

(ознакомительный фрагмент)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.24

БЛИНОВА ЕЛЕНА ИВАНОВНА

**ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИЙ
ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА,
НАБЛЮДАЕМЫХ СО СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ**

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2002

Работа выполнена в Белорусском государственном технологическом университете

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Залесский Борис Андреевич, Институт технической кибернетики НАН Беларуси, лаборатория обработки и распознавания изображений

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Малинковский Юрий Владимирович, Гомельский государственный университет, зав. кафедрой математического анализа,

кандидат физико-математических наук Харин Алексей Юрьевич, Белорусский государственный университет, кафедра теории вероятностей и математической статистики

Оппонирующая организация: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук

Защита состоится 17 мая 2002 г. в 10⁰⁰ на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете по адресу: 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4, главный корпус, к. 206, тел. ученого секретаря — 226-55-41.

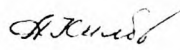
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета

Автореферат разослан “8” апреля 2002 г.

Ученый секретарь совета

по защите диссертаций, доктор

физико-математических наук, профессор



А.А. Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Работа посвящена вопросам статистического оценивания функций дискретного аргумента, наблюдаемых со случайным шумом. Необходимость исследований в данной области возникает во многих прикладных задачах экономики, медицины, экологии, техники и т. д. В настоящее время в связи с широчайшим использованием во всех сферах человеческой деятельности электронной вычислительной техники особую актуальность приобретают задачи обработки цифровых изображений — функций, заданных на конечных подмножествах целочисленной решетки и принимающих значения из множества конечной мощности. В последние 30 – 40 лет в этом направлении активно работают ученые самого разного профиля.

В частности, при статистическом оценивании функций дискретного аргумента весьма успешно применяются оценки максимума апостериори, вычисляемые при априорном предположении, что исходная функция есть реализация некоторого гиббсовского случайного поля. При этом необходимо исследовать статистические свойства получаемых оценок.

До сих пор также остается важной задача построения новых оценок для функций рассматриваемого типа и изучения свойств этих оценок.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Исследования проводились частично в Институте математики НАН Беларуси в рамках темы НИР ИМ "Исследование многомерных вероятностных распределений и их применений в математической статистике" и Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь "Методы и алгоритмы вычислительной и дискретной математики (Алгоритмы)" (тема "Алгоритмы 06. Разработка приближенных методов стохастического анализа и функционального интегрирования"), а затем были продолжены в Белорусском государственном технологическом университете в рамках темы ГБ 10-96 "Качественное исследование свойств дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений и решение некоторых задач управления и механики", которая является отдельной составной частью научного направления "Математические структуры" ("Математические структуры 21"), входящего в НИР Республики Беларусь.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы

является разработка методов оценивания наблюдаемых с шумом функций дискретного аргумента, принимающих значения из множества конечной мощности, получение оценок для величины ошибки оценивания таких функций с помощью новых и некоторых традиционно используемых процедур, а также построение новых, состоятельных оценок для этих функций. Достижение указанной цели предполагает решение следующих задач:

— исследование различных вариантов иерархического метода оценивания наблюдаемых со случайным шумом функций дискретного аргумента, принимающих значения из множества конечной мощности;

— получение оценок величины L^s -риска при использовании иерархического метода оценивания функций из пространств Бесова, в том числе в случае, когда значение параметра шума неизвестно, и построение оценки для параметра шума;

— получение оценок размеров кластеров ошибок при МАП-оценивании бинарных функций (т. е. функций со значениями из $\{0; 1\}$), наблюдаемых с независимым бернуллиевским шумом, в случае гиббсовского априорного распределения с системами четырехточечных и восьмиточечных окрестностей;

— исследование границ применимости оценок максимума апостериори для наблюдаемых с независимым бернуллиевским шумом бинарных функций в случае гиббсовского априорного распределения;

— построение состоятельной модифицированной оценки максимума апостериори для бинарных функций с малой линией разрывов в гиббсовских моделях;

— доказательство оценок для вероятностей больших отклонений суммы минимальной и максимальной порядковых статистик разнораспределенных обобщенных бипомиальных случайных величин;

— доказательство состоятельности оценок, получаемых по методу вращающихся ядер для бинарных функций с малой линией разрывов.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются традиционно используемые и новые оценки наблюдаемых с шумом функций дискретного аргумента. Предмет исследования — свойства этих оценок.

