$. Получим оценки для $\| u^{(m)}(t_m - \theta + t) - \tilde{u}(t) \|^2$ и $\| T_1^{(m)}(t_m - \theta + t) - \tilde{T}_1(t) \|^2$. Обозначим для краткости $u^{(m)}(t_m - \theta + t) = \bar{u}^{(m)}(t)$, $T^{(m)}(t_m - \theta + t) = \bar{T}^{(m)}(t)$, $T_1^{(m)}(t_m - \theta + t) = \bar{T}_1^{(m)}(t)$. В силу (12), (13) имеем

$$\partial_t \bar{u}^{(m)} = \Delta \bar{u}^{(m)} - f(\bar{u}^{(m)}, \bar{T}^{(m)}), \qquad \partial_t \bar{T}_1^{(m)} = \Delta \bar{T}_1^{(m)} - G_1(\bar{u}^{(m)}, \bar{T}^{(m)}). \quad (34)$$

Вычитая из первого уравнения (34) первое уравнение (26) и умножая получившееся равенство скалярно в $L_2(\Omega)$ на разность $\bar{u}^{(m)} - \tilde{u}$, получаем

$$\frac{1}{2} \partial_t \| \bar{u}^{(m)} - \tilde{u} \|^2 =$$

$$= -\| \nabla(\bar{u}^{(m)} - \tilde{u}) \|^2 - \langle f(\bar{u}^{(m)}, \bar{T}^{(m)}) - \tilde{f}(\bar{u}^{(m)}), \bar{u}^{(m)} - \tilde{u} \rangle - \langle \tilde{f}(\bar{u}^{(m)}) - \tilde{f}(\tilde{u}), \bar{u}^{(m)} - \tilde{u} \rangle.$$

Отсюда с учетом условий (7) и (8) выводим

$$\frac{1}{2} \partial_t \| \bar{u}^{(m)} - \tilde{u} \|^2 \leq C \| \bar{u}^{(m)} - \tilde{u} \|^2 + \langle h(\bar{T}^{(m)})(|\bar{u}^{(m)}|^{p-1} + 1), |\bar{u}^{(m)} - \tilde{u}| \rangle. \quad (35)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (35). Пусть $0 < \delta < \varepsilon$ (ε – из условия (5)). Определим для каждого $m \in \{m\}$ и каждого $t \geq 0$ множество $\Omega_t^m = \{x \in \Omega : |\bar{T}_1^{(m)}(x,t)| \leq \delta t_m\}$. Очевидно, что Ω_t^m измеримо по Лебегу. Используя неравенство Чебышева и оценку (15) (где вместо $T_1(t)$ берется $T_1^{(m)}(t)$), получаем оценку для лебеговой меры множества $\Omega \setminus \Omega_t^m$:

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_t^m) \leq \delta^{-2} t_m^{-2} \| \bar{T}_1^{(m)}(t) \|^2 \leq C_{22}(R) \delta^{-2} t_m^{-2}. \quad (36)$$

Из неравенства (16) для $T_2^{(m)} = T^{(m)} - T_1^{(m)}$ и определения множества Ω_t^m вытекает, что при $t \geq 0$

$$\bar{T}^{(m)}(x,t) \geq \varepsilon(t_m - \theta + t) - R - \delta t_m = (\varepsilon - \delta) t_m + \varepsilon(t - \theta) - R \qquad \forall x \in \Omega_t^m.$$

Поэтому (в силу убывания функции $h(T)$ на **R**) при $t \geq 0$ имеем

$$h(\bar{T}^{(m)}(x,t)) \leq h((\varepsilon - \delta) t_m - \varepsilon\theta - R) \qquad \forall x \in \Omega_t^m.$$

Применяя эту оценку и ограниченность функции $h(T)$, выводим

$$\langle h(\bar{T}^{(m)})(|\bar{u}^{(m)}|^{p-1} + 1), |\bar{u}^{(m)} - \tilde{u}| \rangle \leq$$

$$\leq h((\varepsilon - \delta) t_m - \varepsilon\theta - R) \int_\Omega (|\bar{u}^{(m)}|^{p-1} + 1) |\bar{u}^{(m)} - \tilde{u}| \, dx + C_{23} \int_{\Omega \setminus \Omega_t^m} (|\bar{u}^{(m)}|^{p-1} + 1) |\bar{u}^{(m)} - \tilde{u}| \, dx \quad \forall t \geq 0. \quad (37)$$

