ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 512.542
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-7-17

Поступила в редакцию 25.08.2022
Received 25.08.2022

Н. Н. Воробьев

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

О МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТКИ БЭРОВСКИХ σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Символом σ обозначают некоторое разбиение множества всех простых чисел. В работе В. Г. Сафонова, И. Н. Сафоновой, А. Н. Скибы (Commun. Algebra. 2020. Vol. 48, № 9. P. 4002–4012) определена *обобщенная формационная σ-функция* как отображение $f : \sigma \cup \{\varnothing\} \to$ {формации групп}, где $f(\varnothing) \neq \varnothing$. При помощи обобщенной формационной σ-функции определены обобщенно локальные формации – так называемые *бэровские σ-локальные* формации. Множество всех таких формаций образует решетку по включению. В настоящей работе установлены свойства алгебраичности и модулярности этой решетки.

Ключевые слова: конечная группа, формация, обобщенная формационная σ-функция, бэровская σ-локальная формация, полная решетка формаций, модулярная решетка, алгебраическая решетка

Для цитирования. Воробьев, Н. Н. О модулярности решетки бэровских σ-локальных формаций / Н. Н. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 7–17. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-7-17

Nikolay N. Vorob'ev

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

ON THE MODULARITY OF THE LATTICE OF BAER-σ-LOCAL FORMATIONS

Abstract. Throughout this paper, all groups are finite. A group class closed under taking homomorphic images and finite subdirect products is called a *formation.* The symbol σ denotes some partition of the set of all primes. V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba (Commun. Algebra. 2020. Vol. 48, № 9. P. 4002–4012) defined a generalized formation σ-function. Any function f of the form $f : \sigma \cup \{\varnothing\} \to$ {formations of groups}, where $f(\varnothing) \neq \varnothing$, is called a *generalized formation σ-function.* Generally local formations or so-called *Baer-σ-local formations* are defined by means of generalized formation σ-functions. The set of all such formations partially ordered by set inclusion is a lattice. In this paper it is proved that the lattice of all Baer-σ-local formations is algebraic and modular.

Keywords: finite group, formation, generalized formation σ-function, Baer-σ-local formation, complete lattice of formations, modular lattice, algebraic lattice

For citation. Vorob'ev N. N. On the modularity of the lattice of Baer-σ-local formations. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 7–17 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-1-7-17

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Мы будем использовать стандартную терминологию, принятую в [1–7].

Следуя Л. А. Шеметкову [1], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i \in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Если n – натуральное число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех его простых делителей; $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}}\sigma(G)$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G$ обладает главным фактором H/K таким, что $\sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}}\sigma^+(G)$.

Группа G называется: *σ-примарной* [7], если G является σ_i-группой для некоторого i; *σ-разрешимой* [7], если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор группы G является σ-примарным. Главный фактор H/K группы G называется: *σ-центральным* в группе G, если $(H/K) \rtimes (G / C_G(H / K))$ является σ-примарным; *σ_i-фактором*, если H/K является σ_i-группой. Группа G называется *обобщенной* $\{\sigma_i\}$*-нильпотентной*, если каждый главный σ_i-фактор группы G является σ-центральным. Символ $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$ обозначает произведение всех нормальных обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G, символ $O_{\sigma_i}(G)$ – произведение всех нормальных σ_i-подгрупп группы G и символ $R_\sigma(G)$ – произведение всех нормальных σ-разрешимых подгрупп группы G.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним определение бэровской σ-локальной формации, введенное в [7] в ходе разработки методов изучения σ-свойств групп [8–11].

Всякая функция f вида

$$f: \sigma \cup \{\varnothing\} \to \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\varnothing) \neq \varnothing$, называется *обобщенной формационной σ-функцией* (см. [7]), и полагают

$$BLF_\sigma(f)=\left(G \mid G / R_\sigma(G) \in f(\varnothing) \text{ и } G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma^+(G)\right).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$ для некоторой обобщенной формационной σ-функции f, то $\mathfrak{F}$ называют *бэровской σ-локальной* формацией с *обобщенным σ-локальным заданием* f (см. [7]).

Относительно включения $\subseteq$ множество всех бэровских σ-локальных формаций c^σ образует полную решетку (см. лемму 5).