Методология и методы исследования. При решении поставленных задач используется аппарат математического анализа, теории веро-

ятностей и математической статистики, а также результаты теории аппроксимации, теории перколяции, неравенства для вероятностей больших отклонений.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Их новизна состоит в том, что:

- разработан иерархический метод оценивания наблюдаемых с шумом дискретных функций;
- получена состоятельная оценка параметра шума по наблюдениям искаженных значений функции, принимающей значения из множества конечной мощности, при условии, что эта функция принадлежит шару в пространстве Бесова;
- получены оценки размеров кластеров ошибок, возникающих при MAP-оценивании бинарных функций, наблюдаемых с независимым бернуллиевским шумом, в случае гиббсовского априорного распределения с системами четырехточечных и восьмиточечных окрестностей;
- получены оценки для величины ошибки оценивания дискретных функций с помощью иерархического метода и процедуры MAP-оценивания;
- получены экспоненциальные оценки для вероятностей больших отклонений суммы минимальной и максимальной порядковых статистик разнораспределенных обобщенных биномиальных случайных величин.

Практическая значимость полученных результатов. Основные результаты диссертации работы имеют теоретический характер и могут использоваться при решении практических задач. Рассмотренные в работе задачи возникают при статистическом анализе определенных на решетке функций, в частности, при обработке цифровых изображений. В настоящее время в связи с интенсивным развитием средств электронной связи и широким применением компьютерных технологий задачи обработки изображений актуальны во многих прикладных областях.

В практических задачах могут быть использованы рассмотренные в диссертационной работе процедуры оценивания функций, в частности, модифицированная оценка максимума апостериори, а также полученная в главе I состоятельная оценка параметра шума.

Теоретические оценки ошибки оценивания функций с помощью рассматриваемых процедур и оценки вероятностей больших отклонений сум-

мы экстремальных порядковых статистик разнораспределенных обобщенных биномиальных случайных величин могут быть использованы в дальнейших теоретических исследованиях.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

На защиту выносятся следующие результаты:

— *Неулучшаемые по порядку оценки величины L^s -риска при оценивании функций из пространств Бесова с помощью иерархического метода.*

— *Состоятельная оценка параметра шума по наблюдениям независимо искажаемых значений функции, принадлежащей шару в пространстве Бесова.*

— *Оценки размеров кластеров ошибок, возникающих при МАП-оценивании бинарных функций, наблюдаемых с независимым бернуллиевским шумом, в случае гиббсовского априорного распределения.*

— *Состоятельность модифицированной МАП-оценки для бинарных функций с малой линией разрывов в некоторой области значений параметра шума и параметра априорного гиббсовского распределения.*

— *Состоятельность оценок, получаемых по методу вращающихся ядер, для бинарных функций с малой линией разрывов.*

— *Экспоненциальные оценки для вероятностей больших уклонений суммы экстремальных порядковых статистик разнораспределенных обобщенных биномиальных случайных величин.*

Личный вклад соискателя. Работы, на основании которых написана диссертация, опубликованы совместно с научным руководителем д. ф.-м. н. Б.А. Залесским. Роль научного руководителя состояла в постановке рассматриваемых в диссертации задач, выборе направления исследования и в анализе полученных результатов. Все результаты, изложенные в диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на V межгосударственной научной конференции "Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение" (Минск, 1996); V Международной конференции "Компьютерный анализ данных и моделирование" (Минск, 1998); V Международной конференции "Распознавание образов и обработка информации" (Минск, 1999); VIII Белорусской математической конференции

(Минск, 2000); Республиканском научном семинаре "Математическое моделирование сложных систем и анализ данных", проводимом Белорусской Статистической Ассоциацией (Минск, февраль 2001); а также на ежегодных научно-технических конференциях в Белорусском государственном технологическом университете в 1998 – 2002 годах.