Оценим интегралы в правой части (37). Используя неравенство Юнга, получаем

$$\int_\Omega (|\overline{u}^{(m)}|^{p-1}+1)|\overline{u}^{(m)}-\tilde{u}|\,dx \le C_{24}\int_\Omega (|\overline{u}^{(m)}|^p+|\tilde{u}|^p+1)dx. \qquad (38)$$

Пусть $\chi_t^{(m)}(x)$ – характеристическая функция множества $\Omega\setminus\Omega_t^m$, β – число из условия леммы 3. Положим $\sigma=\beta/(p+\beta)$. С помощью неравенства Гельдера выводим

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_t^m}(|\overline{u}^{(m)}|^{p-1}+1)|\overline{u}^{(m)}-\tilde{u}|\,dx=\int_\Omega \chi_t^{(m)}\cdot(|\overline{u}^{(m)}|^{p-1}+1)|\overline{u}^{(m)}-\tilde{u}|\,dx \le$$

$$\le C_{25}\,||\chi_t^{(m)}||_{L_{p/(\sigma(p-1))}}(||\overline{u}^{(m)}||_{L_{p/(1-\sigma)}}^{p-1}+1)||\overline{u}^{(m)}-\tilde{u}||_{L_p}. \qquad (39)$$

Учитывая (36), имеем

$$||\chi_t^{(m)}||_{L_{p/(\sigma(p-1))}} = (\mu(\Omega\setminus\Omega_t^m))^{\sigma(p-1)/p} \le C_{26}(R)t_m^{-2\sigma(p-1)/p}.$$

Воспользовавшись этой оценкой и неравенством Юнга, из (39) получаем

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_t^m}(|\overline{u}^{(m)}|^{p-1}+1)|\overline{u}^{(m)}-\tilde{u}|\,dx \le C_{27}(R)t_m^{-2\sigma(p-1)/p}(||\overline{u}^{(m)}||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}+||\tilde{u}||_{L_p}^p+1).$$

В силу этой оценки и оценки (38) из (37) следует

$$\langle h(\overline{T}^{(m)})(|\overline{u}^{(m)}|^{p-1}+1),\,|\overline{u}^{(m)}-\tilde{u}|\rangle \le C_{28}(R)\Big(h((\varepsilon-\delta)t_m-\varepsilon\theta-R))+t_m^{-2\sigma(p-1)/p}\Big)(||\overline{u}^{(m)}||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}+||\tilde{u}||_{L_p}^p+1).$$

Проинтегрировав неравенство (35) по t от 0 до t и воспользовавшись последней оценкой, получим

$$||\overline{u}^{(m)}(t)-\tilde{u}(t)||^2 \le ||\overline{u}^{(m)}(0)-\tilde{u}_0||^2+2C\int_0^t ||\overline{u}^{(m)}(t)-\tilde{u}(t)||^2\,dt+$$

$$+2C_{28}(R)\Big(h((\varepsilon-\delta)t_m-\varepsilon\theta-R))+t_m^{-2\sigma(p-1)/p}\Big)\int_0^t(||\overline{u}^{(m)}(t)||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}+||\tilde{u}(t)||_{L_p}^p+1)dt. \qquad (40)$$

Пусть $\tau\ge\theta$. Отметим, что ввиду (31) при достаточно больших m

$$||\overline{u}^{(m)}(0)||_1 = ||u^{(m)}(t_m)||_1 \le C_{29}(R).$$

(Далее считаем m настолько большим, что эта оценка имеет место.) Учитывая последнюю оценку и применяя лемму 3 (в которой в качестве (u,T) рассматривается $(\overline{u}^{(m)},\overline{T}^{(m)})$), выводим

$$\int_0^\tau ||\overline{u}^{(m)}(t)||_{L_{p+\beta}}^{p+\beta}\,dt \le C_{18}\tau+C_{30}(R). \qquad (41)$$

Аналогично выводу оценки (17) устанавливается, что

$$\int_0^\tau ||\tilde{u}(t)||_{L_p}^p\,dt \le C_2\tau+C_{31}(R). \qquad (42)$$

Из (40) и двух последних оценок вытекает, что $\forall t\in[0,\tau]$

$$||\overline{u}^{(m)}(t)-\tilde{u}(t)||^2 \le ||\overline{u}^{(m)}(0)-\tilde{u}_0||^2+C_{32}(R,\tau)\Big(h((\varepsilon-\delta)t_m-\varepsilon\theta-R))+t_m^{-2\sigma(p-1)/p}\Big)+2C\int_0^t||\overline{u}^{(m)}(t)-\tilde{u}(t)||^2\,dt,$$

