

(ознакомительный фрагмент)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

**Бондарев  
Сергей Александрович**

**Точки Лебега и аппроксимация Лузина для соболевских  
функций на метрических пространствах**

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 — вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2019

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Кротов Вениамин Григорьевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой теории функций  
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Ровба Евгений Алексеевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой фундаментальной  
и прикладной математики  
Гродненского государственного университета  
имени Янки Купалы;

**Лебедев Андрей Владимирович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой функционального анализа  
и аналитической экономики  
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — **ГНУ "Институт математики НАН  
Беларуси"**.

Защита состоится **20 декабря 2019 г. в 10.00** часов на заседании со-  
вета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном  
университете по адресу: г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридиче-  
ского факультета), ауд. 407, телефон ученого секретаря (017) 209-57-09.

Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Бе-  
лорусского государственного университета.

Автореферат разослан “        ” ноября 2019 г.

Учёный секретарь  
совета по защите диссертаций  
кандидат физико-математических наук  
доцент

Е.М. Радыно

## ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена обобщению двух фундаментальных результатов теории функций действительного переменного — теоремам Лузина и Лебега. Для функций из классов соболевского типа эти теоремы являются примером так называемых тонких свойств функций. Тонкими обычно называют те свойства функций, которые не являются инвариантными относительно изменения значений на множестве меры нуль. Для таких свойств основной задачей является классификация исключительных множеств (на которых эти свойства не выполнены) по их размерам. Это контрастирует с обычными задачами теории функций, где множествами меры нуль принято пренебрегать.

Классическая теорема Лебега утверждает, что для любой локально интегрируемой на  $\mathbb{R}^n$  функции, предел средних интегральных по шарам с центром в точке совпадает со значением функции в этой точке почти всюду. Важность этого результата, в частности, состоит в том, что он дает естественное определение значений функции  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  почти всюду.

Теорема Лузина утверждает, что любая измеримая на  $\mathbb{R}^n$  функция  $f$  обладает  $C$ -свойством —  $f$  является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Работа посвящена обобщению этих двух теорем для классов Соболева  $M^p_\alpha(X)$  на метрическом пространстве  $X$ , а также исследованию вопросов о массивности возникающих исключительных множеств.

Принципиальным является рассмотрение случая несуммируемых функций, для которого не работают классические методы и приходится использовать сравнительно новую технику, использующую постоянные наилучшего приближения в пространстве  $L^p$ .

Не претендуя на полноту, отметим некоторых авторов, интересовавшихся данными вопросами: А. Кальдерон, Х. Федерер, В. Зиммер, А. Зигмунд, Х. Уитни, Т. Бэгби, Д. Свансон, П. Хайлаш, Б. Боярский, П. Стржелецкий. В основном их исследования были посвящены изучению функций из пространств Соболева  $W^p_\alpha(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^n$  — более или менее регулярная область.

В последние 25 лет такая проблематика изучалась в более общей ситуации пространств Соболева  $M^p_\alpha(X)$ , где  $X$  — метрическое пространство с мерой: П. Хайлаш, Ю. Киннунен, О. Мартио, В. Латвала, В.Г. Кротов, М.А. Прохорович.

Интерес к более общим структурам пространств однородного типа свя-

зан с тем, что множество важных классических результатов анализа на евклидовых пространствах удалось перенести на произвольные метрические пространства с мерой, не накладывая при этом особо ограничительных условий на связь метрики и меры, кроме условия удвоения.

Во всех исследованных ранее случаях предполагалось, что  $0 < \alpha \leq 1$  (или иногда  $\alpha > 0$ , в зависимости от ситуации) и  $p \geq 1$ . Диссертация посвящена изучению вопросов, подобных рассмотренным выше, для обобщенных пространств соболевского типа  $M_\alpha^p(X)$ ,  $\alpha > 0$ , на метрическом пространстве  $X$  с мерой. Однако при этом сняты ограничения снизу на  $p$ : везде, если не оговорено противное, предполагается, что  $p > 0$ . Другими словами, это означает, что теперь мы имеем дело с несуммируемыми функциями в общем случае. Это потребовало пересмотра понятий, которые использовались для суммируемых функций.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Связь работы с научными программами и темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы»). Работа над диссертацией проводилась на кафедре теории функций БГУ в рамках государственной программы научных исследований 2016–2020 гг., тема 1.4.02.1 «Функциональные пространства и их приложения к задачам естественных наук и экономики», номер гос. регистрации № 20161715, финансовый номер № 765/25.

### Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование тонких свойств функций из классов соболевского типа на метрическом пространстве.

Основные задачи диссертации состоят в следующем:

1. Получить оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега в терминах емкостей, включая случай  $p > 0$ .
2. Получить оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега в терминах произвольной внешней меры, включая случай  $p > 0$  и критический случай  $\gamma = \alpha p$ .

3. Получить оценки массивности для исключительного множества в теореме Лузина в терминах произвольной внешней меры, включая случай  $p > 0$ .

Объектом исследования являются функции соболевского типа на метрическом пространстве с мерой. Предметом исследования являются тонкие свойства функций, включающие в себя теоремы Лебега и Лузина для пространств Хайлаша–Соболева.

### Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. Получены оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега для классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах емкостей, включая ранее не исследованный случай  $p > 0$ .
2. Получены оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега для классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах произвольной внешней меры, включая ранее не исследованный случай  $p > 0$ .
3. Получены оценки массивности для исключительного множества в теореме Лузина в терминах произвольной внешней меры, включая ранее не исследованный случай  $p > 0$ .

### Положения, выносимые на защиту

1. Оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах емкостей, включая случай  $p > 0$ .
2. Оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах внешних мер, включая случай  $p > 0$  и критический случай  $\gamma = \alpha p$ .
3. Оценки массивности исключительного множества в теореме Лузина для функций из классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах внешних мер, включая случай  $p > 0$ .

### **Личный вклад соискателя**

Основные результаты диссертации получены автором лично. Постановка задач и анализ полученных результатов осуществлялись совместно с научным руководителем доктором физико-математических наук профессором Кротовым В.Г.

Результаты Прохоровича М.А. не входят в число основных результатов диссертации и являются следствиями более общих утверждений, полученных соискателем самостоятельно.

### **Апробация результатов диссертации**

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар по математическому анализу кафедры теории функций БГУ (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Э.И. Зверович);

2. Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского, 25 – 29 мая 2015 г., Москва, Россия;

3. Международная конференция «Harmonic analysis and approximation», 12–18 сентября 2015 г. — Цахкадзор, Армения;

4. Семинар группы «Функциональные пространства» университета им. Фридриха Шиллера, 3 декабря 2015 г., 9 декабря 2016 г., 14 декабря 2017 г., 7 декабря 2018 г., Йена, Германия;

5. Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция БМК–2016», 5–10 сентября 2016 г., Минск, Беларусь;

6. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», 10–14 апреля 2017 г., Москва, Россия;

7. Международная конференция «New perspectives in the theory of function spaces and their applications (NPFSA-2017)», 17–23 сентября, 2017, Бендлево, Польша;

8. Семинар по чистой математике школы информатики и математики Кильского университета, 20 июня, 2018, Англия.

### **Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, из которых 4 — статьи в научных изданиях в соответствии с

пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом **2.65** авторского листа), 6 — статьи в сборниках материалов научных конференций, 1 — тезисы доклада на научной конференции.

### Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики, четырех глав, заключения и библиографического списка.

Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме диссертационного исследования.

Вторая глава носит вспомогательный характер. Здесь вводятся все понятия, необходимые для дальнейшего изложения. В частности, вводятся емкости и меры Хаусдорфа, в терминах которых в следующих главах будет измеряться массивность исключительных множеств.

В третьей главе исследуются точки Лебега для функций из соболевских классов  $M_\alpha^p(X)$ , включая случай  $p > 0$ . В этой главе также получены оценки исключительного множества в терминах емкости и внешней меры. Рассмотрена теорема Лебега в критическом случае.

Четвертая глава посвящена исследованию аппроксимации Лузина для пространств  $M_\alpha^p(X)$ . Получен аналог теоремы о  $C$ -свойства Лузина, включающий в себя не только ранее исследованные случаи, но и случай  $p > 0$ .

Полный объем диссертации составляет 94 страницы. Библиографический список содержит 110 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

**Глава 1** содержит аналитический обзор основных результатов, посвященных теоремам Лебега и Лузина для классов Соболева  $W_k^p(\mathbb{R}^n)$  и их аналогов на метрических пространствах  $M_\alpha^p(X)$ . Отдельно выделена теорема о точках Лебега в критическом случае.