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ. Среди них 5 статей в научных журналах, 1 статья в рецензируемом сборнике научных трудов, 2 статьи в сборниках трудов международных конференций, 2 тезисов докладов на международных конференциях, 1 препринт. Общее количество страниц опубликованных материалов составляет 66 с.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и списка использованных источников. Общий объем диссертации — 101 с., из них 8 с. занимает список использованных источников (90 наименований). В работе содержится 13 иллюстраций, занимающих в совокупности 3 с.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** дано общее описание изучаемой проблематики и краткий обзор использованных литературных источников.

В **первой главе** исследуются свойства полученных с помощью иерархического метода по наблюдению со случайным шумом оценок для функций дискретного аргумента, принимающих значения из множества конечной мощности, а также построена состоятельная оценка параметра шума. При этом предполагается, что исходная функция принадлежит некоторому классу гладкости, связанному с функциональными пространствами Бесова.

Рассматриваются функции, заданные на двумерной целочисленной решетке $S = \{1, 2, \dots, N\}^2$, где $N = 2^l$, и принимающие целые значения между 0 и n (целые числа l и n известны). Для удобства изложения задашу на решетке функцию заменим кусочно-постоянной функцией f на единичном квадрате $I = (0; 1]^2$. При целом m , $0 \leq m \leq l$, пусть \mathcal{D}_m означает набор 2^{2m} квадратов J_m вида $((j_1 - 1)2^{-m}; j_1 2^{-m}] \times ((j_2 - 1)2^{-m}; j_2 2^{-m}]$, где $j_1, j_2 \in$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведения диссертационных исследований получены следующие основные результаты.

1. Разработан иерархический метод оценивания наблюдаемых с шумом функций, принимающих значения из множества конечной мощности; получены неулучшаемые по порядку оценки величины L^s -риска оценивания функций из пространств Бесова $B_{\tau}^{\alpha,1}(L^{\tau}(I))$, $1/\tau = \alpha/2 + 1/s$ [1, 2, 9].
2. Построена состоятельная оценка параметра шума по наблюдениям над независимо искажаемыми значениями функции, принадлежащей шару в пространстве Бесова $B_{\tau}^{\alpha,1}(L^{\tau}(I))$ [5].
3. Исследованы свойства МАП-оценок бинарных функций (т. е. функций со значениями из $\{0; 1\}$), наблюдаемых с независимым бернуллиевским шумом, в случае гиббсовского априорного распределения с системами четырехточечных и восьмиточечных окрестностей. В частности, показано, что в некоторой области значений параметра шума и параметра априорного гиббсовского распределения при МАП-оценивании постоянной функции с вероятностью, близкой к 1, не возникает больших кластеров ошибок [3, 4, 6, 7, 8].
4. Доказана состоятельность модифицированной МАП-оценки для бинарных функций с малой линией разрывов в некоторой области значений параметра шума p и параметра априорного гиббсовского распределения β [6, 8].
5. Доказана состоятельность оценки (9), которая строится на основании суммы минимальной и максимальной порядковых статистик, вообще говоря, зависимых разнораспределенных обобщенных биномиальных случайных величин. Доказана состоятельность оценки, получаемой по методу вращающихся ядер, для бинарных функций с малой линией разрывов [10, 11].
6. Получены экспоненциальные оценки для вероятностей больших отклонений суммы минимальной и максимальной порядковых статистик разнораспределенных обобщенных биномиальных случайных величин [10, 11].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Блинова Е.И., Залесский Б.А. Иерархический алгоритм восстановления двухцветных изображений // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1997. — № 4. — С. 24 – 29.
2. Блинова Е.И. Иерархический алгоритм восстановления изображений // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1998. — № 3. — С. 7 – 11.
3. Блинова Е.И., Залесский Б.А. О точности максимум-а-постериори оценивания бинарных функций (изображений) в модели Изинга // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1999. — № 2. — С. 40 – 45.
4. Блинова Е.И., Залесский Б.А. Свойства кластеров, возникающих в максимум-а-постериори оценках в моделях Изинга // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1999. — № 4. — С. 53 – 58.
5. Блинова Е.И. Оценка параметра шума в задаче восстановления полутоновых изображений // Труды БГТУ. Серия "Физико-математические науки и информатика". — 1999. — Вып. VII. — С. 17 – 24.
6. Блинова Е.И., Залесский Б.А. Размеры кластеров, возникающих в оценках максимального правдоподобия в гиббсовских моделях // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2001. — № 1. — С. 57 – 62.