где $C_{32}(R,\tau)$ – положительная константа, зависящая от R и τ. Отсюда, применяя неравенство Гронуолла, выводим

$$||\overline{u}^{(m)}(t)-\tilde{u}(t)||^2 \le e^{2C\tau}\Big[||\overline{u}^{(m)}(0)-\tilde{u}_0||^2+C_{32}(R,\tau)\Big(h((\varepsilon-\delta)t_m-\varepsilon\theta-R))+t_m^{-2\sigma(p-1)/p}\Big)\Big] \quad \forall t\in[0,\tau]. \qquad (43)$$

Оценим теперь $||\overline{T}_1^{(m)}(t)-\tilde{T}_1(t)||^2$. Для этого вычтем из второго уравнения (34) второе уравнение (26) и умножим получившееся равенство скалярно в $L_2(\Omega)$ на $\overline{T}_1^{(m)}-\tilde{T}_1$:

$$\frac{1}{2}\partial_t||\overline{T}_1^{(m)}-\tilde{T}_1||^2 = -||\nabla(\overline{T}_1^{(m)}-\tilde{T}_1)||^2+\langle G_1(\overline{u}^{(m)},\overline{T}^{(m)})-\tilde{G}_1(\tilde{u}),\,\overline{T}_1^{(m)}-\tilde{T}_1\rangle.$$

С учетом того, что $\forall t\ge 0$ $\overline{T}_1^{(m)},\tilde{T}_1\in V$, это равенство легко преобразовывается в следующее:

$$\frac{1}{2}\partial_t \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \|^2 + \| \nabla(\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1) \|^2 =$$
$$= \langle g(\overline{u}^{(m)}, \overline{T}^{(m)}) - \tilde{g}(\overline{u}^{(m)}),\ \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \rangle + \langle \tilde{g}(\overline{u}^{(m)}) - \tilde{g}(\tilde{u}),\ \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \rangle.$$

Используя условие (9), отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \|^2 + \| \nabla(\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1) \|^2 \le$$
$$\le \langle h(\overline{T}^{(m)})(|\overline{u}^{(m)}|^q + 1),\ |\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1| \rangle + \langle \tilde{g}(\overline{u}^{(m)}) - \tilde{g}(\tilde{u}),\ \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \rangle. \quad (44)$$

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства. Аналогично оценке (36) выводим

$$\langle h(\overline{T}^{(m)})(|\overline{u}^{(m)}|^q + 1),\ |\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1| \rangle \le$$
$$\le h((\varepsilon-\delta)t_m - \varepsilon\theta - R)\int_\Omega (|\overline{u}^{(m)}|^q + 1)|\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1|\,dx + C_{23}\int_{\Omega\setminus\Omega_t^m} (|\overline{u}^{(m)}|^q + 1)|\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1|\,dx \quad \forall t \ge 0. \quad (45)$$

Продолжим рассуждения для $n \ge 3$ (в случае $n < 3$ аналогичные оценки выводятся несколько проще). Поскольку $q < \frac{p}{2} + \frac{4}{n-2}$, то для некоторого $\rho \in (0,1)$ $q \le \frac{2(1-\rho)}{n-2} + \frac{p+\beta}{2}$, где $\beta = \frac{4}{n-2}$ (т.е. такое же, как в условии леммы 3). Учитывая это неравенство, с помощью неравенства Гельдера выводим

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_t^m} (|\overline{u}^{(m)}|^q + 1)|\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1|\,dx = \int_\Omega \chi_t^{(m)} \cdot (|\overline{u}^{(m)}|^q + 1)|\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1|\,dx \le$$
$$\le C_{33} \| \chi_t^{(m)} \|_{L_{n/\rho}} (\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_{2n/(n-2)}}^{2(1-\rho)/(n-2)} + 1)(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_{p+\beta}}^{(p+\beta)/2} + 1) \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T} \|_{L_{2n/(n-2)}}.$$