Напомним, что решетка L называется *модулярной* [12], если для любых $x, y, z \in L$ имеет место импликация

$$x \leqslant y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

называемая *модулярным законом*.

В 1986 г. А. Н. Скибой [13] установлено, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Этот результат получил развитие во многих направлениях исследований. Одно из них посвящено поиску модулярных и дистрибутивных решеток классов. В частности, были найдены серии модулярных и дистрибутивных решеток формаций групп (см. [3, 4, 6, 13–29]). В настоящей работе установлено, что решетка всех бэровских σ-локальных формаций модулярна.

Другим естественным направлением исследований стал поиск алгебраических решеток классов. Элемент c полной решетки L называется *компактным* [12], если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leqslant \sup_L X$ вытекает существование конечного подмножества $X_0 \subseteq X$ такого, что $c \leqslant \sup_L X_0$. Полная решетка называется *алгебраической*, если каждый ее элемент представим как точная верхняя грань некоторого множества компактных элементов.

Отметим, что вопрос об алгебраичности решетки всех насыщенных формаций конечных групп был впервые поставлен Б. И. Плоткиным в 1984 г. на XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (г. Москва) во время обсуждения совместного доклада Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы «Алгебра классов конечных групп». Такая задача была решена А. Н. Скибой в монографии [3]. В дальнейшем были найдены другие бесконечные серии алгебраических решеток формаций и описаны их компактные элементы (см., напр., [21, 24, 30–35]). В настоящей работе доказана алгебраичность решетки всех бэровских σ-локальных формаций.

Предварительные сведения. Для любых двух классов групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ будем писать

$$\mathfrak{M} \vee^\sigma \mathfrak{H} = c^\sigma\text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Если m и h – обобщенные формационные σ-функции, то $m \vee h$ – такая обобщенная формационная σ-функция, что

$$(m \vee h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \vee h(\sigma_i)$$

для всех i. Символом $m \cap h$ обозначают такую обобщенную формационную σ-функцию, что

$$(m \cap h)(\sigma_i) = m(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$$

для всех i.

Лемма 1 [7, предложение 2.7]. *Пусть f и h – обобщенные формационные σ-функции такие, что $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f) = BLF_\sigma(h)$, и пусть $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$. Тогда*:

1) *если $\sigma_i \in \Pi$, то*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F};$$

2) *$\mathfrak{F} = BLF_\sigma(F)$, где F – обобщенная формационная σ-функция такая, что $F(\varnothing) = \mathfrak{F}$ и*

$$F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Обобщенная формационная σ-функция f называется *внутренней* [7], если $f(a) \subseteq BLF_\sigma(f)$ для всех $a \in \sigma \cup \{\varnothing\}$.

Лемма 2 [36, лемма 3]. *Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ и $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ для всех $j \in J$, то $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, где $f(\varnothing) = \bigcap_{j \in J} f_j(\varnothing)$ и $f(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j \in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$. Кроме того, если f_j – внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$, то f также является внутренним обобщенным σ-локальным заданием формации $\mathfrak{F}$.*

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – набор всех обобщенных σ-локальных заданий формации $\mathfrak{F}$. В силу леммы 2 $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ – обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$, называемое *наименьшим* (см. [5, 6]), такое, что $f(a) = \bigcap_{j \in J} f_j(a)$ для всех $a \in \sigma_i \cup \{\varnothing\}$ по всем i.

Лемма 3 [36, теорема]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = BLF_\sigma(f)$, где f – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{X})$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) $f(\varnothing) = \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

3) $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = \mathrm{form}(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ *для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$*;

4) *если h – произвольное обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$, то для всех $\sigma_i \in \Pi$ имеет место $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F},\ O_{\sigma_i}(G) = 1)$ и $f(\varnothing) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(\varnothing) \cap \mathfrak{F},\ R_\sigma(G) = 1)$.*

Из леммы 3 вытекает

Лемма 4 [36, следствие 1]. *Пусть f_i – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$,* когда $f_1 \leqslant f_2$.

