

(ознакомительный фрагмент)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.925

Бондарь Юлия Леонидовна

**ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И ИХ ИЗОХРОННОСТЬ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2006

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Садовский Антон Павлович,
Белорусский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Лаптинский Валерий Николаевич,
Институт технологии металлов
Национальной академии наук Беларуси;

кандидат физико-математических наук,
доцент
Денисов Владимир Семенович,
учреждение образования
“Витебский государственный
технологический университет”,
кафедра теоретической и
прикладной математики.

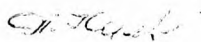
Оппонирующая организация — учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

Защита состоится 31 марта 2006 г. в 12⁰⁰ на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8, юридический факультет, ауд. 407, телефон ученого секретаря — 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета

Автореферат разослан “28” февраля 2006 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций
профессор



А.А.Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена проблеме центра и фокуса и проблеме изохронности центра для некоторых классов кубических систем дифференциальных уравнений.

Актуальность темы диссертации. Многие задачи, связанные с моделированием различных физических, химических, биологических и других процессов, приводятся к аналитическим системам дифференциальных уравнений. При этом часто возникает необходимость исследования интегральных кривых дифференциальных уравнений в окрестности их особых точек. Следует отметить, что лишь некоторые классы уравнений разрешимы в квадратурах, поэтому очень важное значение имеют методы исследования решений по виду правых частей систем без нахождения самих решений. Разработкой таких методов занимается качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости, в которой выделяются такие направления, как проблема различения центра и фокуса, локализация и определение числа предельных циклов автономных систем на плоскости, получение нормальных форм аналитических систем, разбиение на траектории всей области определения аналитической системы и исследование топологической структуры и др.

Проблема различения центра и фокуса является одной из важнейших проблем качественной теории дифференциальных уравнений. Основные методы исследования характера особой точки, предложенные в классических работах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова, приводят к проверке конечного (в случае фокуса) или бесконечного (в случае центра) числа достаточно сложных условий. Однако благодаря теореме Гильберта о базисе в случае полиномиальных систем дифференциальных уравнений для бесконечной системы условий можно найти эквивалентную ей конечную систему, что в значительной мере упрощает исследование. Возникла задача нахождения многообразия центра в конечномерных параметрических пространствах, и методы ее решения разрабатывались многими исследователями. Значительные результаты были получены и отражены в работах М.И. Альмухамедова, А.Ф. Андреева, Н.И. Вулпе, Г. Дюлака, А. Газуля, Г. Жолондека, И.С. Куклеса, К.Кристофера, Н.Г. Ллойда и Дж. Пирсон, К.Е. Малкина, В.Г. Романовского, А.П. Садовского, К.С. Сибирского, А.Е. Руденка, Л.А. Черкаса, А.С. Шубэ и других.

В настоящее время в связи с развитием компьютерных систем все более широкое распространение получает такой мощный инструмент как бази-

сы Грёбнера, позволяющие быстро и эффективно решать полиномиальные системы уравнений с несколькими переменными.

Проблема различения центра и фокуса тесно связана с проблемой изохронности центра, которая заключается в том, чтобы из всех замкнутых в окрестности особой точки интегральных кривых выделить периодические. Значительный вклад в исследование проблемы изохронности центра для различных классов полиномиальных систем был внесен В.В. Амелькиным, М. Виллариши, Е.П. Волокитиным и В.В. Ивановым, А.П. Воробьевым, Дж. Девлином, А. Газулем, К. Кристофером, Н.Н. Ладисом, Н.А. Лукашвичем, П. Мардесичем, И.И. Плешканом, Н.В. Пыжковой, В.Г. Романовским, А.Е. Руденком, К. Руссо, М. Сабатини, Дж. Чаварриджей и другими.

Вопрос о числе и взаимном расположении предельных циклов полиномиальных систем дифференциальных уравнений входит в состав одной из самых известных математических проблем — шестнадцатой проблемы Гильберта, решение которой не найдено до сих пор. Задача о числе предельных циклов рассматривалась А. Газулем, Г. Жолондеком, К. Кристофером, С. Лишчем, Н.Г. Ллойдом, А.П. Садовским и другими.