**Глава 2** носит вспомогательный характер. Здесь вводятся все необходимые далее обозначения и определения. В частности, рассмотрены пространства однородного типа, способы замены интегральных средних в случае несуммируемой функции и измерители массивности исключительных множеств.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

1. Дана оценка массивности исключительного множества в теореме Лебега для классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах емкостей при  $p > 0$  [1, 2].
2. Получены оценки массивности дополнения ко множеству точек Лебега в терминах внешней меры, включающие в себя случаи меры и модифицированной меры Хаусдорфа [1]. Рассмотрена теорема Лебега в критическом случае [4].
3. Решена задача об аппроксимации Лузина локально гельдеровскими функциями в классе  $M_\alpha^p(X)$  при  $p > 0$  [3].

### Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут применяться при исследовании тонких свойств функций соболевского типа, а также могут быть использованы при дальнейшем развитии теории функциональных пространств и в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу.

Результаты диссертации уже использовались в ряде работ, посвященных тонким свойствам функций из обобщенных пространств Соболева, постоянным наилучшего приближения в  $L^p$ .



## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в научных журналах

1. Bondarev, S.A. Fine properties of functions from Hajlasz-Sobolev classes  $M_\alpha^p$ ,  $p > 0$ , I. Lebesgue points / S.A. Bondarev, V.G. Krotov // Известия НАН Армении. Математика. — 2016. — Т. 51, № 6. — С. 3–22.

2. Бондарев, С.А. Свойства емкостей из классов Соболева на метрических пространствах с мерой / С.А. Бондарев // Труды института математики. — 2016. — Т. 24, № 2. — С. 20–31.

3. Бондарев, С.А. Тонкие свойства функций из классов Хайлаша–Соболева  $M_\alpha^p$  при  $p > 0$ , II. Аппроксимация Лузина / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Известия НАН Армении. Математика. — 2017. — Т. 52, № 1. — С. 26–37. (переведена на английский язык: Journal of contemporary mathematical analysis. — 2017. — Vol. 52, №. 1. — P. 30–37)

4. Бондарев, С.А. Точки Лебега для функций из обобщенных классов Соболева  $M_\alpha^p(X)$  в критическом случае / С.А. Бондарев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2018. — № 3. — С. 4–11.

### Статьи в сборниках материалов научных конференций

5. Bondarev, S. Lebesgue points in Sobolev type classes on metric measure spaces for  $p > 0$  / S. Bondarev, V. Krotov, M. Prohorovich // International conference «Harmonic analysis and approximation, VI», Tsaghkadzor, Armenia, September 12–18, 2015. — Tsaghkadzor, Armenia, 2015. — P. 21–23.

6. Bondarev, S. Luzin approximation for Sobolev type classes on metric measure spaces for  $p > 0$  / S. Bondarev, V. Krotov // International conference «Harmonic analysis and approximation, VI», Tsaghkadzor, Armenia, September 12–18, 2015. — Tsaghkadzor, Armenia, 2015. — P. 58–59.

7. Бондарев, С.А. Тонкие свойства функций из классов Хайлаша–Соболева  $M_\alpha^p$  при  $p > 0$ . Точки Лебега / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 18-ой международной Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 3 февраля, 2016. — Саратов, 2016. — С. 68–73.

8. Бондарев, С.А. Аппроксимация Лузина для классов Соболева на метрических пространствах с мерой при  $p > 0$  / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция»: материалы конференции, Минск, 5 – 10 сентября, 2016. В 5 ч. — Минск, 2016. — Ч. 1. — С. 4–5.

9. Бондарев, С.А. Свойства емкостей из классов Соболева на метрических пространствах с мерой [Электронный ресурс] / С.А. Бондарев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ – 2017», Москва, 10 – 14 апреля, 2017 / Моск. гос. ун-т; отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — М., 2017. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

10. Бондарев, С.А. Точки Лебега для функций из классов Соболева на связных метрических пространствах / С.А. Бондарев // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-ой международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова, Саратов, 29 января – 2 февраля, 2017. — Саратов, 2017. — С. 57–60.

## Тезисы

11. Бондарев С.А. Тонкие свойства функций из пространств Хайлаша–Соболева  $W_\alpha^p$ ,  $p > 0$  / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Тезисы докладов международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского, Москва, 25 – 29 мая, 2015. — Москва, 2015. — С. 162–164.