Лемма 5 [7, предложение 1.2]. *Пусть $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$ и $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Тогда*:

1) $\Pi = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) *$G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{S}_\sigma f(\varnothing)$ и $G \in \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(G)$*;

3) $$\mathfrak{F} = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Pi} \mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{S}_\sigma f(\varnothing), \text{ если } \Pi \neq \varnothing; \\ \mathfrak{G}_{\Pi^+} \cap \mathfrak{S}_\sigma f(\varnothing), \text{ если } \Pi = \varnothing; \end{cases}$$

4) *$\mathfrak{F}$ – непустая формация.*

Мы используем $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ для обозначения класса всех групп G таких, что $\sigma^+(G) \subseteq \Pi \subseteq \sigma$. Класс всех обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных групп обозначают через $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$, а класс всех σ-разрешимых групп – через $\mathfrak{S}_\sigma$. Если f – обобщенная формационная σ-функция, то символ $\mathrm{Supp}(f)$ обозначает суппорт функции f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Лемма 6 [7, предложение 2.2]. *Класс всех σ_i-нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и класс всех обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных групп $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$ являются формациями Фиттинга.*

Замечание. Класс $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ является бэровской σ-локальной формацией.

Действительно, пусть f – обобщенная формационная σ-функция такая, что

$$f(a)=\begin{cases}\mathfrak{G}_{\Pi^+}, \text{если } a=\sigma_i\in\Pi;\\ \varnothing, \quad \text{если } a=\sigma_i\in\Pi';\\ \mathfrak{G}_{\Pi^+}, \text{если} \quad a=\varnothing.\end{cases}$$

Тогда, согласно утверждению 3) леммы 5,

$$BLF_\sigma(f)=\begin{cases}\mathfrak{G}_{\Pi^+}\bigcap\left(\bigcap\limits_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}\mathfrak{G}_{\Pi^+}\right)\bigcap\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}_{\Pi^+}, \text{ если } \operatorname{Supp}(f)\neq\varnothing;\\ \mathfrak{G}_{\Pi^+}\bigcap\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}_{\Pi^+}, \text{ если } \operatorname{Supp}(f)=\varnothing.\end{cases}$$

Так как по лемме 6 $\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}$, $\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ – формации, то

$$\mathfrak{G}_{\Pi^+}\bigcap\left(\bigcap\limits_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}\mathfrak{G}_{\Pi^+}\right)\bigcap\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}_{\Pi^+}=\mathfrak{G}_{\Pi^+}\bigcap\left(\bigcap\limits_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{G}_{\{g\sigma_i\}}\right)\mathfrak{G}_{\Pi^+}\bigcap\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}_{\Pi^+}=\mathfrak{G}_{\Pi^+}$$

при $\operatorname{Supp}(f)\neq\varnothing$ и

$$\mathfrak{G}_{\Pi^+}\bigcap\mathfrak{S}_\sigma\mathfrak{G}_{\Pi^+}=\mathfrak{G}_{\Pi^+}$$

при $\operatorname{Supp}(f)=\varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{G}_{\Pi^+}$ является бэровской σ-локальной формацией. Утверждение доказано.

Лемма 7. *Совокупность всех бэровских σ-локальных формаций C^σ является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества бэровских σ-локальных формаций $\{\mathfrak{F}_j \mid j\in J\}$*

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j\in J)=\bigcap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань и

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j\in J)=c^\sigma\text{form}\left(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j\in J\}$ в решетке C^σ.

Доказательство. Отметим, что совокупность всех бэровских σ-локальных формаций C^σ частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j\in J\}$ – произвольное непустое множество бэровских σ-локальных формаций и f_j – внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$, $j\in J$. Пусть

$$\mathfrak{F}=\bigcap_{j\in J}\mathfrak{F}_j.$$

Тогда, согласно лемме 2, $\mathfrak{F}=BLF_\sigma(f)$, где f – такое обобщенное σ-локальное задание, что

$$f(\varnothing)=\bigcap_{j\in J}f_j(\varnothing),\quad f(\sigma_i)=\bigcap_{j\in J}f_j(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j\in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma^+(\mathfrak{F})$; и тем самым $\mathfrak{F}$ – бэровская σ-локальная формация, т. е. $\mathfrak{F} = \wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$. Значит,

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j \in C^\sigma.$$

Поэтому

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в C^σ. Как отмечено выше,

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c^\sigma\mathrm{form}\left(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{F}_j\right) \in C^\sigma.$$

Поэтому

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c^\sigma\mathrm{form}\left(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{F}_j\right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в C^σ.