Особый интерес для исследователей представляют проблема центра и фокуса и проблема изохронности центра для полной кубической системы, которые пока остаются нерешенными. Значительные результаты по исследованию неполных кубических систем принадлежат Л.А. Черкасу, А.П. Садовскому, Г. Жолондеку, Н.Г. Ллойдю, Дж. Пирсон, А.С. Шубэ, Д.Козьме, Н.В. Пыжковой, А.Е. Руденку, В.Г. Романовскому, П. Мардесичу, М. Сабатини, М. Виллариши и другим.

Настоящая работа посвящена проблеме центра и фокуса, проблеме изохронности центра и задаче о числе предельных циклов для некоторых классов кубических систем, которые получены путем расширения изучавшихся ранее систем, например, квадратичной системы, системы Куклеса и других.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Настоящая работа выполнялась на кафедре дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета в соответствии с планом, предусмотренным республиканской программой “Математические структуры” (№ государственной регистрации 20011625), программой “Анализ и динамические системы” (АиДС-18) (№ государственной регистрации 20015177).

Цель и задачи исследования. Цель исследования — получить многообразие центра и многообразие изохронного центра для некоторых классов кубических систем дифференциальных уравнений. Для этого предполагается получить:

- условия центра и условия изохронного центра для кубической системы с девятью параметрами, приводящейся к системе Лъенара;
- условия существования восьми предельных циклов в окрестности начала координат для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Лъенара;
- условия изохронного центра для обратимой кубической системы с шестью параметрами, приводящейся к системе Лъенара;
- условия центра и условия изохронного центра для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Лъенара;
- условия центра и условия изохронного центра для системы с членом четвертой степени, приводящейся к системе Лъенара;
- условия изохронного центра для обратимой кубической системы с семью параметрами;
- условия центра для кубической системы с однородными нелинейностями второй и третьей степени;
- условия центра для кубической системы с десятью параметрами, приводящейся к системе Лъенара.

Объект и предмет исследования. Объект исследования — кубические системы дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых собственных значений линейной части. Предмет исследования — траектории этих систем в окрестности особой точки типа фокуса или центра.

Методология и методы проведенного исследования. В работе использовались классические методы решения проблемы центра и фокуса — метод Ляпунова в декартовых координатах, метод интегрирующего множителя, построение интеграла типа Дарбу. При исследовании систем, приводящихся к системам Лъенара, применяется метод Л.А. Черкаса. Для получения условий изохронного центра использовались следующие методы: построение коммутирующих систем, построение функции типа Дарбу, а также метод, авторами которого являются К. Кристофер и Дж. Девлин. Для нахождения многообразий идеалов использовались методы теории полиномиальных идеалов: алгоритмы деления и пересечения идеалов, базисы Грёбнера, результаты.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Полученные в диссертации результаты являются новыми. В работе получены

условия центра и условия изохронного центра для различных классов кубических систем в случае чисто мнимых собственных значений линейной части. При этом для некоторых классов систем найдено решение проблемы различения центра и фокуса и проблемы изохронности центра. Для одного класса систем решена задача о числе малоамплитудных предельных циклов в окрестности особой точки.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы при качественном исследовании динамических систем с особой точкой типа фокуса или центра, а также при чтении спецкурсов по теории дифференциальных уравнений и теории полиномиальных идеалов на математических факультетах университетов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

— Условия центра и условия изохронного центра для кубической системы с девятью параметрами, приводящейся к системе Лъенара.

— Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Лъенара, и доказательство существования таких систем с восемью предельными циклами.

— Решение проблемы изохронности центра для обратимой кубической системы с шестью параметрами, приводящейся к системе Лъенара.

— Решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Лъенара.

— Решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для системы с членом четвертой степени, приводящейся к системе Лъенара.