Отсюда, используя (36), непрерывность вложения $H_1(\Omega) \subset L_{2n/(n-2)}(\Omega)$ и включение (31), при достаточно больших m получаем

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_t^m} (|\overline{u}^{(m)}|^q + 1)|\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1|\,dx \le C_{34}(R)t_m^{-2\rho/n}(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_{p+\beta}}^{p+\beta} + \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T} \|_1^2 + 1).$$

Аналогично этой оценке выводится оценка

$$\int_\Omega (|\overline{u}^{(m)}|^q + 1)|\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1|\,dx \le C_{35}(R)(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_{p+\beta}}^{p+\beta} + \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T} \|_1^2 + 1).$$

Из (45) и двух последних оценок следует неравенство

$$\langle h(\overline{T}^{(m)})(|\overline{u}^{(m)}|^q + 1),\ |\overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1| \rangle \le$$
$$\le C_{36}(R)(h((\varepsilon-\delta)t_m - \varepsilon\theta - R) + t_m^{-2\rho/n})(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_{p+\beta}}^{p+\beta} + \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T} \|_1^2 + 1). \quad (46)$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (44). Пусть $\lambda = 2/n$ при $n \ge 3$ и $0 < \lambda < 1$ произвольно при $n < 3$. В силу (7)

$$|\tilde{g}(v_1) - \tilde{g}(v_2)| \le C_\lambda(|v_1|^{r-\lambda} + |v_2|^{r-\lambda} + 1)|v_1 - v_2|^\lambda \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbf{R}.$$

Используя это неравенство и неравенство Гельдера, а также учитывая, что $r \le p/2$, выводим

$$|\langle \tilde{g}(\overline{u}^{(m)}) - \tilde{g}(\tilde{u}),\ \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \rangle| \le C_{37} \| |\overline{u}^{(m)}|^{p/2} + |\tilde{u}|^{p/2} + 1 \| \| |\overline{u}^{(m)} - \tilde{u}|^\lambda \|_{L_{2/\lambda}} \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \|_{L_{2/(1-\lambda)}} \le$$
$$\le C_{38}(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_p}^{p/2} + \| \tilde{u} \|_{L_p}^{p/2} + 1) \| \overline{u}^{(m)} - \tilde{u} \|^\lambda \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \|_{L_{2/(1-\lambda)}}.$$

Ввиду неравенства Юнга и непрерывности вложения $H_1(\Omega) \subset L_{2/(1-\lambda)}(\Omega)$ отсюда следует, что

$$|\langle \tilde{g}(\overline{u}^{(m)}) - \tilde{g}(\tilde{u}),\ \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \rangle| \le C_{39}(\eta)(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_p}^p + \| \tilde{u} \|_{L_p}^p + 1) \| \overline{u}^{(m)} - \tilde{u} \|^{2\lambda} + \eta \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \|_1^2 \quad (47)$$

($\eta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым).

Воспользовавшись неравенством Пуанкаре, оценками (46), (47) и произвольной малостью η, из (44) при достаточно больших m получаем

$$\frac{1}{2}\partial_t \| \overline{T}_1^{(m)} - \tilde{T}_1 \|^2 \le C_{36}(R)(h((\varepsilon-\delta)t_m - \varepsilon\theta - R) + t^{-2\rho/n})(\| \overline{u}^{(m)} \|_{L_{p+\beta}}^{p+\beta} + 1) +$$

$$+C_{39}(\eta)(\|\bar{u}^{(m)}\|_{L_p}^p+\|\tilde{u}\|_{L_p}^p+1)\|\bar{u}^{(m)}-\tilde{u}\|^{2\lambda}.$$

Интегрируя последнее неравенство по t от 0 до t и пользуясь оценками (41), (42), а также оценкой (17), где в качестве u рассматривается $\bar{u}^{(m)}$, приходим к неравенству

$$\|\bar{T}_1^{(m)}(t)-\tilde{T}_1(t)\|^2 \le \|\bar{T}_1^{(m)}(0)-\tilde{T}_{10}\|^2+C_{40}(R,\tau)\left(h((\varepsilon-\delta)t_m-\varepsilon\theta-R)+t_m^{-2\rho/n}+\max_{t\in[0,\tau]}\|\bar{u}^{(m)}(t)-\tilde{u}(t)\|^{2\lambda}\right) \quad (48)$$

$\forall t\in[0,\tau]$ ($C_{41}(R,\tau)$ – положительная константа, зависящая от R и τ).