Итак, совокупность всех бэровских σ-локальных формаций C^σ является решеткой. Отметим также, что, согласно замечанию, класс всех групп $\mathfrak{G}$ является бэровской σ-локальной формацией. Поэтому формация $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки C^σ.

Таким образом, C^σ – полная решетка формаций, в которой наибольший элемент – формация всех групп $\mathfrak{G}$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$, где f_j – внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^\sigma \mathfrak{F}_2 = BLF_\sigma(f),$$

где $f = f_1 \vee f_2$ – внутреннее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть h_j – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$ и пусть F_j – каноническое обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Пусть h – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$ и пусть F – каноническое обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Тогда по утверждению 2) леммы 1 и лемме 3 для каждого i имеет место

$$h_j(\varnothing) \subseteq f_j(\varnothing) \subseteq F_j(\varnothing) = \mathfrak{F}_j, \quad h_j(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq F_j(\sigma_i).$$

Кроме того, согласно утверждению 2) леммы 1 и лемме 3, имеет место

$$h(\varnothing) = \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{form}((G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup (G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)) =$$
$$= \mathrm{form}(\mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup \mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)) = \mathrm{form}(h_1(\varnothing) \cup h_2(\varnothing)) \subseteq f(\varnothing) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\,\mathrm{form}(h_1(\varnothing) \cup h_2(\varnothing)) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\varnothing) = F(\varnothing) = \mathfrak{F};$$

$$h(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{form}((G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup (G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)) =$$
$$= \mathrm{form}(\mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1) \cup \mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)) = \mathrm{form}(h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i)) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\,\mathrm{form}(h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i)) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i) = F(\sigma_i).$$

Таким образом,

$$h(\varnothing) \subseteq f(\varnothing) \subseteq F(\varnothing), \qquad h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq F(\sigma_i)$$

для всех i. Значит, $h \leqslant f \leqslant F$. Следовательно, $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть f_j – наименьшее обобщенное σ-локальное задание бэровской σ-локальной формации $\mathfrak{F}_j$, где $j \in J$. Тогда $\vee(f_j \mid j \in J)$ – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F} = \vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$.*

Доказательство. Пусть

$$\Pi = \sigma^+\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right) = \bigcup_{j \in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j) = \sigma^+(\mathfrak{F}),$$

$f = \vee(f_j \mid j \in J)$ и h – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $f = h$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma \setminus \Pi$ для некоторого i. Тогда по лемме 3 для любого $j \in J$ имеет место $h(\sigma_i) = \varnothing$ и $f_j(\sigma_i) = \varnothing$. Значит, $f(\sigma_i) = \varnothing$.

Пусть $\sigma_i \in \Pi$. Тогда найдется такое $j \in J$, что $f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$. Значит, согласно лемме 3, имеет место

$$h(\sigma_i) = \mathrm{form}\left(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right) = \mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathrm{form}\left(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j\right)\right) =$$

$$= \mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i)\right) = \left(\vee(f_j \mid j \in J)\right)(\sigma_i) = f(\sigma_i).$$

Кроме того, согласно лемме 3, имеем

$$h(\varnothing) = \mathrm{form}\left(G / R_\sigma(G) \mid G \in \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right) = \mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathrm{form}\left(G / R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j\right)\right) =$$

$$= \mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} f_j(\varnothing)\right) = \left(\vee(f_j \mid j \in J)\right)(\varnothing) = f(\varnothing).$$

Следовательно, $f = h$. Таким образом, $h = \vee(f_j \mid j \in J)$ – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F} = \vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10 [37, лемма 4.1]. *Если решетка формаций Θ является алгебраической, то ее компактными элементами являются в точности однопорожденные формации из Θ.*

Основной результат.

Теорема. *Решетка всех бэровских σ-локальных формаций C^σ является полной, алгебраической, модулярной, в которой для произвольного множества бэровских σ-локальных формаций $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$*

$$\wedge^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань и

$$\vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c^\sigma\mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в решетке C^σ.