Личный вклад соискателя. Результаты работ [1, 2, 5-10, 13, 15] получены совместно с научным руководителем; результаты работ [3, 4, 11, 12, 14, 16, 17] получены соискателем самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений; на Международной матем. конференции “Еругинские чтения — VIII” (Брест, 20-23 мая 2002 г.); на Международной матем. конференции “Еругинские чтения — IX” (Витебск, 20-22 мая 2003 г.); на Международной матем. конференции “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” (Минск, 4-9 сентября 2003 г.); на VII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях” (Гомель, 22-24 марта 2004 г.); на Второй конференции

математического общества Республики Молдова (Кишинев, 17-19 августа 2004 г.); на IX Белорусской математической конференции (Гродно, 3-6 ноября 2004 г.); на VII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях” (Гомель, 14-16 марта 2005 г.); на Международной матем. конференции “Еругинские чтения — X” (Могилев, 24-26 мая 2005 г.); на VIII Международной научно-практической конференции “Актуальные проблемы науки и образования” (Новозыбков, 27-28 октября 2005 г.); на Международной конференции “Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям” (Минск, 7-10 декабря 2005 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 научных работах, среди которых 5 статей в научных журналах (две из них написаны без соавторов), 8 тезисов выступлений на математических конференциях и 4 работы в сборниках материалов научных конференций. Общий объем опубликованных материалов — 83 страницы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников. Полный объем диссертации — 113 страниц машинописного текста, из которых 13 страниц занимает список использованных источников, состоящий из 155 наименований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование характера особой точки для некоторых классов кубических систем. Получены следующие основные результаты.

1. Условия центра и условия изохронного центра для кубической системы с девятью параметрами, приводящейся к системе Лъенара [1, 2, 4, 6, 7, 9, 10].

2. Решение проблемы различения центра и фокуса для кубической системы с восемью параметрами и доказательство существования таких систем с восемью предельными циклами [2].

3. Решение проблемы изохронности центра для обратимой кубической системы с шестью параметрами, приводящейся к системе Лъенара [3, 14].

4. Решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Лъенара [5, 11, 16].

5. Решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для системы с членом четвертой степени, приводящейся к системе Лъенара [11, 17].

6. Условия центра для кубической системы с однородными нелинейностями второй и третьей степени [15]; условия центра для обратимой кубической системы с семью параметрами [13]; условия центра для кубической системы с десятью параметрами, приводящейся к системе Лъенара [12].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Статьи в научных журналах:

1. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Условия центра для одной полиномиальной системы, приводящейся к системе Лъенара // Труды Института математики НАН Беларуси. — Минск, 2004. — Т. 12, № 2. — С. 38-43.
2. *Bondar Y.L., Sadovskii A.P.* Variety of the center and limit cycles of a cubic system which is reduced to Lienard form // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. — Chisinau, 2004. — № 3 (46). — P. 71-90.
3. *Бондарь Ю.Л.* Решение проблемы изохронности центра для обратимой кубической системы // Вестник БГУ. Серия I. — Мн., 2005. — № 2. — С. 73-76.

4. *Бондарь Ю.Л.* Проблема изохронности центра для одной кубической системы // Вестник ГрГУ имени Янки Купалы. Серия 2. — Гродно, 2005. — № 2. — С. 85-92.
5. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Решение проблемы центра и фокуса для одной кубической системы, приводящейся к системе Лъенара // Дифференц. уравнения. — 2006. — Т. 42. № 1. — С. 11-23.

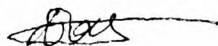
Тезисы конференций:

6. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Многообразия центра одной кубической системы дифференциальных уравнений // “Еругинские чтения — VIII”: Тез. докл. междунар. мат. конф., Брест, 20-23 мая 2002 г.: В 2 ч. / Брестский гос. ун-т. — Брест, 2002. — Ч. 1. — С. 106-107.
7. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Условия центра для одной кубической системы, приводящейся к системе Лъенара // “Еругинские чтения — IX”: Тез. докл. междунар. мат. конф., Витебск, 20-22 мая 2003 г. / Витебский гос. ун-т. — Витебск, 2003. — С. 57-58.
8. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Применение компьютерной системы “МАТНЕМАТИСА” для вычисления условий изохронности центра // “Еругинские чтения — IX”: Тез. докл. междунар. мат. конф., Витебск, 20-22 мая 2003 г. / Витебский гос. ун-т. — Витебск, 2003. — С. 174-175.
9. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Центры и предельные циклы кубической системы, приводящейся к системе Лъенара // “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”: Тез. докл. междунар. конф., Минск, 4-9 сентября 2003 г. / Бел. гос. ун-т. — Минск, 2003. — С. 38.
10. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Условия изохронного центра кубической системы, приводящейся к системе Лъенара // IX Белорусская математическая конференция: Тез. докл. междунар. конф., Гродно, 3-6 ноября 2004 г.: В 3 ч. / Гродненский гос. ун-т. — Гродно, 2004. — Ч.1. — С. 106-107.
11. *Бондарь Ю.Л.* Проблема центра и фокуса для одной системы, приводящейся к системе Лъенара // “Еругинские чтения — X”: Тез. докл. междунар. мат. конф., Могилев, 24-26 мая 2005 г. / Могилевский гос. ун-т. — Могилев, 2005. — С. 51.