Из оценок (43) и (48) вытекает, что $(u^{(m)}(t_m-\theta+t),T_1^{(m)}(t_m-\theta+t))\to(\tilde{u}(t),\tilde{T}_1(t))$ в E равномерно по $t\in[0,\tau]$. В частности, при $t=\theta$ имеем: $(u^{(m)}(t_m),T_1^{(m)}(t_m))\to(\tilde{u}(\theta),\tilde{T}_1(\theta))$. Поскольку (в силу (33) и того, что $\{m\}\subset\{k\}$) $(u^{(m)}(t_m),T_1^{(m)}(t_m))\to(u^*,T_1^*)$ в E, отсюда следует, что $(\tilde{u}(\theta),\tilde{T}_1(\theta))=(u^*,T_1^*)$. Таким образом, $\tilde{S}_\theta(\tilde{u}_0,\tilde{T}_{10})=(u^*,T_1^*)$. Ввиду произвольности выбора $(u^*,T_1^*)\in\omega_1(B)$ отсюда выводим

$$\tilde{S}_\theta\omega_1(B)\supset\omega_1(B).$$

Из леммы 1 следует, что $\omega_1(B)$ – ограниченное в E множество. Поэтому, используя свойства максимального аттрактора полугруппы и учитывая произвольность $\theta>0$, из последнего включения легко получаем, что $\omega_1(B)\subset\mathcal{A}$. Отсюда и из (32) следует, что $dist_E(\Pi_1S_tB,\mathcal{A})\to 0$ при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

Заключение. Изложенный подход к изучению поведения решений рассматриваемой системы уравнений приме́ним к исследованию достаточно широкого класса систем химической кинетики, правые части которых содержат функции, обладающие аналогичным свойством стабилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Temam, R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam // Appl. Math. Sci. – 1988. – Vol. 68. – xvi + 500 p.
2. Chepyzhov, V.V. Attractors for equations of mathematical physics / V.V. Czepyzhov, M.I. Vishik // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – 2002. – Vol. 49. – xii + 363 pp.
3. Chepyzhov, V.V. Trajectory attractor for reaction-diffusion system with diffusion coefficient vanishing in time / V.V. Czepyzhov, M.I. Vishik // Discrete and Continuous Dynamical Systems A. – 2010. – Vol. 27, № 4. – P. 1493–1509.
4. Zelik, S. The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system with a supercritical nonlinearity and its dimension / S. Zelik // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. – 2000. – Vol. 24. – P. 1–25.
5. Efendiev, M. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization / M. Efendiev, S. Zelik // Ann. I. H. Poincaré. – 2002. – AN 19, № 6. – P. 961–989.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. Бабин, А.В. Аттракторы эволюционных уравнений / А.В. Бабин, М.И. Вишик; отв. ред. П.Я. Кочина. – М.: Наука, 1989. – 294 с.

REFERENCES

1. Temam, R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam // Appl. Math. Sci. – 1988. – Vol. 68. – xvi + 500 p.
2. Chepyzhov, V.V. Attractors for equations of mathematical physics / V.V. Czepyzhov, M.I. Vishik // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – 2002. – Vol. 49. – xii + 363 pp.
3. Chepyzhov, V.V. Trajectory attractor for reaction-diffusion system with diffusion coefficient vanishing in time / V.V. Czepyzhov, M.I. Vishik // Discrete and Continuous Dynamical Systems A. – 2010. – Vol. 27, № 4. – P. 1493–1509.
4. Zelik, S. The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system with a supercritical nonlinearity and its dimension / S. Zelik // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. – 2000. – Vol. 24. – P. 1–25.
5. Efendiev, M. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization / M. Efendiev, S. Zelik // Ann. I. H. Poincaré. – 2002. – AN 19, № 6. – P. 961–989.
6. Lions J.-L. *Nekotoriye metody resheniya nelineinykh krayevykh zadach* [Some methods of Non-Linear Boundary Problem Solution], M.: Mir, 1972, 588 p.
7. Babin A.V., Vishik M.I. *Attraktory evoliutsionnykh uravneni* [Attractors of Evolution Equations], M.: Nauka, 1989, 294 p.

Поступила в редакцию 09.11.2021
Адрес для корреспонденции: e-mail: sirius722@rambler.ru – Бородич С.М.