Доказательство. Согласно лемме 7, остается показать, что решетка C^σ модулярна и алгебраична. Докажем сначала, что решетка C^σ модулярна. Пусть $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ – бэровская σ-локальная формация; $j = 1, 2, 3$, где $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$ и f_j – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$. Покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee^\sigma (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3). \qquad (*)$$

Заметим, что обобщенные σ-локальные задания f_1, f_2, f_3 являются внутренними и по лемме 4 $f_2(\varnothing) \subseteq f_1(\varnothing), f_2(\sigma_i) \subseteq f_1(\sigma_i)$ для всех i. Следовательно, по лемме 8 обобщенное σ-локальное задание $f_2 \vee f_3$ является внутренним и

$$\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma \mathfrak{F}_3 = BLF_\sigma(f_2 \vee f_3).$$

Значит, по лемме 2

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma \mathfrak{F}_3) = BLF_\sigma\big(f_1 \cap (f_2 \vee f_3)\big).$$

Аналогично, применяя лемму 2 и лемму 8, можно показать, что

$$\mathfrak{F}_2 \vee^\sigma (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) = BLF_\sigma\big(f_2 \vee (f_1 \cap f_3)\big).$$

Поскольку, согласно [13], решетка всех формаций модулярна, то для любого i

$$f_1(\varnothing) \cap \big(f_2(\varnothing) \vee f_3(\varnothing)\big) = f_2(\varnothing) \vee \big(f_1(\varnothing) \cap f_3(\varnothing)\big),$$

$$f_1(\sigma_i) \cap \big(f_2(\sigma_i) \vee f_3(\sigma_i)\big) = f_2(\sigma_i) \vee \big(f_1(\sigma_i) \cap f_3(\sigma_i)\big).$$

Следовательно,

$$f_1 \cap (f_2 \vee f_3) = f_2 \vee (f_1 \cap f_3).$$

Таким образом, справедливо равенство (*). Итак, решетка всех бэровских σ-локальных формаций C^σ модулярна.

Докажем теперь, что решетка C^σ алгебраична. Покажем прежде, что любая бэровская σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ является решеточным объединением (в решетке C^σ) своих однопорожденных бэровских σ-локальных подформаций $\mathfrak{F}_j = c^\sigma\text{form}(G_j)$, где $j \in J$.

Пусть $\mathfrak{H} = c^\sigma\text{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in c^\sigma\text{form}(G) \subseteq \subseteq \bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \subseteq c^\sigma\text{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Обратно. Так как $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$, то $\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Докажем, что каждая однопорожденная бэровская σ-локальная формация $\mathfrak{F} = c^\sigma\text{form}(G)$ является компактным элементом в решетке C^σ. Пусть

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = \vee^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c^\sigma\text{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$$

для некоторого множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq C^\sigma$.

Пусть f_j – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$ для всех j, f – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$ и m – наименьшее обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{M}$. Пусть $\sigma_i \in \sigma^+(G)$. Тогда по лемме 3

$$f(a) = \begin{cases} \text{form}\big(G / R_\sigma(G)\big), \text{ если } a = \varnothing, \\ \text{form}\big(G / F_{\{g\sigma_i\}}(G)\big), \text{ если } a = \sigma_i. \end{cases}$$

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 4 имеем $f \leqslant m$. По лемме 9 имеет место $m = \vee(f_j \mid j \in J)$, поэтому

$$f(\varnothing) \subseteq m(\varnothing) = \left(\vee(f_j \mid j \in J)\right)(\varnothing) = \mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} f_j(\varnothing)\right),$$

$$f(\sigma_i) \subseteq m(\sigma_i) = \left(\vee(f_j \mid j \in J)\right)(\sigma_i) = \mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i)\right).$$

Так как, согласно [4, теорема 4], решетка всех формаций алгебраична и формации $f(\varnothing)$ и $f(\sigma_i)$ однопорожденные, то найдутся такие индексы $j_1, ..., j_t$; $k_1, ..., k_r \in J$, что

$$G / R_\sigma(G) \in f(\varnothing) \subseteq f_{j1}(\varnothing) \vee \ldots \vee f_{j_t}(\varnothing);$$

$$G / F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \subseteq f_{k_1}(\sigma_i) \vee \ldots \vee f_{k_r}(\sigma_i).$$