12. *Бондарь Ю.Л.* Проблема центра и фокуса для одной системы с десятью параметрами, приводящейся к системе Льенара // “Богдановские чтения”: Тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 7-10 декабря 2005 г. / Бел. гос. ун-т. — Минск, 2005. — С. 60-61.
13. *Бондарь Ю.Л., Садовский А.П.* Проблема изохронности центра для обратной кубической системы с семью параметрами // “Богдановские чтения”: Тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 7-10 декабря 2005 г. / Бел. гос. ун-т. — Минск, 2005. — С. 61-62.

Материалы научных конференций:

14. *Бондарь Ю.Л.* Проблема изохронности центра для одной обратной кубической системы // “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях”: Материалы VII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 22-24 марта 2004 г. / Гомельский гос. ун-т. — Гомель, 2004. — С. 119-120.
15. *Bondar Y.L., Sadovskii A.P.* The variety of ideal of focal values for one cubic system // Second Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chisinau, August, 17-19, 2004 / Acad. St. RM. — Chisinau, 2004. — P. 58-61.
16. *Бондарь Ю.Л.* Проблема изохронности центра для одной кубической системы // “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях”: Материалы VII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 14-16 марта 2005 г. / Гомельский гос. ун-т. — Гомель, 2005. — С. 160-162.
17. *Бондарь Ю.Л.* Решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для одной кубической системы // “Актуальные проблемы науки и образования”: Сборник материалов VIII междунар. научно-практической конференции, Новозыбков, 27-28 октября 2005 г.: В 2 ч. / Брянский гос. ун-т. — Брянск, 2005. — Ч.1. — С. 31-40.



РЭЗІОМЭ

БОНДАР ЮЛІЯ ЛЕАНІДАЎНА

Цэнтры кубічных сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў і іх
ізахроннасць

Ключавыя словы: кубічныя сістэмы, цэнтр, фокус, ізахронны цэнтр, мнагастайнасць, базіс Грэбнера, сістэма Льянара.

Аб'ект даследвання — кубічныя сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у выпадку чыста ўяўных уласных значэнняў лінейнай часткі. Прадмет даследвання — траекторыі гэтых сістэм у наваколлі асаблівага пункту тыпа фокуса або цэнтра. Мэта даследвання — атрымаць мнагастайнасць цэнтра і мнагастайнасць ізахроннага цэнтра для некаторых класаў кубічных сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў.

У рабоце выкарыстоўваліся класічныя метады рашэння праблемы цэнтра і фокуса і праблемы ізахроннасці цэнтра. Для даследвання сістэм, якія прыводзяцца да сістэм Льянара, прымяняецца метада Л.А. Чэркаса. Для знаходжання мнагастайнасцей ідэалаў выкарыстоўваліся метады тэорыі палінаміяльных ідэалаў: алгарытмы дзялення і перасячэння ідэалаў, базісы Грэбнера, рэзультанты.