## РЕЗЮМЕ

Бондарев Сергей Александрович

### ТОЧКИ ЛЕБЕГА И АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ДЛЯ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

*Ключевые слова:* пространство однородного типа, пространства Соболева, тонкие свойства функций, точки Лебега, аппроксимация Лузина, емкости, мера Хаусдорфа.

Целью диссертационной работы является исследование тонких свойств функций из классов Соболева на метрических пространствах.

В диссертации использовались современные методы вещественного и функционального анализа, связанные с различными максимальными операторами, оценками исключительных множеств в терминах емкостей, а также мер и размерностей Хаусдорфа.

В диссертации получены следующие новые результаты:

— получены оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах емкостей, включая случай  $p > 0$ .

— получены оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах внешних мер, включая случай  $p > 0$  и критический случай  $\gamma = \alpha p$ .

— получены оценки массивности исключительного множества в теореме Лузина для функций из классов  $M_\alpha^p(X)$  в терминах внешних мер, включая случай  $p > 0$ .

Результаты могут быть использованы в научных исследованиях по анализу на метрических пространствах с мерой, по гармоническому анализу и в учебном процессе, при чтении специальных курсов по этим разделам современной математики.

## РЭЗЮМЭ

Бондараў Сяргей Аляксандравіч

### ПУНКТЫ ЛЕБЕГА І АПРАКСІМАЦЫЯ ЛУЗІНА СОБАЛЕЎСКІХ ФУНКЦЫЙ НА МЕТРЫЧНЫХ ПРАСТОРАХ

*Ключавыя словы:* прастора аднароднага тыпу, прасторы Собалева, тонкія ўласцівасці функцый, пункты Лебега, апраксімацыя Лузіна, ёмістасці, мера Хаусдорфа.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца даследаванне тонкіх уласцівасцяў функцый, якія належаць класам Собалева на метрычнай прасторы.

У дысертацыі выкарыстоўваліся сучасныя метады рэчаіснага і функцыянальнага аналізу, звязаныя з рознымі максімальнымі апэратарамі, ацэнкамі выключных мностваў у тэрмінах ёмістасцей, а таксама мер і памернасцей Хаусдорфа.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

— атрыманы ацэнкі памераў выключнага мноства у тэарэме Лебега для функцый з класаў  $M_\alpha^p(X)$  у тэрмінах ёмістасцей, уключаючы выпадак  $p > 0$ .

— атрыманы ацэнкі памераў выключнага мноства у тэарэме Лебега для функцый з класаў  $M_\alpha^p(X)$  у тэрмінах знешніх мер, уключаючы выпадак  $p > 0$  і крытычны выпадак  $p > 0$ .

— атрыманы ацэнкі памераў выключнага мноства у тэарэме Лузіна для функцый з класаў  $M_\alpha^p(X)$  у тэрмінах знешніх мер, уключаючы выпадак  $p > 0$ .

Вынікі могуць быць выкарыстаны ў навуковых даследаваннях па аналізе на метрычных прасторах з мерай, па гарманічнаму аналізу і ў навучальным працэсе, пры чытанні спецыяльных курсаў па гэтых раздзелах сучаснай матэматыкі.

## SUMMARY

Bondarev Sergey

### LEBESGUE POINTS AND LUZIN APPROXIMATION FOR SOBOLEV TYPE FUNCTIONS ON METRIC SPACE

*Keywords:* space of homogeneous type, Sobolev spaces, fine properties of functions, Lebesgue points, Luzin approximation, capacities, Hausdorff measure.

The aim of the thesis is to study the fine properties of functions from Sobolev classes on metric space.

The thesis used modern methods of real and functional analysis related to different maximal operators, estimates of exceptional sets in terms of capacities, Hausdorff measures and dimensions.

The following new results were obtained:

— estimate of the size of the exceptional set in Lebesgue theorem for functions from classes  $M_\alpha^p(X)$  in terms of capacities including the case  $p > 0$ .

— estimate of the size of the exceptional set in Lebesgue theorem for functions from classes  $M_\alpha^p(X)$  in terms of outer measures including the case  $p > 0$  and the critical case  $\gamma = \alpha p$ .

— estimate of the size of the exceptional set in Luzin theorem for functions from classes  $M_\alpha^p(X)$  in terms of outer measures including the case  $p > 0$ .

The results can be used in research on the analysis on metric measure spaces, harmonic analysis, and in the learning process, when reading special courses on these topics in modern mathematics.