Поскольку множество $\sigma^+(G)$ конечно, то из последнего вытекает, что

$$G \in \mathfrak{F}_{j1} \vee^\sigma \ldots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{j_t} \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_1} \vee^\sigma \ldots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_r}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j1} \vee^\sigma \ldots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{j_t} \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_1} \vee^\sigma \ldots \vee^\sigma \mathfrak{F}_{k_r}.$$

Итак, решетка всех бэровских σ-локальных формаций C^σ является алгебраической. Ввиду леммы 10 компактными элементами решетки C^σ являются в точности однопорожденные бэровские σ-локальные формации из C^σ. Теорема доказана.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$, из теоремы получаем

Следствие (см. [4, теорема 4]). *Решетка всех бэровских локальных формаций C является полной, алгебраической, модулярной, в которой для произвольного множества бэровских локальных формаций $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$*

$$\wedge(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = \bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$$

– точная нижняя грань и

$$\vee^c(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = c\mathrm{form}\left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\right)$$

– точная верхняя грань множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в решетке C.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (№ 20210495).

Acknowledgements. The author's research was supported by the State Program of Scientific Research "Konvergentsiya-2025" (no. 20210495).

Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 272 с.

2. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 256 с.

3. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.

4. Скиба, А. Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797. https://doi.org/10.1007/BF02591784

5. Чжан Чи. О $\sum_t^\sigma$-замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А. Н. Скиба // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

6. Zhang Chi. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Zhang Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Commun. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875

7. Safonov, V. G. On Baer-σ-local formations of finite groups / V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba // Commun. Algebra. – 2020. – Vol. 48, № 9. – P. 4002–4012. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1753760

8. Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010

9. Safonov, V. G. On one generalization of σ-local and Baer-local formations / V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 65–69.

10. Skiba, A. N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.009

11. Skiba, A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.013

12. Общая алгебра: в 2 т. / В. А. Артамонов [и др.]; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – Т. 2. – 480 с.

13. Скиба, А. Н. О локальных формациях длины 5 / А. Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: тр. Гомел. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. М. И. Салука. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135–149.

14. Скиба, А. Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков // Мат. тр. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

15. Воробьев, Н. Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н. Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2012. – 322 с.

16. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L. A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65. https://doi.org/10.1002/mana.3211860103

17. Safonov, V. G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V. G. Safonov // Algebra Colloq. – 2008. – Vol. 15, № 1. – P. 119–128. https://doi.org/10.1142/S1005386708000126

18. Safonov, V. G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V. G. Safonov // Commun. Algebra. – 2007. – Vol. 35, № 11. – P. 3495–3502. https://doi.org/10.1080/00927870701509354

19. Шабалина, И. П. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп / И. П. Шабалина // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 28–30.

20. Щербина, В. В. О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп / В. В. Щербина, В. Г. Сафонов // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2019. – Т. 51, № 1. – С. 64–87. https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87

21. Щербина, В. В. О некоторых свойствах решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп / В. В. Щербина, В. Г. Сафонов // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2019. – Т. 51, № 2. – С. 227–244. https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244

22. Shemetkov, L. A. On lattices of formations of finite groups / L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // Algebra Colloq. – 2010. – Vol. 17, № 4. – P. 557–564. https://doi.org/10.1142/S1005386710000532

23. Shemetkov, L. A. On laws of lattices of partially saturated formations / L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // Asian-Eur. J. Math. – 2009. – Vol. 02, № 01. – P. 155–169. https://doi.org/10.1142/S1793557109000133

24. Tsarev, A. A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups / A. A. Tsarev // Ric. Mat. – 2019. – Vol. 68, № 2. – P. 693–698. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3

25. Tsarev, A. A. Lattices of composition formations of finite groups and laws / A. A. Tsarev, N. N. Vorob'ev // J. Algebra Appl. – 2018. – Vol. 17, № 05. – P. 1850084-1–1850084-17. https://doi.org/10.1142/S0219498818500846

26. Tsarev, A. A. On a question of the theory of partially composition formations / A. A. Tsarev, N. N. Vorob'ev // Algebra Colloq. – 2014. – Vol. 21, № 3. – P. 437–447. https://doi.org/10.1142/S1005386714000388

27. Воробьев, Н. Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба, А. А. Царев // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024. https://doi.org/10.1134/S0037446611050059

28. Воробьев, Н. Н. О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / Н. Н. Воробьев, А. А. Царев // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453–463. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0368-9

29. Жизневский, П. А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп / П. А. Жизневский // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.