Труды конференций

7. Blinova E.I., Zalesky B.A. MAP Estimator Properties in Gibbs Models // Computer Data Analysis and Modeling: Proc. of the Fifth Intern. Conf., Minsk, 8 – 12 June, 1998: In 4 vol. / Ed. by S.A. Aivazyan and Yu.S. Kharin. — Minsk, BSU, 1998. — Vol. 1. — P. 31 – 35.
8. Blinova E.I., Zalesky B.A. Size of Clusters on Gibbs Maximum-a-Posteriori Estimates // Pattern Recognition and Information

Processing: Proc. of Fifth Intern. Conf., Minsk, Republic of Belarus, 18 – 20 May, 1999: In 2 vol. — Minsk, 1999. — Vol. 2. — P. 115 – 119.

Тезисы

9. Блинова Е.И. О восстановлении черно-белых изображений // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: Материалы V межгос. научн. конференции, Минск, 14 – 18 мая 1996 г. — Минск: Белгосуниверситет, 1996. — С. 202.
10. Блинова Е.И., Залесский Б.А. Восстановление бипарных изображений с помощью вращающихся ядер // VIII Белорусская математическая конференция: Тезисы докладов междунар. конф., Минск, 19 – 24 июня 2000 г: В 2 ч. — Минск, БГУ, 2000. — Ч. 2. — С. 141 – 142.

Препринт

11. Blinova E.I., Zalesky B.A. Exponential Estimates of Preciseness of Rotated Kernels Algorithm. — Минск, 1999. — 16 с. — (Препринт / Ин-т технич. кибернетики НАН Беларуси; № 2.)



РЕЗЮМЕ

Блинова Елена Ивановна

Оценивание функций дискретного аргумента, наблюдаемых со случайным шумом

Ключевые слова: состоятельные оценки, точность оценивания, иерархические методы, пространства Бесова, байесовское оценивание, МАП-оценка, гиббсовское распределение, вероятности больших уклонений, порядковые статистики, обработка изображений.

Объектами исследования являются традиционно используемые и новые оценки наблюдаемых с шумом функций дискретного аргумента. Предмет исследования — свойства этих оценок. Цель работы — разработка методов оценивания наблюдаемых с шумом функций дискретного аргумента, принимающих значения из множества конечной мощности, и получение оценок для величины ошибки оценивания таких функций, а также построение новых, состоятельных оценок для этих функций.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

— разработан иерархический метод оценивания наблюдаемых с шумом дискретных функций;

— получена состоятельная оценка параметра шума по наблюдениям искаженных значений функции, принимающей значения из множества конечной мощности, при условии, что эта функция принадлежит шару в пространстве Бесова;

— получены оценки размеров кластеров ошибок, возникающих при МАП-оценивании бипарных функций, наблюдаемых с независимым бернуллиевским шумом, в случае гиббсовского априорного распределения с системами четырехточечных и восьмиточечных окрестностей;

— получены оценки для величины ошибки оценивания дискретных функций с помощью иерархического метода и процедуры МАП-оценивания;

— получены оценки для вероятностей больших уклонений суммы минимальной и максимальной порядковых статистик разнораспределенных обобщенных биномиальных случайных величин.

