2.3.$\lg^2 x + \lg x^3 - 10^{\lg 4} < 0$.
2.4.$\lg^2 x + \lg x^3 - 10^{\lg 4} < \lg 1$.
2.5.$\lg^2 x + \lg x^7 - \lg x^4 - 10^{\lg 4} < \lg 1$.
2.6.$\left(\frac{\log_5 x}{\log_5 10}\right)^2 + \lg x^7 - \lg x^4 - 10^{\lg 4} < \lg 1$.

Следующим способом укрупнения может быть способ обобщения неравенства. Например, после решения неравенства $\lg^2 x + 3\lg x - 4 < 0$ можно решить обобщённое неравенство $a\lg^2 x + b\lg x + c < 0$. Сделаем замену $\lg x = t$. Получим квадратное неравенство $at^2 + bt + c < 0$. Находим множество его решений $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < t < \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \lg x < -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и так далее.

Заключение. Анализ результатов исследования позволил сделать вывод о том, что методическая схема изучения логарифмических неравенств может состоять из следующих этапов: подготовительного (повторение ранее изученного материала), основного (овладение методами решения неравенств), дополнительного (укрупнение неравенств). При этом на каждом этапе нами вносились некоторые изменения и дополнения в традиционное изложение темы. Кроме того, укрупнённые блоки неравенств сначала составлял сам учитель и предлагал для рассмотрения учащимся, а затем подключал к составлению наиболее активных и способных учеников. Подобное изучение логарифмических неравенств оказало положительное воздействие на развитие у школьников вариативности и логики мышления, воображения и интуиции.

1. Устименко, В.В. Методика работы с логарифмическими уравнениями в контексте укрупнения дидактических единиц / В.В. Устименко, О.А. Попп // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2016. - № 3(92). – С. 88-94. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/8899 (дата обращения: 24.01.2023).

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АДАМАРА

С.А. Шлапаков[1], О.В. Скоромник[2]
[1]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова
[2]Новополоцк, ПГУ имени Евфросинии Полоцкой

В работе объектом исследования является дифференциальная задача, представляющая собой аналог задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [2]. Естественно возникает проблема интегрирования такого уравнения с учётом начальных условий. Цель данного исследования состоит в отыскании решения интегрального уравнения второго рода, которое эквивалентно поставленной задаче.

Материал и методы. Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Классическая задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля рассмотрена в [1]. В работе [3], а далее и в [4] рассматривалась аналогичная задача для дифференциального уравнения общего вида с дробной производной Адамара [2]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=\delta^{n}\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}g\right)(x),\quad \alpha>0,\quad \delta=x\frac{d}{dx},\ n=[\alpha]+1,$$

при этом

$$\left(D_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=\delta^{n}\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}g\right)(x)=\delta^{n}\left(D_{a+}^{\alpha-n}g\right)(x),$$

где конструкция

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{g(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad 0\le a<x$$

является дробным интегралом Адамара порядка $\alpha>0$.

Задача состояла в отыскании функции $y(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющей уравнению

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f(x,y(x)),\ n-1<\alpha\le n,\ n\in N,\ a>0 \tag{1}$$

и начальным условиям

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k,\ k=1,2,\ldots,n=-[-\alpha]. \tag{2}$$

Левую часть в начальных условиях (2) следует рассматривать как предел в правосторонней окрестности $(a,a+\varepsilon),\ \varepsilon>0$ точки a:

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(D_{a+,\mu}^{\alpha-k}y\right)(x),\ k=1,2,\ldots,n-1,$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x),\ \alpha\ne n,$$

$$\left(D_{a+,\mu}^{0}y\right)(a+)=\lim_{x\to a+}y(x),\ \alpha=n.$$

Задача (1)-(2) рассматривалась в пространстве регулярных функций

$$L_{\delta}^{\alpha}(a,b)=\left\{y\in L(a,b)\;\middle|\;D_{a+}^{\alpha}y\in L(a,b)\right\},\ 0<a<b<+\infty, \tag{3}$$

где

$$L(a,b)=\left\{z(t)\;\middle|\;\int_{a}^{b}|z(t)|dt<+\infty\right\},\quad \|z_1-z_2\|_{L(a,b)}=\int_{a}^{b}|z_1(t)-z_2(t)|dt.$$

Естественным видится рассмотрение дифференциальной задачи в более общей постановке: найти функцию $y(x)\in L_{\delta}^{\alpha}(a,b)$, заданную на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющую уравнению

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f\left[x,y(x),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x),\left(D_{a+}^{\alpha_2}y\right)(x),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_m}y\right)(x)\right], \tag{4}$$

$$0=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_m<\alpha.$$

и начальным условиям (2).

Дифференциальная задача (4)-(2) равносильна уравнению Вольтерра 2-го рода

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\left(D_{a+}^{\alpha_2}y\right)(t),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_m}y\right)(t)]\frac{dt}{t},\ \ x>a \tag{5}$$

Для отыскания решения этого уравнения можно, например, применить принцип сжимающих отображений в пространстве (3), записав соотношение (5) предварительно в виде $y(x)=\left(Ay\right)(x)$, где

$$\left(Ay\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\left(D_{a+}^{\alpha_2}y\right)(t),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_m}y\right)(t)]\frac{dt}{t}+g(x),$$

$$g(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-k}.$$

Затем строится рекуррентная функциональная последовательность $y_l(x)=(A^l y_0)(x)$, $l=1,2,\ldots$, где начальным приближением может служить, например, $y_0(x)=g(x)$. В силу полноты пространства $L(a,b)$ построенная последовательность будет сходиться к единственному решению $y^*(x)$ интегрального уравнения, а, значит, и дифференциальной задачи (4)-(2).

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе построено решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, которое эквивалентно задаче типа Коши для дифференциального уравнения с дробными производными Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск, 16–17 марта 2011г.) – 2011. Т. 1. С. 71-73. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/13214 (дата обращения: 01.02.2023).

3. Шлапаков, С. А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 71-72. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26880 (дата обращения: 01.02.2023).

4. Шлапаков, С.А. О разрешимости задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 74-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февраля 2022 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2022. С. 52-53. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/31567 (дата обращения: 01.02.2023).