30. Tsarev, A. A. Algebraic lattices of partially saturated formations of finite groups / A. A. Tsarev // Afr. Mat. – 2020. – Vol. 31, № 3–4. – P. 701–707. https://doi.org/10.1007/s13370-019-00753-5

31. Сафонов, В. Г. Об алгебраичности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций / В. Г. Сафонов // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, № 5. – С. 620–626. https://doi.org/10.1007/s10469-006-0032-5

32. Шабалина, И. П. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций / И. П. Шабалина // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры – 18. – 2002. – № 5 (14). – С. 59–67.

33. Щербина, В. В. Алгебраичность решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп / В. В. Щербина // Уфим. мат. журн. – 2020. – Vol. 12, № 1. – С. 83–91. https://doi.org/10.13108/2020-12-1-82

34. Tsarev, A. A. Algebraic lattices of solvably saturated formations and their applications / A. A. Tsarev, A. V. Kukharev // Bol. Soc. Mat. Mex. – 2020. – Vol. 26, № 3. – P. 1003–1014. https://doi.org/10.1007/s40590-020-00290-3

35. Щербина, В. В. О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп / В. В. Щербина // Приклад. математика & физика. – 2020. – Т. 52, № 1. – С. 18–32. https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32

36. Воробьев, Н. Н. О наименьшем задании бэровской формации / Н. Н. Воробьев, А. В. Чечуев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 3 (116). – С. 15–18.

37. Skiba, A. N. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups / A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // Southeast Asian Bull. Math. – 2013. – Vol. 37, № 5. – P. 771–780.

References

1. Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 272 p. (in Russian).

2. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of Algebraic Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 256 p. (in Russian).

3. Skiba A. N. *Algebra of Formations*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 1997. 240 p. (in Russian).

4. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply $\mathfrak{L}$-composite formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, no. 6, pp. 898–913. https://doi.org/10.1007/BF02591784

5. Zhang Chi, Skiba A. N. On $\sum_t^\sigma$-closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2018, vol. 70, no. 12, pp. 1966–1977. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

6. Zhang Chi, Safonov V. G., Skiba A. N. On n-multiply σ-local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875

7. Safonov V. G., Safonova, I. N., Skiba A. N. On Baer-σ-local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2020, vol. 48, no. 9, pp. 4002–4012. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1753760

8. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010

9. Safonov V. G., Safonova, I. N., Skiba A. N. On one generalization of σ-local and Baer-local formations. *Problemy fiziki matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2019, no. 4 (41), pp. 65–69.

10. Skiba A. N. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups. *Journal of Algebra*, 2018, vol. 495, pp. 114–129. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.009

11. Skiba A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *Journal of Algebra*, 2020, vol. 550, pp. 69–85. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.12.013

12. Artamonov V. A., Saliĭ V. N., Skornyakov L. A., Shevrin L. N., Shul'geĭfer E. G. *General Algebra. Vol. 2*. Moscow, Nauka Publ., 1991. 480 p. (in Russian).

13. Skiba A. N. On local formations of length 5. *Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp: trudy Gomel'skogo seminara* [Arithmetical and Subgroup Construction of Finite Groups. Works of Gomel Seminar]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1986, pp. 135–149 (in Russian).

14. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 112–141.

15. Vorob'ev N. N. *Algebra of Classes of Finite Groups*. Vitebsk, Vitebsk University Press, 2012. 322 p. (in Russian).

16. Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A. On lattices of p-local formations of finite groups. *Mathematische Nachrichten*, 1997, vol. 186, pp. 57–65. https://doi.org/10.1002/mana.3211860103

17. Safonov V. G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups. *Algebra Colloquium*, 2008, vol. 15, no. 1, pp. 119–128. https://doi.org/10.1142/S1005386708000126

18. Safonov V. G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2007, vol. 35, no. 11, pp. 3495–3502. https://doi.org/10.1080/00927870701509354

19. Shabalina I. P. On the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations of finite groups. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2003, no. 1, pp. 28–30 (in Russian).