Диссертация имеет теоретический характер. В практических задачах, в частности, при обработке цифровых изображений, могут быть использованы рассмотренные в работе процедуры оценивания функций, а также состоятельная оценка параметра шума.

РЭЗІЮМЕ

Блінова Алена Іванаўна

Ацэньванне функцый дыскрэтнага аргумента па назіранні з
выпадковым шумам

Ключавыя словы: слухныя ацэнкі, дакладнасць ацэньвання, іерархічныя метады, прасторы Бесава, басаўскае ацэньванне, МАП-ацэнка, гібсаўскае размеркаванне, імавернасці вялікіх ухіленняў, парадкавыя статыстыкі, апрацоўка відарысаў.

Аб'ектамі даследавання ў дысертацыі з'яўляюцца традыцыйныя і новыя ацэнкі функцый дыскрэтнага аргумента па назіранні з выпадковым шумам. Прадмет даследавання — уласцівасці гэтых ацэнак. Мэта работы — распрацоўка метадаў ацэньвання па назіранні з выпадковым шумам функцый дыскрэтнага аргумента, якія прымаюць значэнні з мноства канечнай магутнасці, і вывод ацэнак дакладнасці ацэньвання, а таксама пабудова новых, слухных ацэнак для гэтых функцый.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя рэзультаты.

— Распрацаваны іерархічны метады ацэньвання дыскрэтных функцый па назіранні з выпадковым шумам.

— Атрымана слухная ацэнка параметра шума па назіранні скажонных значэнняў функцыі, якая прымае значэнні з мноства канечнай магутнасці, пры ўмове, што гэта функцыя належыць шару ў прасторы Бесава.

— Атрыманы ацэнкі памераў кластэраў памылак, што ўзікаюць пры МАП-ацэньванні бінарных функцый па назіранні з незалежным бернуліеўскім шумам, у выпадку гібсаўскага апрыёрнага размеркавання з сістэмай чатырохкропкавых і васьмікропкавых паваколляў.

— Атрыманы ацэнкі дакладнасці ацэньвання дыскрэтных функцый з дапамогай іерархічнага метада і працэдуры МАП-ацэньвання.

— Атрыманы ацэнкі для імавернасцяў вялікіх ухіленняў сумы найменшай і найбольшай парадкавых статыстык рознаразмеркаваных абгульчэных выпадковых велічынь.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. У практычных задачах, напрыклад пры апрацоўцы лічбавых відарысаў, могуць выкарыстоўвацца разгледжаныя ў рабоце працэдуры ацэньвання функцый, а таксама слухныя ацэнкі параметра шума.

SUMMARY

BLINOVA ELENA IVANOVNA

Estimation of Discrete Functions Sampled with Random Noise

Keywords: consistent estimates, preciseness of estimation, hierarchical methods, Besov spaces, Bayesian estimation, MAP estimate, Gibbs distribution, probabilities of large deviations, order statistics, image processing.

The objects of the research in this thesis are estimators of discrete functions sampled with noise. The subject of the research is studying of the statistical properties of the estimators. The purposes of the investigation are to work out new methods of estimation of discrete functions sampled with noise, to evaluate the errors of the developed estimators and to obtain new consistent estimators.

The following new results have been obtained in the thesis.

— The new hierarchical method of estimation of discrete functions sampled with random noise is developed.

— Consistent estimate of the noise parameter is obtained for the problem of denoising the discrete functions belonging to Besov balls.

— The MAP estimator properties are studied for two special cases of Gibbs priors for binary functions degraded with independent Bernoullian noise. In particular, the sizes of clusters of errors appearing in MAP estimate are evaluated.

— The preciseness of discrete functions estimation by means of the procedures elaborated before is evaluated.

— The probabilities of large deviations for sum of extremal order statistics are evaluated in the case of non-i.i.d. generalized binomial random variables.

The results of the thesis are theoretical. The practical applications of the proposed methods of function denoising and consistent estimate of the noise parameter are available. For example, they can be used in image processing.