У рабоце атрыманы наступныя асноўныя рэзультаты: ўмовы цэнтра і ўмовы ізахроннага цэнтра для кубічнай сістэмы з дзевяццю параметрамі, якая прыводзіцца да сістэмы Льянара; рашэнне праблемы адрознення цэнтра і фокуса для кубічнай сістэмы з васем'ю параметрамі, якая прыводзіцца да сістэмы Льянара, і доказ існавання такіх сістэм з васем'ю лімітавымі цыкламі; рашэнне праблемы ізахроннасці цэнтра для абарачальнай кубічнай сістэмы з шасцю параметрамі, якая прыводзіцца да сістэмы Льянара; рашэнне праблемы цэнтра і фокуса і праблемы ізахроннасці цэнтра для кубічнай сістэмы з васем'ю параметрамі, якая прыводзіцца да сістэмы Льянара; рашэнне праблемы цэнтра і фокуса і праблемы ізахроннасці цэнтра для адной сістэмы з членам чацвертай ступені, якая прыводзіцца да сістэмы Льянара.

Работа мае тэарэтычны характар, яе рэзультаты могуць быць скарыстаны пры якасным даследванні дынамічных сістэм з асаблівым пунктам тыпа фокуса або цэнтра, а таксама пры выкладанні спецкурсаў па тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў і тэорыі палінаміяльных ідэалаў на матэматычных факультэтах універсітэтаў.

РЕЗЮМЕ

БОНДАРЬ ЮЛИЯ ЛЕОНИДОВНА

Центры кубических систем дифференциальных уравнений и их изохронность

Ключевые слова: кубические системы, центр, фокус, изохронный центр, многообразие, базис Грёбнера, система Льенара

Объект исследования — кубические системы дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых собственных значений линейной части. Предмет исследования — траектории этих систем в окрестности особой точки типа фокуса или центра. Цель исследования — получить многообразие центра и многообразие изохронного центра для некоторых классов кубических систем дифференциальных уравнений.

В работе использовались классические методы решения проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра. Для исследования систем, приводящихся к системам Льенара, применяется метод Л.А. Черкаса. Для нахождения многообразий идеалов использовались методы теории полиномиальных идеалов: алгоритмы деления и пересечения идеалов, базисы Грёбнера, результаты.

В работе получены следующие основные результаты: условия центра и условия изохронного центра для кубической системы с девятью параметрами, приводящейся к системе Льенара; решение проблемы различения центра и фокуса для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Льенара, и доказательство существования таких систем с восемью предельными циклами; решение проблемы изохронности центра для обратимой кубической системы с шестью параметрами, приводящейся к системе Льенара; решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для кубической системы с восемью параметрами, приводящейся к системе Льенара; решение проблемы центра и фокуса и проблемы изохронности центра для одной системы с членом четвертой степени, приводящейся к системе Льенара.

Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы при качественном исследовании динамических систем с особой точкой типа фокуса или центра, а также при чтении спецкурсов по теории дифференциальных уравнений и теории полиномиальных идеалов на математических факультетах университетов.

SUMMARY

BONDAR YULIYA LEONIDOVNA

Centers of cubic systems of differential equations and their isochronicity

Key words: cubic systems, center, focus, isochronous center, variety, Gröbner basis, Liénard system.

The object of research are cubic systems of differential equations in case of pure imaginary eigenvalues of linear part. The subject of research are trajectories of their systems in neighbourhood of critical point of center or focus type. The purpose of research has been to obtain variety of a center and variety of an isochronous center for some classes of cubic systems of differential equations.

In the present investigation there have been employed the classical methods for solution of center-focus problem and problem of isochronicity of center. To research the systems being reduced to Liénard systems Chercas's method has been used. To find the varieties of ideals the methods of theory of polynomial ideals such as algorithms of division and intersection of ideals, Gröbner basis, resultants have been used.

In the present paper the next main results have been obtained: conditions of center and conditions of isochronous center for cubic system with nine parameters being reduced to Liénard system; solution of center-focus problem for cubic system with eight parameters being reduced to Liénard system, also the existence of such systems with eight limit cycles was proved; solution of problem of isochronicity of center for reversible cubic system with six parameters being reduced to Liénard system; solution of center-focus problem and solution of problem of isochronicity of center for cubic system with eight parameters being reduced to Liénard system; solution of center-focus problem and problem of isochronicity of center for system with a term of the fourth degree being reduced to Liénard system.

The work has theoretical character. The obtained results may find an application in the qualitative research of dynamical systems with a critical point of center-focus type, and also in lecturing of theory of differential equations and theory of ideals at mathematical faculties of universities.