20. Shcherbina V. V., Safonov V. G. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. *Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics Physics*, 2019, vol. 51, no. 1, pp. 66–89. https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-1-66-89

21. Shcherbina V. V., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics Physics*, 2019, vol. 51, no. 2, pp. 227–244 (in Russian). https://doi.org/10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244

22. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. On lattices of formations of finite groups. *Algebra Colloquium*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 557–564. https://doi.org/10.1142/S1005386710000532

23. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N. On laws of lattices of partially saturated formations. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2009, vol. 02, no. 01, pp. 155–169. https://doi.org/10.1142/S1793557109000133

24. Tsarev A. A. On the lattice of all totally composition formations of finite groups. *Ricerche di Matematica*, 2019, vol. 68, no. 2, pp. 693–698. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00433-3

25. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. Lattices of composition formations of finite groups and laws. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2018, vol. 17, no. 05, pp. 1850084-1–1850084-17. https://doi.org/10.1142/S0219498818500846

26. Tsarev A. A., Vorob'ev N. N. On a question of the theory of partially composition formations. *Algebra Colloquium*, 2014, vol. 21, no. 3, pp. 437–447. https://doi.org/10.1142/S1005386714000388

27. Vorob'ev N. N., Skiba A. N., Tsarev A. A. Laws of the lattices of partially composition formations. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 5, pp. 802–812. https://doi.org/10.1134/S0037446611050059

28. Vorob'ev N. N., Tsarev A. A. On the modularity of the lattice of τ-closed *n*-multiply ω-composite formations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2010, vol. 62, no. 4, pp. 518–529. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0368-9

29. Zhiznevsky P. A. On modularity and inductance of the lattice of all τ-closed *n*-multiply ω-composition formations of finite groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny = Proceedings of the Francisk Scorina Gomel State University*, 2010, no. 1 (58), pp. 185–191 (in Russian).

30. Tsarev A. A. Algebraic lattices of partially saturated formations of finite groups. *Afrika Matematika*, 2020, vol. 31, no. 3–4, pp. 701–707. https://doi.org/10.1007/s13370-019-00753-5

31. Safonov V. G. The property of being algebraic for the lattice of all τ-closed totally saturated formations. *Algebra and Logic*, 2006, vol. 45, no. 5, pp. 353–356. https://doi.org/10.1007/s10469-006-0032-5

32. Shabalina I. P. Algebraic lattices of τ-closed *n*-multiply ω-local formations. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny. Voprosy algebry – 18 = Proceedings of the Francisk Scorina Gomel State University. Algebra Questions – 18*, 2002, no. 5 (14), pp. 59–67 (in Russian).

33. Shcherbina V. V. Algebraicity of lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups. *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 82–90. https://doi.org/10.13108/2020-12-1-82

34. Tsarev A. A., Kukharev A. V. Algebraic lattices of solvably saturated formations and their applications. *Boletìn de la Sociedad Matemática Mexicana*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 1003–1014. https://doi.org/10.1007/s40590-020-00290-3

35. Shcherbina V. V. On two problems of the theory of partially totally composition formations of finite groups. *Applied Mathematics & Physics*, 2020, vol. 52, no. 1, pp. 18–32 (in Russian). https://doi.org/10.18413/2687-0959-2020-52-1-18-32

36. Vorob'ev N. N., Chachuyeu A. V. On the smallest definition of a Baer formation. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta = Vestnik of Vitebsk State University*, 2022, no. 3 (116), pp. 15–18 (in Russian).

37. Skiba A. N., Vorob'ev N. N. On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2013, vol. 37, no. 5, pp. 771–780.

Информация об авторе

Воробьев Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики, Витебский государственный университет имени П. М. Машерова (Московский пр., 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: vornic2001@.mail.ru

Information about the author

Nikolay N. Vorob'ev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor at the Department of Mathematics, Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moscow Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: vornic2001@mail.ru